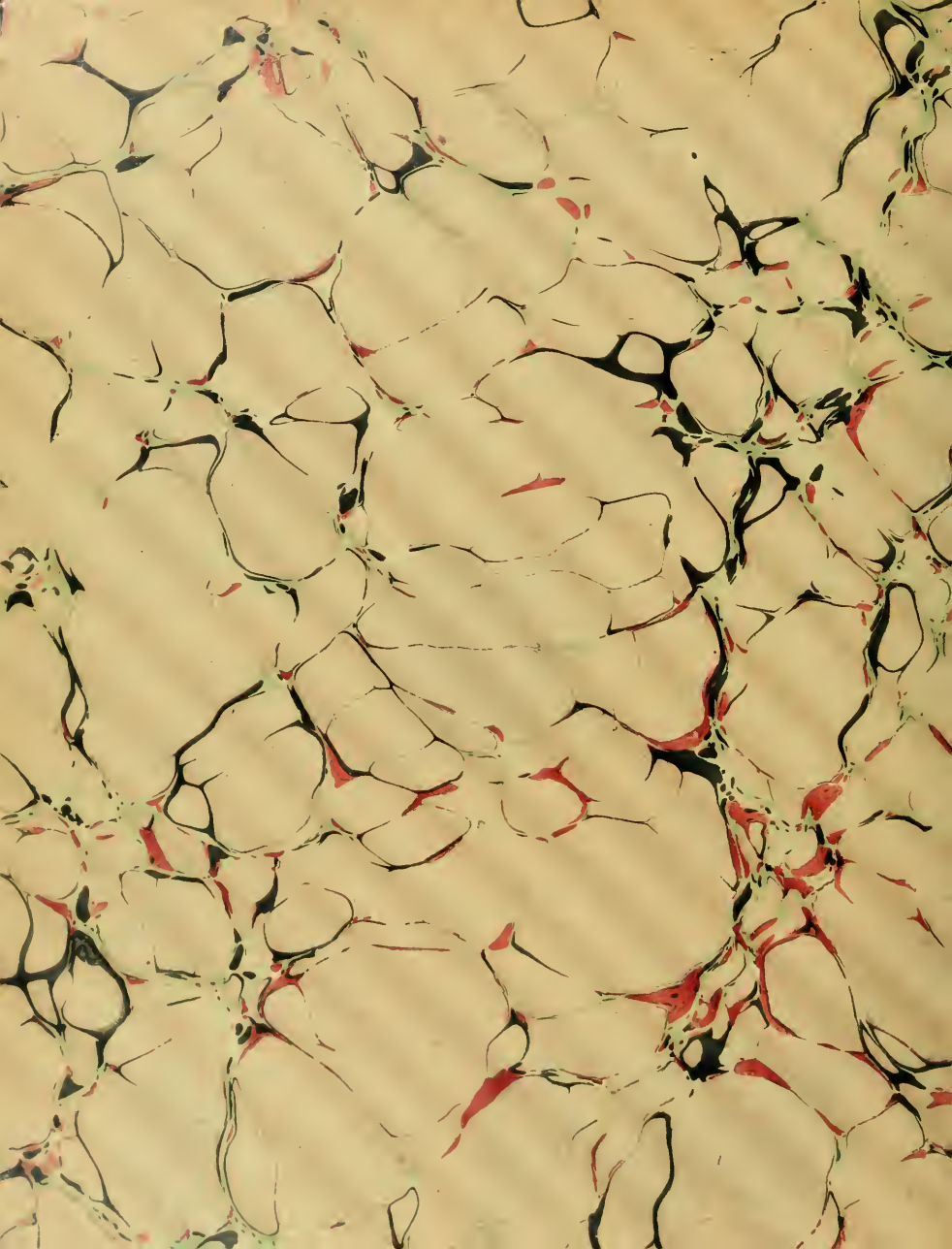
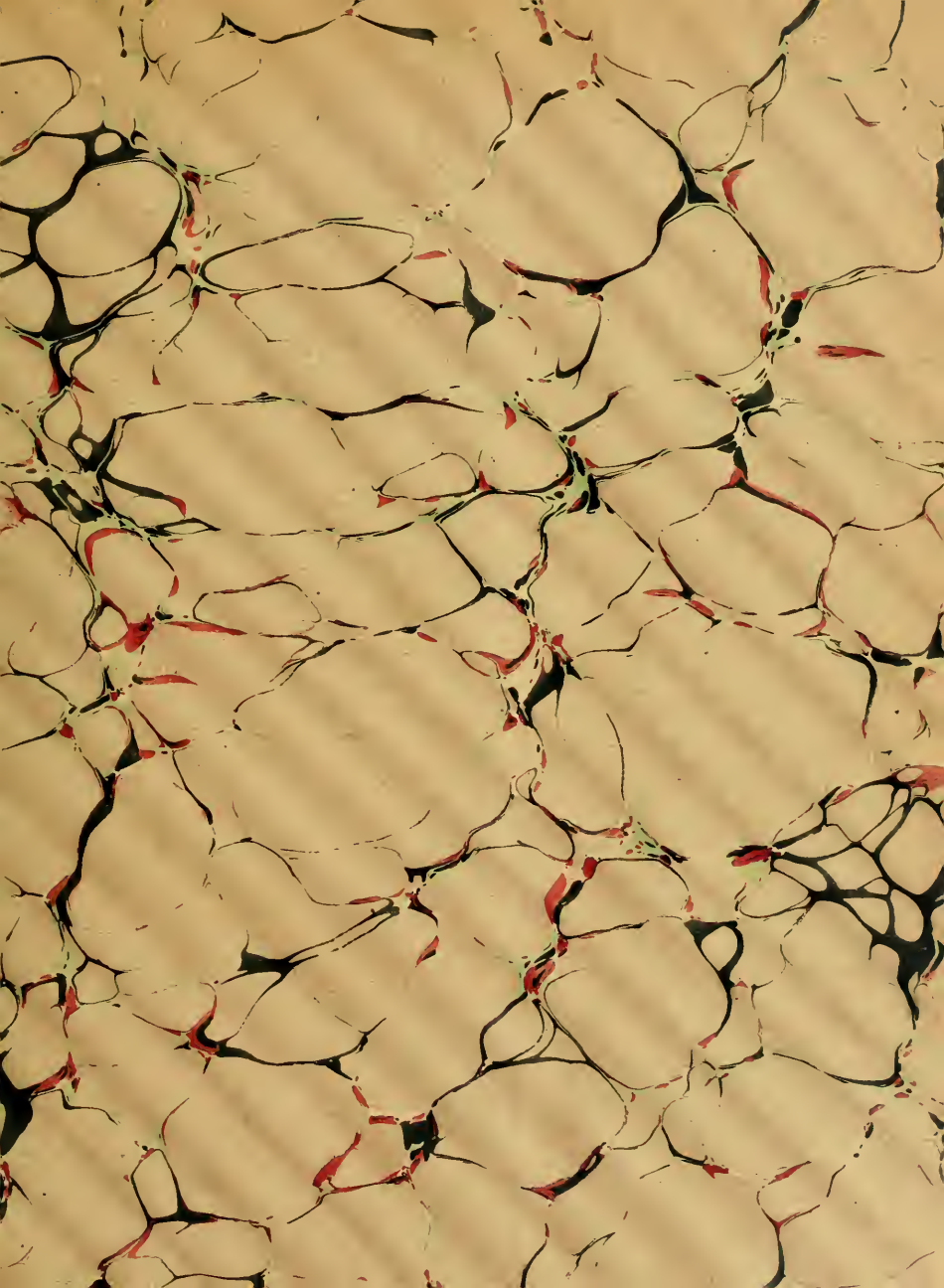




REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/revuedemathmat17pari

Math.
R

REVUE
DE
MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

RÉDIGÉE PAR MM

E. HUMBERT
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND

ET

G. PAPELIER
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE D'ORLÉANS

AVEC LA COLLABORATION DE MM.

P. AUBERT,
PROFESSEUR AU LYCÉE HENRI IV

P. LAMAIRE,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU COLLÈGE CHAPTAL

CH. RIVIÈRE,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR AGRÉGÉ DE PHYSIQUE AU LYCÉE SAINT-LOUIS

H. VUIBERT,
RÉDACTEUR DU *Journal de Mathématiques élémentaires.*

TOME NEUVIÈME

ANNÉES 1906-1907 & 1907-1908

17

291733/9 33
30

PARIS
VUIBERT ET NONY ÉDITEURS
63, Boulevard Saint-Germain, 63

GA
1
R482
[illegible] 17

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

17e Année. — N° 1. Octobre 1906.

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES TÉTRAÈDRES INSCRITS DANS UNE CUBIQUE GAUCHE ET CONJUGUÉS PAR RAPPORT A UNE QUADRIQUE

par M. **Ch. Michel**, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Dijon.

1. Soient une cubique gauche (C) et une quadrique (S) telles qu'il existe un tétraèdre et par suite, d'après un théorème dû à Hesse, une infinité de tétraèdres MNPQ inscrits dans la cubique et conjugués par rapport à la quadrique. Etant donnée une représentation paramétrique propre de la cubique (C), je me propose d'établir les relations qui existent entre les sommets de ces tétraèdres.

Désignons par ABCD une position particulière du tétraèdre variable MNPQ. Soient (s) la conique d'intersection du plan ABC et de la quadrique (S), I et J les points de rencontre de la droite AB avec la conique (s). Les quadriques qui passent par les six points M, N, P, Q, C et D rencontrent la droite AB suivant des couples de points d'une même involution. Mais, elles sont circonscrites à une infinité de tétraèdres conjugués par rapport à (S) ; donc, les points de rencontre de chacune d'elles avec la droite AB sont conjugués harmoniques par rapport aux deux points I et J, qui sont ainsi les points doubles de l'involution. Par suite, il existe une quadrique passant par les six points M, N, P, Q, C et D et tangente en I à la droite AB.

Cela posé, soient O une origine sur la cubique, ω le point de rencontre du plan osculateur en O à la cubique avec la droite AB. Désignons par R_1, R_2, R_3, R_4 les rapports anharmoniques sur la cubique (C) des points M, O, A, B ; N, O, A, B ; P, O, A, B ; Q, O, A, B et par ρ_1, ρ_2 les rapports anharmoniques sur la cubique (C) des points C, O, A, B ; D, O, A, B. Soit enfin r le rapport anharmonique des points I, ω, A, B, sur la droite AB. D'après une relation démontrée dans un précédent travail (*Sur les cubiques gauches considérées comme courbes unicursales*), on a

$$R_1R_2R_3R_4\rho_1\rho_2 = r^2,$$

d'où l'on déduit

$$R_1R_2R_3R_4 = \text{constante},$$

quand le tétraèdre MNPQ varie.

C'est une première relation entre les quatre sommets du tétraèdre variable MNPQ. On obtient deux autres relations entre ces quatre points en choisissant, au lieu de l'arête AB, deux autres arêtes du tétraèdre ABCD, de façon que les trois arêtes choisies ne soient pas dans un même plan. Il ne peut d'ailleurs y avoir plus de trois relations distinctes.

Cela posé, soient a, b, c, d les paramètres des points M, N, P, Q ; λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 ceux des points A, B, C, D dans une représentation propre de (C). Les relations précédentes deviennent

$$\frac{(a-\lambda_1)(b-\lambda_1)(c-\lambda_1)(d-\lambda_1)}{m} = \frac{(a-\lambda_2)(b-\lambda_2)(c-\lambda_2)(d-\lambda_2)}{n} = \frac{(a-\lambda_3)(b-\lambda_3)(c-\lambda_3)(d-\lambda_3)}{p}$$

$$= \frac{(a-\lambda_4)(b-\lambda_4)(c-\lambda_4)(d-\lambda_4)}{q},$$

m, n, p, q étant quatre quantités constantes quand, le tétraèdre MNPQ variant, le tétraèdre ABCD reste fixe. Si donc a', b', c', d' sont les paramètres des sommets d'un autre tétraèdre M'N'P'Q', inscrit dans (C) et conjugué par rapport à (S), on a les égalités

$$\frac{(a-\lambda_1)(b-\lambda_1)(c-\lambda_1)(d-\lambda_1)}{(a'-\lambda_1)(b'-\lambda_1)(c'-\lambda_1)(d'-\lambda_1)} = \frac{(a-\lambda_2)(b-\lambda_2)(c-\lambda_2)(d-\lambda_2)}{(a'-\lambda_2)(b'-\lambda_2)(c'-\lambda_2)(d'-\lambda_2)} = \frac{(a-\lambda_3)(b-\lambda_3)(c-\lambda_3)(d-\lambda_3)}{(a'-\lambda_3)(b'-\lambda_3)(c'-\lambda_3)(d'-\lambda_3)}$$
$$= \frac{(a-\lambda_4)(b-\lambda_4)(c-\lambda_4)(d-\lambda_4)}{(a'-\lambda_4)(b'-\lambda_4)(c'-\lambda_4)(d'-\lambda_4)}.$$

Posons

$$g(\lambda) = (\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)(\lambda-d), \qquad h(\lambda) = (\lambda-a')(\lambda-b')(\lambda-c')(\lambda-d');$$

ces égalités deviennent

$$\frac{g(\lambda_1)}{h(\lambda_1)} = \frac{g(\lambda_2)}{h(\lambda_2)} = \frac{g(\lambda_3)}{h(\lambda_3)} = \frac{g(\lambda_4)}{h(\lambda_4)}.$$

Par suite, les quantités λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 sont les racines d'une équation du quatrième degré de la forme

$$g(\lambda) - kh(\lambda) = 0,$$

$g(\lambda)$ et $h(\lambda)$ étant des polynomes dont les coefficients sont fixes quand les tétraèdres MNPQ et M'N'P'Q' restent fixes, et k variant quand le tétraèdre ABCD varie.

Or, le tétraèdre ABCD est une position quelconque du tétraèdre mobile MNPQ. Donc,

L'équation aux paramètres des sommets d'un tétraèdre variant en restant inscrit à une cubique gauche et conjugué par rapport à une quadrique est de la forme

$$g(\lambda) - kh(\lambda) = 0,$$

où k est une quantité variable.

2. Reprenons la relation $$R_1R_2R_3R_4\rho_1\rho_2 = r^2.$$

Il existe une quadrique (Σ) qui passe par la conique (s), intersection de (S) par le plan ABC, et par les quatre points M, N, P, Q. La quadrique (Σ) rencontre la cubique (C) en deux autres points U et V. Désignons par u et v les rapports anharmoniques, sur la cubique (C), des points U, O, A, B et V, O, A, B. Par application de la relation fondamentale déjà rappelée, on a la relation

$$R_1R_2R_3R_4uv = -r^2,$$

puisque le rapport anharmonique J, ω, A, B est égal à $-r$. On trouve ainsi que l'on a

$$uv = -\rho_1\rho_2.$$

Cette égalité montre que si C' est le conjugué harmonique du point C par rapport aux deux points A et B le rapport anharmonique C', O, A, B étant égal à $-\rho_1$, les trois couples de points (U, V), (A, B), (C', D) sont, sur la cubique, en involution. Pour la même raison, si D' est le conjugué harmonique de D par rapport aux deux points B et C, les trois couples de points (U, V), (B, C), (A, D') sont en involution. Par suite, le couple (U, V) est commun à deux involutions qui restent fixes quand le tétraèdre MNPQ varie. Le couple (U, V) est donc lui-même fixe. Ainsi,

La quadrique qui est circonscrite au tétraèdre MNPQ *et qui passe par la conique (s) rencontre la cubique en deux points fixes.*

En particulier, supposons que la quadrique donnée (S) soit une sphère et que le plan ABC soit le plan de l'infini. Le centre de la quadrique est alors le point D, les tétraèdres MNPQ sont orthocentriques, la cubique (C) est équilatère. On a ainsi le théorème suivant :

Étant donnée une sphère ayant son centre sur une cubique équilatère, il existe une infinité de tétraèdres inscrits à la cubique et conjugués par rapport à la sphère. Les sphères circonscrites à ces tétraèdres passent par deux points fixes de la cubique.

Ces deux points fixes sont indépendants du rayon de la sphère (S). Les sphères circonscrites aux tétraèdres étant, d'après le théorème de Faure, orthogonales à une sphère fixe concentrique à la sphère donnée, le lieu de leurs centres est une droite.

3. Il est inutile d'insister sur le caractère dualistique des résultats généraux précédemment obtenus. Par dualité, on obtiendra les relations qui existent entre les paramètres des plans osculateurs à une cubique gauche qui constituent un tétraèdre conjugué par rapport à une quadrique fixe.

Nous avons supposé que le tétraèdre ABCD était un tétraèdre proprement dit. Mais si l'un des sommets A de ce tétraèdre vient en un point commun à la cubique et à la quadrique, un autre sommet B coïncide avec A, et les deux autres sommets C et D sont les points d'intersection de la cubique et du plan tangent en A à la quadrique. Le plan qui passe par la tangente en A à la cubique et par le point C rencontre la quadrique (S) suivant une conique (s), qui coupe la tangente en A à la cubique en deux points, dont l'un I coïncide avec A et dont l'autre est un point J. D'après un théorème précédemment démontré (*Sur les cubiques considérées comme courbes unicursales*), il existe des quadriques passant par les six points M, N, P, Q, C et D et tangentes en J à la droite IJ.

Appliquons à cette quadrique la relation démontrée antérieurement (*loc. cit.*) qui lie les points de rencontre d'une quadrique variable avec une cubique et une droite fixes tangentes entre elles. Soient, sur la cubique (C), λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 les paramètres des points M, N, P, Q, μ et ν les paramètres des points C et D, α le paramètre du point I, β le paramètre du point de contact du plan osculateur mené de J à la cubique (C). On a

$$\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\frac{1}{\lambda_2-\alpha}+\frac{1}{\lambda_3-\alpha}+\frac{1}{\lambda_4-\alpha}+\frac{1}{\mu-\alpha}+\frac{1}{\nu-\alpha}=\frac{6}{\beta-\alpha},$$

d'où

$$\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\frac{1}{\lambda_2-\alpha}+\frac{1}{\lambda_3-\alpha}+\frac{1}{\lambda_4-\alpha}=\text{constante}.$$

On a ainsi le théorème suivant :

Le pôle harmonique d'un point commun à la quadrique (S) *et à la cubique par rapport au système des sommets d'un tétraèdre inscrit à la cubique et conjugué à la quadrique est un point fixe.*

La relation précédente remplace, dans ce cas, l'une des trois relations distinctes établies dans le cas général.

On a un théorème corrélatif.

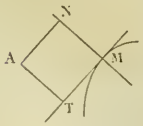
ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES (Cours spéciaux).

Concours de 1905.

1459. — *Trouver une courbe telle que les distances* AN *et* AT *d'un point fixe* A *à sa normale et à sa tangente en un point* M *soient dans un rapport constant lorsque le point* M *change de position sur la courbe.*

Prenons le point A pour origine des coordonnées et désignons par x et y les coordonnées d'un point de la courbe cherchée. Posons en outre, pour abréger, $y'=\frac{dy}{dx}$; les équations de la tangente et de la normale au point (x, y) seront

$$Y-y-y'(X-x)=0, \qquad y'(Y-y)+X-x=0,$$



et les distances de l'origine à ces deux droites,

$$\frac{xy'-y}{\sqrt{1+y'^2}}, \qquad \frac{yy'+x}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Nous devrons donc avoir

$$\frac{xy'-y}{yy'+x}=\pm k,$$

k étant un nombre positif donné.

Intégrons d'abord en prenant le signe $+$; nous aurons l'équation différentielle

$$(x-ky)dy-(y+kx)dx=0.$$

Cette équation est une équation homogène que nous intégrerons en posant $y=zx$. Ceci nous donne en effet $dy=zdx+xdz$, puis

$$(1-kz)(zdx+xdz)-(z+k)dx=0,$$

et

$$xdz(1-kz)-k(1+z^2)dx=0.$$

Nous avons donc finalement

$$\frac{1-kz}{1+z^2}\,dz-k\,\frac{dx}{x}=0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{dz}{1+z^2}-k\,\frac{zdz}{1+z^2}-k\,\frac{dx}{x}=0.$$

L'intégration est dès lors immédiate et nous donne

$$\text{arc tg}\,z-\frac{k}{2}\,\text{L}(1+z^2)=k\text{L}x+\text{C}^{\text{te}}.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\frac{k}{2}\,\text{L}\,\frac{x^2(1+z^2)}{\text{C}}=\text{arc tg}\,z,$$

ou, en remplaçant z par $\frac{y}{x}$,

$$x^2+y^2=\text{C}e^{\frac{2\,\text{arc tg}\frac{y}{x}}{k}}.$$

En coordonnées polaires, on obtient l'équation très simple que voici :

$$\rho=\text{C}'e^{\frac{\text{arc tg}\frac{y}{x}}{k}}=\text{C}'e^{\frac{\omega}{k}}=e^{\frac{\omega-\alpha}{k}}.$$

Cette équation représente une spirale logarithmique qui tourne autour du pôle, quand on fait varier la constante α.

Si on change k en $-k$, on trouve la même spirale orientée en sens contraire : il n'y aurait qu'à changer le sens positif des angles pour retrouver la même équation.

J. MARCHAL.

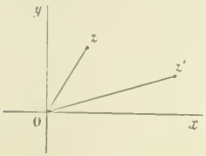
Bonnes solutions : MM. R. Corneille et C. Pugibet (à Bordeaux) ; J. D. Dufaut, à Poitiers ; G. Cotty, lycée de Dijon.
Assez bonnes solutions : MM. G. Pélissier, à Toulouse ; M. Laurence ; Amblard, à Ruines ; G. Fougry, à Roanne ; Le Blanc, collège Chaptal.

ALGÈBRE

1474. — *Soient z et z' deux quantités imaginaires et u une racine carrée de leur produit. Montrer que l'on a*

$$\text{mod.}\,z+\text{mod.}\,z'=\text{mod.}\left(\frac{z+z'}{2}-u\right)+\text{mod.}\left(\frac{z+z'}{2}+u\right).$$

Posons $\qquad z=r(\cos\theta+i\sin\theta), \qquad z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$;



nous aurons

$$\frac{z+z'}{2}=\frac{r\cos\theta+r'\cos\theta'}{2}+i\,\frac{r\sin\theta+r'\sin\theta'}{2}$$

et

$$u=\sqrt{zz'}=\sqrt{rr'}\left[\cos\frac{\theta+\theta'}{2}+i\sin\frac{\theta+\theta'}{2}\right].$$

Par conséquent, le module de $\frac{z+z'}{2}+u$ est égal à la racine carrée de

$$\left[\frac{r\cos\theta+r'\cos\theta}{2}+\sqrt{rr'}\cos\frac{\theta+\theta'}{2}\right]^2+\left[\frac{r\sin\theta+r'\sin\theta'}{2}+\sqrt{rr'}\sin\frac{\theta+\theta'}{2}\right]^2;$$

or, cette somme se développe immédiatement et s'écrit

$$\frac{r^2 + r'^2 + 2rr'\cos(\theta - \theta')}{4} + rr' + \sqrt{rr'}\,(r + r')\cos\frac{\theta - \theta'}{2},$$

ou bien

$$\frac{(r + r')^2}{4} + \sqrt{rr'}\,(r + r')\cos\frac{\theta - \theta'}{2} + rr'\cos^2\frac{\theta - \theta'}{2};$$

finalement on a

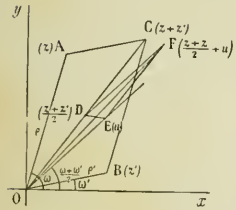
$$\text{mod.}\left(\frac{z + z'}{2} + u\right) = \frac{r + r'}{2} + \sqrt{rr'}\cos\frac{\theta - \theta'}{2},$$

et, de même,

$$\text{mod.}\left(\frac{z + z'}{2} - u\right) = \frac{r + r'}{2} - \sqrt{rr'}\cos\frac{\theta - \theta'}{2}.$$

La propriété annoncée est dès lors évidente.

Interprétation géométrique. — Si l'on représente dans un plan xOy, les points qui sont les images correspondantes des quantités imaginaires z, z', u; respectivement: A, B, E; le module de $\frac{z + z'}{2} - u$ sera DE (en longueur) et le module de $\frac{z + z'}{2} + u$ sera OF et la relation (1) pourra s'exprimer géométriquement de la façon suivante :



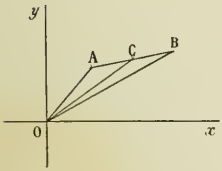
Ayant un parallélogramme OACB, menons sa diagonale OC, et prenons sur cette diagonale le point D tel que $\overline{OD} = \overline{DC}$; menons la bissectrice OE de l'angle $\widehat{AOB}$ et prenons $\overline{OE} = \sqrt{\overline{OA}.\overline{OB}}$; construisons enfin un parallélogramme sur les deux côtés OD, OE, *la somme des diagonales* DE *et* OF *de ce dernier parallélogramme est égale à la somme des deux côtés* OA *et* OB *du premier parallélogramme.*

MARIE-VICTOR CASTANO, étudiante à Jassy.

Autre solution. — L'égalité proposée peut s'écrire

$$\text{mod}\,(\sqrt{z})^2 + \text{mod}\,(\sqrt{z'})^2 = \text{mod}\,\frac{(\sqrt{z} - \sqrt{z'})^2}{2} + \text{mod}\,\frac{(\sqrt{z} + \sqrt{z'})^2}{2},$$

en prenant pour $\sqrt{z}$ et $\sqrt{z'}$ deux déterminations quelconques.



Soient A et B les images de $\sqrt{z}$ et $\sqrt{z'}$ et C le milieu de AB.

Nous avons

$$OA = \text{mod}\,\sqrt{z}, \qquad OB = \text{mod}\,\sqrt{z'},$$

$$OC = \text{mod}\,\frac{\sqrt{z} + \sqrt{z'}}{2} \qquad \text{et} \qquad BC = \text{mod}\,\frac{\sqrt{z} - \sqrt{z'}}{2}.$$

L'égalité à démontrer exprime donc le théorème classique de la médiane :

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = 2\,\overline{OC}^2 + 2\overline{BC}^2.$$

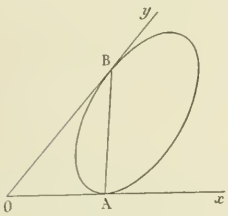
M. LAURENCE.

Bonne solution de M. J. YERNAUX, à l'école des mines de Mons.
Autres solutions également justes : MM. PARROD, à Vesoul ; DESSIMOND, à Alger ; Louis SIRE ; G. COTTY.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1464. — *Si deux coniques sont bitangentes, leurs rayons de courbure aux points de contact forment une proportion* (*).

Prenons pour axes les tangentes communes aux deux coniques ; soient $A(a, 0)$ le point de contact sur Ox, $B(0, b)$ le point de contact sur Oy. La corde des contacts AB a pour équation $bx + ay - ab = 0$, et l'équation d'une des coniques peut s'écrire



$$(1) \qquad [b(x-a)+ay]^2 + 2mxy = 0.$$

Nous allons former l'équation du cercle osculateur à cette conique au point A. Un cercle quelconque tangent en A à Ox est représenté par une équation de la forme

$$(2) \qquad (x-a)^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - 2\lambda y = 0.$$

Pour que ce cercle soit osculateur à la conique (1) au point A, il faut que la corde (associée à Ox) commune aux coniques (1) et (2) passe par le point A. Cherchons l'équation de cette corde; pour cela, ajoutons à l'équation (1) l'équation (2) multipliée par $-b^2$. Le premier membre de l'équation obtenue est divisible par y, et après avoir supprimé ce facteur, il reste l'équation

$$2(ab + m - b^2\cos\theta)x + (a^2 - b^2)y - 2b(a^2 - b\lambda) = 0,$$

qui représente la corde cherchée.

Pour que cette droite passe par le point A, il faut qu'on ait

$$(3) \qquad (m - b^2\cos\theta)a + b^2\lambda = 0.$$

Soient maintenant α, β, R les coordonnées du centre et le rayon du cercle osculateur ainsi déterminé. Entre ces trois inconnues, on connaît les relations

$$\alpha + \beta\cos\theta = a, \qquad \alpha\cos\theta + \beta = \lambda, \qquad \beta\sin\theta = R;$$

d'où l'on tire en éliminant α et β

$$R\sin\theta = \lambda - a\cos\theta,$$

et, en tenant compte de la relation (3),

$$R\sin\theta = -\frac{ma}{b^2}.$$

Pour une autre conique bitangente à la première aux points A et B, on aurait

$$R'\sin\theta = -\frac{m'a}{b^2},$$

et, par suite,

$$\frac{R}{R'} = \frac{m}{m'}.$$

Au point B où les deux coniques touchent Oy, le rapport de leurs rayons de courbure est encore $\frac{m}{m}$, ce qui démontre la proposition.

V. JAMET, professeur au lycée de Marseille.

Autres solutions par MM. Ambland, conducteur des ponts et chaussées, à Riomes (Cantal) ; R. Bouvaist ; F. Brachet, soldat au 42e de ligne, à Belfort ; G. Cotty, lycée de Dijon ; Dessimond, à Alger ; Léon Fenouiller, à Romans (Drôme) ; G. Fouquy, à Roanne ; A. Hennequin, élève à l'école normale supérieure ; M. Laurence ; J. Marchal ; Parrod, à Vesoul ; G. Pélissier, lycée de Toulouse.

(*) Cette question, proposée aux examens de la Licence, à Marseille en 1889 a été empruntée à la thèse de doctorat de M. V. Jamet, qui a bien voulu nous communiquer l'élégante solution que nous publions.

MÉCANIQUE

1469. — *Dans un plan* (P), *on trace une courbe* (A) *et une droite* (B).

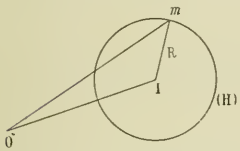
Un point a décrit (A) *d'un mouvement uniforme, un point b est animé sur* (B) *d'un mouvement uniforme.*

Soit c le milieu de ab.

On projette orthogonalement le mouvement de ce point c sur un plan (Q).

Démontrer que l'on obtient ainsi le mouvement plan le plus général à hodographe elliptique.

Cherchons d'abord le mouvement plan le plus général à hodographe circulaire.



Soit donc un cercle (H) rapporté à l'origine O, ayant pour centre I et pour rayon R ; et, supposons que ce cercle soit l'hodographe du mouvement d'un point c.

Traçons une droite (B) parallèle à OI et imaginons un point b décrivant (B) avec la vitesse constante $2\overline{OI}$; soit enfin, à l'instant t, a le symétrique de b par rapport à c.

Le point c étant le milieu de ab, V_a, V_b, V_c étant les vitesses des points a, b, c, nous avons l'équipollence

$$(V_c) = \frac{1}{2}[(V_a)+(V_b)] = \left(\frac{V_a}{2}\right)+\left(\frac{V_b}{2}\right);$$

mais

$$(V_c) = (Om), \qquad (V_b) = 2(OI),$$

et il vient

$$(1) \qquad (Om) = (OI)+\left(\frac{V_a}{2}\right).$$

Or, on a aussi

$$(2) \qquad (Om) = (OI)+(Im),$$

et la comparaison de (1) et (2) nous prouve que

$$(V_a) = 2(Im).$$

En d'autres termes, le mouvement du point a est uniforme puisque Im est constant.

Le point c dont le mouvement a pour hodographe le cercle (H) est donc le milieu de ab, a décrivant une courbe quelconque (A) avec la vitesse constante 2R et b se déplaçant sur la droite (B) avec la vitesse constante $2.\overline{OI}$.

Pour obtenir le mouvement le plus général à hodographe elliptique, il suffit de remarquer que si l'on projette un mouvement sur un plan, la projection de l'hodographe est l'hodographe de la projection de ce mouvement.

Dans un plan Q, le mouvement le plus général à hodographe elliptique s'obtiendra donc en projetant sur ce plan, le mouvement le plus général à hodographe circulaire, situé dans un plan P quelconque.

Ce mouvement sera donc bien réalisé, en effectuant les opérations indiquées dans l'énoncé de cette question.

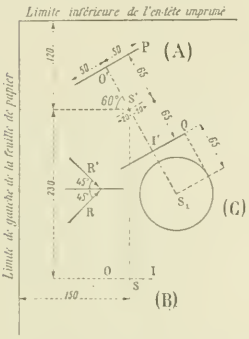
QUÉMÉNEUR, lycée de Rouen.

Bonnes solutions de MM. Ballif, lycée de Rouen ; Foucry, à Roanne ; M. Laurence ; G. Pélissier, à Toulouse.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

1511. *La droite de front,* OI, OT, *inclinée à* 60° (2/3 *d'angle droit) sur le plan horizontal, est l'axe commun d'un hyperboloïde de révolution et de son cône asymptote.*

Les surfaces sont limitées, toutes deux, par deux plans, P *et* Q, *perpendiculaires à leur axe et distants, chacun, de* 65 *millimètres du plan du cercle de gorge* S′ *(voir fig.* A).



Le rayon du cercle de gorge est de 20mm *et ceux des parallèles* P *et* Q *de l'hyperboloïde sont de* 50mm.

Pour la mise en place dans la feuille se rapporter aux cotes inscrites en millimètres sur le croquis ci-contre.

On demande :

1° *de représenter le solide (Sorte de Sablier) compris entre l'hyperboloïde et son cône asymptote; ces deux surfaces étant limitées, comme il est dit plus haut, par les plans* P *et* Q ;

2° *en supposant les rayons lumineux à* 45°, *c'est-à-dire parallèles à la direction* R, R′, *de chercher la séparatrice d'ombre propre de l'hyperboloïde ;*

3° *de déterminer l'ombre portée par le cercle supérieur de base du cône dans l'intérieur de ce dernier.*

On dessinera trois projections, savoir :

en (A) *la projection sur le plan vertical ordinaire ;*

en (B) *la projection sur le plan horizontal ordinaire;*

et en (C) *la projection sur un plan perpendiculaire à l'axe.*

Sur chacune d'elles la représentation sera complète.

Observations. — a) On pourra se contenter, pour les questions 1 *et* 2, *de déterminer les hyperboles par leurs asymptotes et un point.*

b) Pour la question 3, *on déterminera, sur chacune des trois projections* (A,) (B) *et* (C,) *un point courant m de l'ombre portée et la tangente t en ce point, les points remarquables...*

c) On emploiera : les traits pleins noirs, *pour représenter les parties vues ; les* points ronds noirs, *pour les parties cachées ; les* traits rouges, *pour les constructions. Les parties dans l'ombre seront couvertes de hachures.*

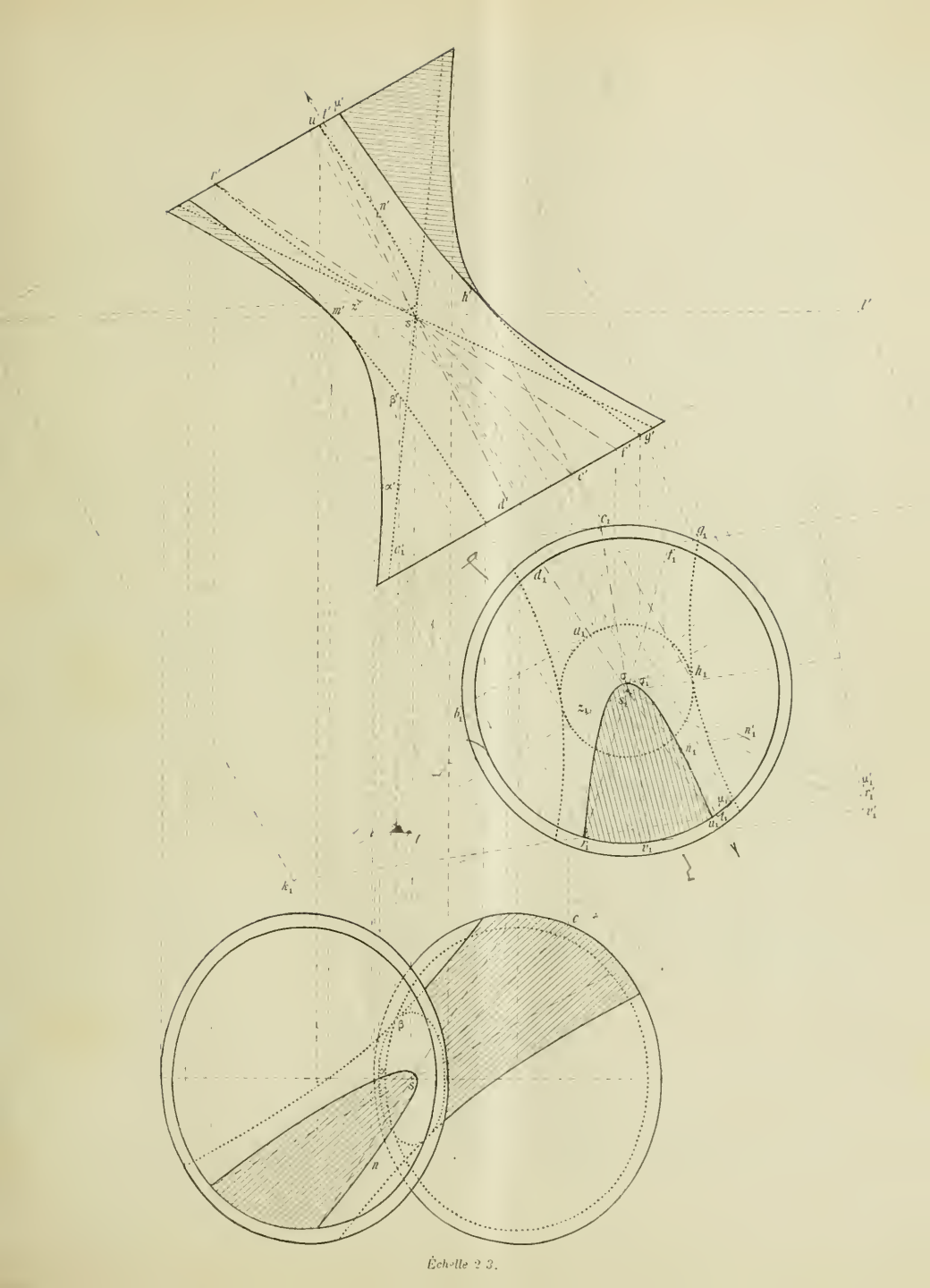
d) On peut, pour faciliter l'intelligence de l'épure, mettre quelques lettres.

(*Ecole Polytechnique, concours de 1906.*)

Nous projetterons d'abord la figure sur le plan vertical de l'axe commun des deux surfaces et sur le plan perpendiculaire à cet axe que nous prendrons pour plan horizontal auxiliaire.

I. — *Représentation du solide.* — Le contour apparent horizontal du solide compris entre les deux surfaces limitées par les plans P et Q se compose d'abord des deux parallèles supérieurs : on a le rayon de celui de l'hyperboloïde, et comme on connaît le cercle de gorge, on peut trouver immédiatement la section du cône asymptote par les plans P et Q, en menant une génératrice de front AB de l'hyperboloïde. Le cercle de gorge de l'hyperboloïde complète le contour apparent horizontal, mais il sera caché par la surface du cône. Le contour apparent vertical est formé d'abord par l'hyperbole méridienne limitée aux projections des deux parallèles P et Q. On la construit par points sans difficulté, puisqu'on a ses asymptotes en projetant verticalement les deux génératrices de front de l'hyperboloïde, et ses sommets aux extrémités du diamètre de front du cercle de gorge; ces asymptotes constituent une autre partie du contour apparent vertical relatif au cône asymptote et les projections verticales des deux parallèles P et Q complètent ce contour apparent.

II. — *Séparatrice d'ombre propre de l'hyperboloïde.* — C'est la courbe de contact du cylindre circonscrit à la surface parallèlement aux rayons lumineux. Nous cherchons d'abord la projection horizontale s_1c_1 de cette direction en partant des données $(sc, s'c')$; il suffit maintenant de construire la section de l'hyperboloïde par le plan diametral conjugué de la direction s_1c_1, $s'c'$. Comme la droite SC est extérieure au cône asymptote, son plan conjugué coupera l'hyperboloïde suivant une hyperbole dont les asymptotes seront les génératrices, section du cône asymptote par ce même plan. On sait d'ailleurs que la trace de ce plan sur le plan de base du cône est la polaire de la trace c_1 de la droite SC sur ce plan par rapport à cette base, soit d_1f_1; on en déduit les asymptotes $(s_1d_1, s'd')$ et $(s_1f_1, s'f')$ de l'hyperbole dont l'axe transverse est le diamètre horizontal s_1h_1 du cercle de gorge perpendiculaire à s_1c_1. — On peut donc la construire par points. On connaît de même, sur la projection verticale, les deux asymptotes et les projections verticales des points déjà déterminés en projection horizontale, soit sur



Échelle 2 3.

le plan du cercle de gorge en h_1, h' où la courbe touche ce cercle en projection horizontale, soit sur l'un des plans P ou Q, en g_1, g' par exemple. Pour mieux déterminer la projection verticale de la courbe, on peut construire les points où elle touche l'hyperbole méridienne ; ils sont à l'intersection de la droite de front KL du plan sécant avec cette méridienne, soit m' l'un d'eux.

III. — L'ombre portée par la base supérieure du cône à l'intérieur de ce cône est l'intersection de sa surface par celle du cylindre ayant ce même cercle pour base et dont les génératrices sont parallèles à SC. Ces deux surfaces, ayant déjà une section plane commune, se coupent suivant une seconde courbe plane ; or les plans tangents au cône le long des génératrices FSR et DSU étant parallèles à SC sont aussi tangents au cylindre puisqu'ils passent par les tangentes en R et U à leur base commune et contiennent la direction de ses génératrices. Donc les surfaces sont bitangentes aux points R et U où se croisent les génératrices de contact, et le plan de la seconde courbe plane coupe celui de la première suivant la droite RU. Ce plan doit d'ailleurs couper la droite SC en un point conjugué de la trace de cette droite sur le plan de base du cône par rapport au segment allant du point S à l'infini sur la direction CS. C'est donc le point C lui-même, symétrique de la trace considérée par rapport au point S. Le plan de la section étant ainsi déterminé, nous obtiendrons cette section en prenant une projection verticale auxiliaire du cône et du plan sécant, sur le plan vertical qui passe par la ligne de pente SC de celui-ci.

Le cône n'ayant aucune génératrice parallèle à la direction des génératrices du cylindre, la section est une ellipse de sommet σ'_1, σ, dont l'axe est en projection horizontale la droite σv_1 et dont un foyer est au point s_1. On en peut construire un point courant sur une génératrice arbitraire $s_1\mu_1$, $s_1\mu'_1$, soit n_1, n'_1, et on a la tangente en n_1 en joignant ce point à l'intersection t_1 de la tangente en μ_1 à la base du cône, avec la trace du plan sécant sur ce plan de base. On passe immédiatement de là à la projection verticale primitive par les constructions habituelles.

On aurait les tangentes en r_1 et u_1 à la courbe, en menant en chacun de ces points les tangentes au cercle, base commune aux deux surfaces, et construisant le quatrième rayon du faisceau harmonique défini par cette tangente et les génératrices du cône et du cylindre qui passent au point de contact.

On obtient les points où la projection verticale de la courbe touche le contour apparent du cône en prenant l'intersection de ces génératrices de contour apparent et de la ligne de front KL du plan sécant.

On peut maintenant construire la projection horizontale (B) par un simple changement de plan horizontal. Tout d'abord on a le contour apparent du solide en prenant les ellipses projections des deux parallèles P et Q dans les deux surfaces, et dont on a immédiatement les axes, puis l'ellipse section de l'hyperboloïde par le plan diamétral conjugué des cordes verticales. Ce plan est de bout et sa trace verticale $s'x'$ s'obtient en prenant le rayon conjugué de la verticale du point s par rapport aux asymptotes de la méridienne : on peut obtenir directement l'extrémité x' du diamètre correspondant en appliquant le théorème connu relatif aux segments déterminés par les asymptotes sur une direction constante menée par un point quelconque de la courbe. Ce point x' et son symétrique par rapport à s' font connaître les extrémités du petit axe de la projection horizontale de l'ellipse qui complète le contour apparent du solide, mais qui est cachée.

Le grand axe de cette ellipse est manifestement égal au diamètre du cercle de gorge. Cette ellipse touche l'hyperbole, projection horizontale de l'ombre propre aux points où son plan traverse cette courbe, soit β', β l'un d'eux.

On a la projection de l'ellipse, ombre du cercle, en faisant un changement de plan pour l'axe qui devient un diamètre, et pour les points qu'on a construits tels que (n, n').

Pour distinguer les parties vues et cachées, nous n'avons supposé opaque, comme semble l'indiquer l'énoncé, que le solide compris entre l'hyperboloïde et son cône asymptote, en sorte que l'on peut, en projection horizontale, apercevoir l'ombre portée par le cercle, base supérieure du cône. Si l'on supposait ce cercle opaque, l'ombre portée serait cachée sur les deux projections horizontales.

Assez bonne solution de M. Ch. Brignon.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1906)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

I. — Algèbre et Analyse.

5035. — Calculer les produits $\sqrt{2}-\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$ et $\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})$.

5036. — Vérifier l'identité $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$.

5037. — Sachant que l'on a $\dfrac{b-c}{y-z}+\dfrac{c-a}{z-x}+\dfrac{a-b}{x-y}=0$, calculer
$(b-c)(y-z)^2+(c-a)(z-x)^2+(a-b)(x-y)^2$.

5038. — Nombre de jeux différents qu'un joueur peut avoir à l'écarté. Nombre de jeux contenant deux atouts.

5039. — Nombre des diagonales d'un polygone de n côtés.

5040 — Soient n nombres positifs $a_1, a_2, \ldots a_n$. On considère la somme $=\sqrt{a_1}=\sqrt{a_2}=\ldots=\sqrt{a_n}$. Combien y a-t-il de quantités analogues ? Montrer que leur produit est rationnel.

5041. — On donne trois nombres a, b, c en progression arithmétique et trois nombres x, y, z en progression géométrique. Comparer les produits $x^b y^c z^a$ et $x^c y^a z^b$.

5042. — Mettre le polynome ax^2+bx+c sous la forme $p(x+\alpha)^2+q(x+\beta)^2$.

5043. — Calculer $S_n = a+2a^2+3a^3+\ldots+na^n$.

5044. — Calculer les déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ b^3 & 1 & b & b^2 \\ c^2 & c^3 & 1 & c \\ d & d^2 & d^3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -1 & x & x & x & \ldots \\ x & -1 & x & x & \ldots \\ x & x & -1 & x & \ldots \\ x & x & x & -1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} ax+by & a'x+b'y & a''x+b''y \\ ax'+by' & a'x'+b'y' & a''x'+b''y' \\ ax''+by''+c & a'x''+b'y''+c' & a''x''+b''y''+c'' \end{vmatrix}.$$

5045. — On considère le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 & 15 & 21 \\ 4 & 10 & 20 & 35 & 56 \\ 5 & 15 & 35 & 70 & 126 \\ 6 & 21 & 56 & 126 & 252 \end{vmatrix}$$

dans lequel un élément quelconque est égal à la somme de l'élément au dessus et de l'élément à gauche. Calculer ce déterminant.

5046. — Discuter le système

$$x = by+cz, \qquad y = cz+ax, \qquad z = ax+by.$$

5047 — Étudier les séries dont les termes généraux sont

$$\sin\frac{x}{a^n}, \quad \sin\frac{\pi}{n!}, \quad \sqrt{a+n^3}-\sqrt[3]{b+n+n^3}, \quad L(1+x^n), \quad a\sin\frac{1}{n}+bL\left(1+\frac{1}{n}\right), \quad \frac{\sin nx}{\cos^n x},$$

$$\frac{Ln}{n^2}, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}, \quad e^{\frac{1}{n}}-x-\frac{x}{n}, \quad 1-\cos\frac{1}{n}, \quad \frac{2^n}{x^{2^n}-1}, \quad \sqrt{n^2+1}-n, \quad \frac{n^n}{n!},$$

$$\sqrt[p]{n^p+1}-\sqrt[q]{n^q+1}, \qquad (-1)^n\sqrt{n}\left[L\frac{n+1}{n-1}\right]^x, \qquad (-1)^n n^2\left[L\frac{n+1}{n-1}\right]^x.$$

5048. — Sommes des séries

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots;$$

généraliser.

5049. — Calculer à $\dfrac{1}{10000}$ près les sommes des séries qui ont pour termes généraux $\dfrac{1}{n^n}$ et $\dfrac{1}{n^{n^n}}$.

5050. — Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres positifs croissants. On suppose que le quotient $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}$ a une limite pour n infini. Que peut-on dire de a_n ?

5051. — y étant une fonction de x, on pose $u=\dfrac{1}{\sqrt{y}}$, $v=uy$. Montrer que $\dfrac{u''}{u}=\dfrac{v''}{v}$.

5052. — Dérivée de $L(\cos x+i\sin x)$. En déduire la valeur exponentielle de $\cos x+i\sin x$.

5053. — Etudier les variations des fonctions :

$$\frac{x^3-2x}{x+1}, \quad x^2+p+\frac{q}{x}, \quad e^x Lx, \quad (x-1)e^{\frac{1}{x-2}}, \quad ex\left(\frac{1}{x}+Lx\right), \quad xe^{\frac{1}{x}}, \quad x^2e^{\frac{1}{1-x}},$$

$$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \quad \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}, \quad \frac{Lx}{x}, \quad \frac{\sin x}{\sin a}+\frac{\sin a}{\sin x}, \quad p^2\sin^2 x+\frac{q^2}{\sin^2 x}, \quad e^{\frac{Lx}{Lx-1}},$$

$$x^{\frac{1}{1-x}}, \quad \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}-1, \quad e^{\frac{1}{\cos x-\cos x}}, \quad (1+x)^{\frac{1}{x}}, \quad \left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

5054. — Déterminer a, b, c, d de façon que ax^3+bx^2+cx+d soit minimum pour $x=1$ et maximum pour $x=2$.

5055. — Dérivée de la fonction

$$f_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1+x & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1+x & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1+x & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

le déterminant ayant n lignes et n colonnes. En déduire l'expression de $f_n(x)$.

5056. — On donne $x = e^t$, $y = \cos t$; calculer $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

5057. — Soient m et n deux nombres positifs $(m > n)$. Soit m_1 leur moyenne arithmétique, n_1 leur moyenne géométrique; soit de même m_2 la moyenne arithmétique de m_1 et n_1, n_2 leur moyenne géométrique, ... etc. Montrer que m_p et n_p ont même limite.

5058. — Limites des fonctions suivantes:

$\sqrt[n]{n}$ pour n infini, $\quad m\left[\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m - e\right]$ pour m infini, $\quad xLx$ pour $x = 0$, $\quad x - \sqrt{x^2+2x-1}$ pour x infini,

$\dfrac{x - \sin x}{e^x - 1)^3}$ pour $x = 0$, $\quad \left(\cos\dfrac{x}{m} + x\sin\dfrac{x}{m}\right)^m$ pour m infini, $\quad (\cos x)^{Lx}$ pour $x = 0$,

$\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{1-\cos x}}$ pour $x = 0$, $\quad (x-1)e^{-\frac{1}{Lx}}$ pour $x = 1$, $\quad \left(\dfrac{e}{x-e}\right)^{\frac{1}{Lx-1}}$ pour $x = e$,

$\left(\dfrac{m+x}{m-y}\right)^m$ pour m infini, $\quad \left[\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^{\frac{1}{\sin x}}$ pour $x = 0$.

5059. — Développer en séries les fonctions suivantes:

$\operatorname{tg} x$, $\quad \dfrac{1}{1-x}$, $\quad \operatorname{arc\,tg} x$, $\quad L\dfrac{1+x}{1-x}$, $\quad \cos^3 x$, $\quad \arcsin x$, $\quad \arccos x$, $\quad \operatorname{ch} x$, $\quad \dfrac{1-2x}{1-2x+x^2}$, $\quad \dfrac{1}{1+x^2}$.

5060. — Calculer $\sin 1^G$ et $\operatorname{tg} 1^G$ au moyen du développement en séries.

5061. — Calculer à $\dfrac{1}{1000}$ près $\operatorname{sh}\dfrac{1}{10}$.

5062. — Si $x < 1$, on a $e^{2x} < \dfrac{1+x}{1-x}$.

5063. — Partie principale de $x^2 - \sin^3 x$.

5064. — Déterminer a, b, c, d de façon que l'expression

$$aL(1+x) + b\sin x + ce^x + d\cos x$$

soit de l'ordre infinitésimal le plus grand possible.

5065. — Former une équation différentielle vérifiée par la fonction

$$y = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

En déduire la valeur de y.

5066. — Exprimer $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$ en fonction de $\operatorname{th}\dfrac{x}{2}$.

5067. — Calculer $\operatorname{sh} a + \operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a+2b) + \dots + \operatorname{sh}[a+(n-1)b]$.

5068. — Connaissant le point M d'affixe z, construire le point M d'affixe z' tel que l'on ait $\dfrac{z-a}{z-b} = \dfrac{z-a'}{z'-b'}$, a, b, a', b' étant les affixes de points donnés.

5069. — Trouver un nombre imaginaire z vérifiant les équations: 1° $e^z = a + bi$; 2° $\cos z = a + bi$; 3° $\sin z = a + bi$; 4° $\operatorname{tg} z = a + bi$.

5070. — On considère la fonction $u = \sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)}$, où α, β, γ, z sont les affixes de points A, B, C, M. Comment varie l'argument de u, quand le point M décrit un contour fermé dans le plan?

5071. — Dérivée d'une fonction implicite. Application:

$$\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} - e^{x^2+y^2} - L(x^2+y^2) = 0.$$

5072. — Reconnaître que $\dfrac{y^2dx + x^2dy}{(x+y)^2}$ est une différentielle totale.

5073. — Soit une fonction z de deux variables indépendantes x et y. On pose $x+y = u$, $x-y = v$. Exprimer $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en fonction de $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial v}$. Déduire de là les fonctions z qui vérifient l'équation $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

5074. — On donne $u = f(x, y)$, $v = \varphi(x, y)$; on en tire $x = F(u, v)$, $y = \Phi(u, v)$. Calculer

$\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial v}$ en fonction de $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

5075. — Étudier les équations

$$x^3 - 7x + 5 = 0, \quad x^3 - (a+b)x + a^3 + b^3 = 0, \quad x^6 + 4x^3 - 5 = 0, \quad x^5 - 8x^2 + 2 = 0, \quad x - 1 = 0,$$

$$x^{12} - 1 = 0, \quad \sqrt[4]{a+x} + \sqrt[4]{a-x} = 1, \quad x^4 - 3x^2 - 6x\sqrt{2} - 6 = 0, \quad \sqrt{a+x} \pm \sqrt{a+b+x} \pm \sqrt{a+b+c+x} = 0,$$

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = 0, \quad nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \dots - x - 1 = 0, \quad (x-2)^{2n} - (x-1)^n - 1 = 0, \quad (x+1)^n - x^n = 0.$$

5076. — Étudier les équations :

$$\operatorname{tg} x - x = 0, \quad \mathrm{L}x = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}, \quad x \operatorname{tg} x = 1, \quad 2x - \operatorname{arc\,tg} x = 0,$$

$$\cos x + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x = 0, \quad x^2 + 2\cos x - 2 = 0, \quad x^3 - 3x + 6 - 6\cos x = 0,$$

$$x^4 - 12x^2 + 24 = 24\cos x, \quad e^x + \cos x - \sin x + 2 = 0, \quad ax + b - \sin x = 0,$$

$$e^{2x} = \frac{k+x}{k-x}, \quad \operatorname{sh} x = 1, \quad \operatorname{ch} x = \operatorname{ch} a.$$

5077. — Étudier les systèmes d'équations

$$\begin{cases} x + y = 10, \\ 3x = \log_{10} y, \end{cases} \quad \begin{cases} xy + ab = 2ax, \\ x^2y^2 + a^2b^2 = 2b^2x^2, \end{cases} \quad \begin{cases} x^y = y^x, \\ x^p = y^q, \end{cases}$$

$$a^2x + b^2y = ax^2 + by^2 = x^3 + y^3,$$

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ x^2 + y^2 = z^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8, \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 = y^2, \\ y^3 = z^2, \\ z^3 = x^2. \end{cases}$$

5078. — Déterminer α et β de façon que l'équation $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + \alpha x + \beta$ ait trois racines égales.

5079. — Soient a, b, c les racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$. Former l'équation qui a pour racines les expressions de la forme $y = (a-b)(a-c)$, ou $y = \dfrac{(a-b)(a-c)}{b+c}$.

5080. — Soient a, b, c les racines de l'équation $x^3 + 1 = 0$, former l'équation admettant pour racines

$$y = \frac{(a+b)(a+c}{(b-c)^2}.$$

5081. — Étant donnée une équation algébrique $f(x) = 0$ à coefficients entiers et les nombres positifs rationnels a, b, c. Montrer que si l'équation admet la racine $a + b\sqrt{c}$, elle admet aussi la racine $a - b\sqrt{c}$.

5082. — Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = b, \\ x^3 + y^3 + z^3 = c, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z + t = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = b, \\ x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = c, \\ x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = d. \end{cases}$$

Généraliser.

5083. — On donne l'équation $x^3 + x + \lambda = 0$, λ étant un nombre réel. Déterminer λ de façon que la valeur absolue de la racine réelle soit supérieure au module des racines imaginaires.

5084. — Étant donnée l'équation $x^3 + px + q = 0$ dont les racines sont a, b, c, former l'équation ayant pour racines $y = \dfrac{1}{(a-b)^2}$. Montrer que y correspond homographiquement à x.

5085. — Soient a, b, c les racines de l'équation $x^3 + 4x^2 - 1 = 0$. On considère les polynomes

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 1, \quad \varphi(x) = 4x^4 - 8x, \quad g(x) = 3x^2 - 1\ ;$$

calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi(c) \\ g(a) & g(b) & g(c) \end{vmatrix}.$$

5086. — Éliminer x entre $x^2 - 3x + 2 = 0$ et $x^4 + px^2 - 1 = 0$.

5087. — Étant donné l'équation $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, quelle relation doit-il exister entre les coefficients pour que le produit de deux racines soit égal à 1 ?

5088. — Résoudre une équation algébrique, sachant que les racines sont en progression arithmétique.

5089. — Soient $a, b, c, \dots l$ les racines de l'équation $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$. Former l'équation qui a pour racines $a + \dfrac{1}{a}$, $b + \dfrac{1}{b}$, $\dots$ $l + \dfrac{1}{l}$.

5090. — Soit l'équation $x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$ dont les racines sont a, b, c, d. Former l'équation qui a pour racines $2 - a^2$, $2 - b^2$, $2 - c^2$ et $2 - d^2$.

5091. — Trouver l'équation qui a pour racines les produits deux à deux des racines d'une équation du troisième degré.

5092. — Étant donné un polynome du troisième degré $f(x)$, trouver deux nombres x' et x tels que l'on ait $f(x') = x$ et $f(x) = x'$.

5093 — Étant donnée une équation du troisième degré, on demande quelle relation doit exister entre les coefficients pour que les racines α, β, γ vérifient la relation $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

5094 — Conditions pour que l'équation du cinquième degré ait une racine double et une racine triple.

5095 — Soient $a, b, c, \ldots$ les racines d'une équation algébrique $f(x) = 0$. Calculer $\Sigma \frac{1}{\lambda - a}$ et $\Sigma \frac{1}{(\lambda - a)^2}$, λ étant un nombre quelconque.

5096 — Éliminer x entre les équations $x^3 - ax + b = 0$ et $x^3 + px^2 + q = 0$.

5097 — Résoudre l'équation $x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0$, sachant que le rapport de deux racines est égal à -2.

5098 — Est-il toujours possible de mettre le polynome du quatrième degré $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ sous la forme $p(x + \alpha)^4 + q(x + \beta)^4$?

5099 — Résoudre l'équation $x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2 = 0$ sachant que le produit de deux racines est égal à -1.

5100 — Calculer les intégrales :

$$\int \frac{dx}{4 - x^2}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{(1 + x^2)^2}, \quad \int \frac{(x - \alpha)(x - \beta)}{(x - a)(x - b)}\, dx, \quad \int \frac{x^2 dx}{1 + x^4},$$

$$\int \frac{dx}{x^4 - x + 1} - \int \frac{dx}{x^2 + x + 1}, \quad \int \frac{dx}{x(1 + x^2)^2}, \quad \int \frac{x^2 dx}{x^3 - 1}, \quad \int \frac{(3 + x) dx}{(5 - x)^2}, \quad \int \frac{x^4 + 1}{x^3(x^2 + x + 1)}\, dx.$$

5101 — Trouver une fonction $f(x)$ telle que $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x + 1}{(x + 2)(x + 3)}$.

5102 — Condition pour que l'intégrale $\int \frac{(x - a)(x - b)}{(x - \alpha)^2(x - \beta)^2}\, dx$ soit algébrique. Même question pour $\int \frac{(x^2 + px + q) dx}{(x - 1)^2(x - 2)^2}$.

5103 — Calculer les intégrales

$$\int \frac{y^3 dy}{a^2 + \sqrt{a^4 - y^4}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}, \quad \int \sqrt{x^2 + x + 1}\, dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x - 2x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad \int \sqrt{x^2 - 1}\, dx, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 2x + 3}}, \quad \int \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}\, dx.$$

5104 — Calculer les intégrales :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^2} \quad \text{(le résultat est symétrique en } a \text{ et } b\text{)},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 x\, dx, \quad \int_0^{2\pi} \sin^4 x\, dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{lg}^4 \varphi\, d\varphi, \quad \int \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x}\, dx, \quad \int \frac{dx}{(1 + \cos x)^2},$$

$$\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi}, \quad \int \frac{\sin \varphi\, d\varphi}{1 + \cos^2 \varphi}, \quad \int_a^{a+2\pi} \cos px \cos qx\, dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{lg}^3 \varphi\, d\varphi,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi)^2}, \quad \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}, \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1 + \cos x + \cos 2x}, \quad \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x + \sin x},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}{p^2 \cos^2 \varphi + q^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi, \quad \int \frac{\sin^2 x\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}, \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{1 + \cos 2x + \cos 3x},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^n x}, \quad \int_0^{\pi} \sin m\theta \cos n\theta\, d\theta, \quad \int \frac{\sin x\, dx}{\cos 2x}, \quad \int \frac{(1 + \cos x)\, dx}{1 + \sin x},$$

$$\int \sin^n x\, dx, \quad \int \frac{dx}{\sin^n x}, \quad \int \frac{dx}{1 + \sin x}, \quad \int \frac{dx}{\sin x - \cos x}, \quad \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x}.$$

5105 — Calculer les intégrales :

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} a}, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} a}, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{th} x - \operatorname{th} a}, \quad \int \frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{ch} x - 1}\, dx, \quad \int \operatorname{th}^2 x\, dx,$$

$$\int \frac{dx}{1 + \operatorname{ch} x}, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x}, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad \int \operatorname{ch}^3 x\, dx.$$

5106 — Calculer les intégrales :

$$\int x^2 \sin^2 x\, dx, \quad \int \operatorname{L} x\, dx, \quad \int \frac{x \operatorname{L} x}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx, \quad \int (x^2 + px + q) \operatorname{L} x\, dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 \varphi\, d\varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi}},$$

$$\int \cos^{\frac{3}{2}} x\, dx, \quad \int \operatorname{arc\,cos} x\, dx, \quad \int x \operatorname{L} x\, dx, \quad \int \operatorname{L} \frac{1 - x}{1 + x}\, dx,$$

$$\int \operatorname{ch} x \cos x\, dx, \quad \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{\cos^2 \varphi + \sin \varphi + 2}}{\cos \varphi}\, d\varphi.$$

5107. — Discuter la convergence de la série dont le terme général est

$$u_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Même question pour la série

$$u_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx.$$

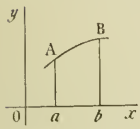
5108. Calculer l'aire comprise entre les deux courbes $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{tg}^2 x$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

5109. — Aire engendrée par la rotation autour de Ox de la courbe $8y^2 = x^2(1 - x^2)$.

5110. — Étant donnée la fonction implicite y définie par l'équation $x^3 + y^3 - 3xy = 0$, calculer $\int y dx$.

5111. — Valeur moyenne de $\sin x$ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, de $\frac{x^2}{x^4+1}$ entre 1 et 2.

5112. — On donne une courbe (C) et deux ordonnées variables Aa et Bb telles que ab soit constant. Positions du point A pour lesquelles l'aire $ABab$ est maximum ou minimum.



5113. — Un angle constant MON tourne autour de son sommet O et ses côtés rencontrent une courbe en M et N. Positions de l'angle pour lesquelles l'arc MN ou le secteur MON est maximum ou minimum.

5114. — La densité en un point M d'un rectangle (ou d'un cube) de centre O est proportionnelle à $\overline{OM}^2$. Calculer la masse totale du rectangle (ou du cube).

5115. — On donne un cercle et un point A sur la circonférence. On suppose qu'en chaque point M de l'intérieur du cercle la densité est proportionnelle : 1° à $\overline{MA}^2$; 2° à $\overline{MA}^3$; 3° à $\frac{1}{\overline{MA}^2}$. Calculer la masse du cercle dans ces trois cas.

5116. — Moment d'inertie : 1° d'un carré par rapport à l'un de ses sommets ; 2° d'un triangle rectangle par rapport au sommet de l'angle droit ; 3° d'un carré par rapport à une diagonale ; 4° d'un disque circulaire par rapport à l'un de ses points ; 5° d'un disque elliptique par rapport à son centre ; 6° d'un cylindre de révolution par rapport à une génératrice ; 7° du volume engendré par un cercle tournant autour d'une de ses tangentes par rapport à cette tangente.

5117. — Intégrer les équations différentielles :

$$(x - t)dx + xdt = 0, \qquad (1 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy - x\mathrm{L}(1 + x) + x - 1 = 0, \qquad \frac{dy}{dx}\sin x - y = \sin 2x - 2\sin x,$$

$$(1 + x)dy - (y + \mathrm{L}x)dx = 0, \qquad xdx + ydy - \frac{dy}{y} = 0, \qquad (x^2 + y^2)dy + (y^2 - x^2)dx = 0, \qquad y'^3 - 3yy' + y^3 = 0,$$

$$y'\sin x - y\cos x = \sin^2 x, \qquad y^2 - xyy' - x^2y'^2 = 0, \qquad y'^2 - 3xy' + 2x^2 + y' + x = 0,$$

$$\sqrt{1 + x^2}\,\frac{dy}{dx} + (1 + x^2)y + \frac{1}{x} = 0, \qquad y'x - y = \sqrt{x^2 - x - 1}.$$

5118. — Intégrer les équations différentielles :

$$y''y^3 = -1, \qquad y'' - 2y' + y = \cos^3 x, \qquad y'' + 4y = \cos 2x, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = a\sin t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = x, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 9x = \sin t, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^{2x},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + x = te^t, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + x = \sin\frac{t}{2}, \qquad y'' + y = 2x + \cos x, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x.$$

5119. — Trouver une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants dont le deuxième membre soit fonction linéaire de $\sin x$ et $\cos x$ et qui admette pour intégrale $\cos^3 x$. Intégrer cette équation et comparer son intégrale générale à $\cos^3 x$. Conséquences trigonométriques.

5120. — Intégrer l'équation $\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}}$. Montrer qu'il existe une relation algébrique entre x et y.

5121. — On considère l'équation différentielle

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + a^2y = 0 ;$$

on fait le changement de variable $x = \cos t$. Intégrer l'équation obtenue.

5122. — On considère l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2m}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

On pose $z = \frac{1}{x}\frac{dy}{dx}$; trouver l'équation qui lie z à x.

5123. — Trouver une série entière dont la somme vérifie l'équation différentielle

$$(x^2 - x)y'' + [(\alpha + \beta + 1)x - \gamma]y' + \alpha\beta y = 0.$$

5124. — On considère l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0.$$

On pose $x = e^t$, former l'équation différentielle entre y et t, puis on pose $y = e^t$, former l'équation différentielle entre x et t.

5125. — On a l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2}\frac{dy}{dx} - 2y = 0$: on pose $x = \cos t$. Trouver l'équation entre y et t.

5126. — On donne l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = xy$. Que devient cette équation si on prend y comme variable indépendante et x comme fonction de y ?

II. Trigonométrie.

5127. — Calculer $2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{7}$.

5128. — Déterminer $x = \sin 5a$, connaissant $\operatorname{tg} \frac{a}{3} = b$.

5129 — Calculer $\Sigma \cos(\pm a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n)$.

5130. — Déterminer l'angle x qui vérifie l'équation

$$2 \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,sin} 1 + \operatorname{arc\,sin} \frac{4}{5} + \operatorname{arc\,sin} \frac{3}{5}.$$

5131. — Calculer $4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}$.

5132. — Calculer $\sin \frac{\pi}{16}$ et $\cos \frac{\pi}{16}$.

5133. — Calculer $\sin \frac{a}{3}$ connaissant $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$, $\sin \frac{a}{5}$ connaissant $\cos \frac{a}{3}$.

5134. — Résoudre les équations : $\sin x + \cos x\sqrt{3} = 2$,

$$\cos^2 x - 3 \sin x + 6 = 0, \qquad \cos^3 x + 3 \cos^2 x - 6 \cos x + 1 = 0, \qquad \cos x + \sqrt{3} \sin x = 1,$$

$$\cos^3 x + 4 - 6 \cos x - 3 \sin^2 x = 0, \qquad \sin^2 x - 6 \cos x + 1 = 0, \qquad \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0,$$

$$20 \sin^3 x + 20 \sin^2 x - 51 \sin x + 18 = 0, \qquad \sin x \sin 2x = 2a, \qquad \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 5x = 0,$$

$$\cos 2x = \sqrt{2}(\cos^3 x + \sin^3 x - \sin x \cos^2 x - \cos x \sin^2 x), \qquad \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{3} + \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{4} = \operatorname{arc\,sin} x,$$

$$\operatorname{arc\,sin} \frac{4}{5} + \operatorname{arc\,sin} \frac{5}{13} = \operatorname{arc\,sin} x, \qquad \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} = a, \qquad \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = \sin x,$$

$$\frac{\sin^3 a}{\sin x} + \frac{\cos^3 a}{\cos x} = 1.$$

5135. — Résoudre les systèmes :

$$\begin{cases} x + y = a, \\ \sin x + \sin y = b; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \sin x = \cos y; \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a, \\ \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 2y = b; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos z + \cos(z + x) + \cos(z + y) = 0, \\ \sin z + \sin(z + x) + \sin(z + y) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \sin x + b \sin y = a, \\ a \cos x + b \cos y = b; \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1, \\ \operatorname{tg}(x + y) = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

5136. — Démontrer qu'entre les angles d'un triangle on a

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

5137. — Résoudre un triangle rectangle connaissant la bissectrice de l'angle droit et le rayon du cercle inscrit.

5138. — Résoudre un triangle connaissant : 1° les trois médianes ; 2° A, r, R ; 3° r_a, r_b, r_c.

5139. — Limite de $\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$ pour n infini.

5140 — Dans un quadrilatère OABM les angles A et B sont droits ; on donne $OA = a$, $OB = b$, $\widehat{AOB} = \theta$. Calculer l'aire de ce quadrilatère.

5141. — Quelle est la nature du triangle pour lequel on a :

$$1^\circ \quad \sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}; \qquad 2^\circ \quad \sin C = \cos A + \cos B?$$

5142. — Déterminer un triangle de façon que les côtés a, b, c et la surface S soient mesurés par quatre nombres entiers consécutifs.

5143. — Résoudre l'équation $2R \sin x + r \operatorname{cotg} \frac{x}{2} = p$, R désignant le rayon du cercle circonscrit à un triangle, r le rayon du cercle inscrit et p le demi-périmètre.

5144. — Soient α, β, γ les hauteurs d'un triangle : calculer r et R en fonction de α, β, γ.

5145. — Déterminer un triangle rectangle dont les côtés soient en progression arithmétique.

5146. — Exprimer en fonction des angles d'un triangle la quantité $\frac{2R + r - r_a}{2R}$, R désignant le rayon du cercle circonscrit, r celui du cercle inscrit, r_a celui du cercle exinscrit dans l'angle A.

5147. — Soit l'équation $x^3 + px + q = 0$, p et q étant des nombres complexes. Trouver la relation entre p et q pour que les points représentant les racines de cette équation soient les sommets d'un triangle équilatéral.

5148. — On donne l'équation $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, où p, q, r, s sont des nombres complexes. Quelles relations doit-il exister entre ces coefficients pour que les points-racines soient les sommets d'un carré ayant pour centre l'origine ?

5149. — Que devient la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, si le rayon de la sphère augmente indéfiniment ?

III. Géométrie analytique à deux dimensions.

5150. — Construire les courbes :

$$y^2 = \frac{a^2x^2}{a^2 - x^2} \text{ (aire)}, \qquad y = x^2 - 3x + 2 - \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 1}}, \qquad y = x - \sqrt{x},$$

$$y = \sqrt{x - \sqrt{x}}, \qquad y = \pm x\sqrt{\frac{a - x}{a + x}}, \qquad \left(y - \frac{1}{x^2}\right)(x - 2) = 3, \qquad y^2 = x^3 - x^2,$$

$$y = x + \sqrt{\frac{x^3 + 1}{x - 1}}, \qquad y = \frac{1}{x} - \frac{3}{(2x - 1)^2}, \qquad y = \frac{2}{x + 1} - \frac{3}{(x - 1)^2}, \qquad y = x^2 - 3x + \frac{1}{x},$$

$$y^4 = y^2 - x^2 \text{ (courbure)}, \qquad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \qquad y^5 = \frac{1}{x^3} \text{ (aire)},$$

$$y = \frac{x^3}{x^2 + x + 1} \text{ (tangente parallèle à l'asymptote)}, \qquad y = \frac{a}{x - b} - \frac{c}{x^2},$$

$$y = x^3 - 3x^2 + 5 \text{ (développée)}, \qquad y = \frac{a^2 - x^2}{2a \pm \sqrt{a^2 - x^2}}, \qquad y = x \lg \frac{1}{x}.$$

$$y = x\mathrm{L}x \text{ (courbure, aire)}, \qquad y = \mathrm{L}(1 - 2\cos x), \qquad y = xe^{\frac{1}{\mathrm{L}x}}$$

$$\mathrm{L}x\,\mathrm{L}y = k, \qquad y = e^{\alpha x}, \qquad y = x^2 \sin x, \qquad y = e^{-t^2} \sin x, \qquad y = e^{\frac{x-1}{x-1} \sin \pi x},$$

$$y = x^3\mathrm{L}x \text{ (aire, points d'inflexion)}, \qquad y = \frac{1}{\sin x}, \qquad y = \frac{\sin x}{x}, \qquad y = e^{2x^3 - 3x^2 - 1} \text{ (courbure)}.$$

$$y = (x - 2)e^{\frac{1}{x-1}}, \qquad y = (x - 1)e^{\frac{1}{x-3}}, \qquad y = \frac{x + 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-2}}, \qquad y = xe^{\frac{x-2}{x-1}}, \qquad y = e^x(x^2 + 4x + 1),$$

$$y = (x^2 - 1)e^{\frac{1}{x^2-4}}, \qquad y = x^2e^{-x} \text{ (arc, courbure)}, \qquad y = (x - 1)e^{\frac{1}{x^2-3x+1}}, \qquad y = xe^{\frac{1}{x-3}},$$

$$y = (x + 1)e^{\frac{x-1}{x-2}}, \qquad y = \mathrm{L}\sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}, \qquad y = (x - 1)e^{\frac{1}{x(x-2)}}, \qquad y = \frac{1}{a\cos x + b\sin x + c}.$$

5151. — Construire les courbes :

$$(x + y)^2(x - y) + 1 = 0, \qquad y^3 + y^2 + x^3 - mx = 0, \qquad x^4 + y^4 - a^2xy = 0 \text{ (aire)},$$

$$(x + y)^2x + (x + y)y - x = 0, \qquad x^3 - 3x^2y + xy - 3y^2 + x = 0, \qquad x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

$$(x^2 + y^2)^2 - x(ax + by) = 0, \qquad x^3 + y^3 - x^2 - y^2 - 1 = 0, \qquad x\sin y - y\sin x = 0, \qquad \sin 2y = \operatorname{th} 3x.$$

5152. — Construire les courbes

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\cos 2\varphi; \qquad x = \frac{\sqrt{1 + t^3}}{t}, \quad y = \frac{t + 1}{t}; \qquad x = \frac{t^2 + 1}{t}, \quad y = \frac{t^2 + 2t + 1}{t}; \qquad x = \frac{2t^2}{t^2 + 2t - 3}, \quad y = \frac{t^3 - 3t}{t^2 + 2t - 3};$$

$$x = \frac{1 - t}{1 - 4t^2}, \quad y = \frac{t^2}{(1 - 2t)(1 - t)}; \qquad x = \frac{2t^2}{t^3 - 1}, \quad y = \frac{2(t - 1)}{t^2 + t + 1}; \qquad x = \arcsin\frac{2(t^2 - 1)}{3t}, \quad y = \frac{t^2}{t - 2}; \qquad x = e^t, \quad y = e^{\frac{1}{t}}; \qquad x = \frac{\cos 2t}{\cos t}, \quad y = \operatorname{tg} t.$$

5153. — Construire les courbes :

$$\rho = \lg 2\omega, \qquad \rho = \frac{\sin\omega}{1 - \cos\omega}, \qquad \rho = \frac{a}{\lg\omega}, \qquad \rho = \frac{\lg\omega}{1 + \cos\omega}, \qquad \rho = a\cos 2\omega - b\cos\omega.$$

$$\rho = \frac{\cos\omega}{\cos 2\omega}, \qquad \rho = \frac{1 + \cos\omega}{1 - 2\cos\omega}, \qquad \rho = 2\cos 4\omega + 1, \qquad \rho = \frac{\cos 3\omega}{\sin\omega}, \qquad \rho = \frac{1}{1 - 2\sin\omega},$$

$$\rho = \frac{\cos\omega}{1 - \cos 2\omega}, \qquad \rho = \frac{\operatorname{tg}\omega}{1 - \sin\omega}, \qquad \rho = \frac{\cos\omega}{1 - \cos\omega}, \qquad \rho = \frac{\cos\omega}{1 - \sin\omega}, \qquad \rho = \frac{\cos\omega}{\sin\omega + \cos\omega}.$$

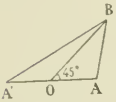
$$\rho = a + b\cos 3\omega, \qquad \rho = \frac{\lg\omega}{1+\sin\omega}, \qquad r = a\left(\frac{\cos 3\theta}{\cos\alpha} + \frac{\sin 3\theta}{\sin\alpha}\right), \qquad \rho = \frac{\cos\omega}{\sin\frac{\omega}{3}},$$

$$\rho = a\cos\frac{\omega}{2}, \qquad r = a\sqrt{4+\sin\frac{\theta}{2}}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{2+\cos 3\theta}{a}, \qquad \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{3}\cos\frac{\theta}{2},$$

$$\rho = \omega\lg\omega, \qquad r = \frac{a}{\cos\frac{\theta}{2}}, \qquad r = ae^{\sin\theta}, \qquad r^2 = a^2\cos^2 2\theta, \qquad \rho^2 = a^2\cos 2\omega,$$

$$\rho = \frac{\lg^2\frac{\omega}{2}}{1-\cos\omega}, \qquad r = a\sqrt[3]{\sin 3\theta}, \qquad r = \frac{2a^2\sin\theta\cos\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}, \qquad \rho = \omega\sin\omega, \qquad \rho^2 = \frac{a^2\omega}{a-\omega}.$$

5154. — Construire les longueurs $\sqrt{\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}}$, $\sqrt[4]{a^4-b^4}$, $a\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}$.



5155. — Montrer que pour construire $\sqrt[4]{a^4+b^4}$ on peut opérer de la manière suivante. Sur une droite AOA' on prend de part et d'autre du point O $OA = OA' = a$, puis sur une droite OB faisant 45° avec OA on prend $OB = b$. On joint AB, A'B. Démontrer que $\sqrt[4]{a^4+b^4} = \sqrt{AB.A'B}$.

5156. — On donne les faisceaux de droites

(D_1, D_2) $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$, (D'_1, D'_2) $A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 = 0$.

Conditions pour que D_1 et D_2 soient conjuguées harmoniques par rapport à D'_1, D'_2.

5157. — Rapport anharmonique de quatre points. Former l'équation du sixième degré qui admet pour racines ses six valeurs.

5158. — Etant donné les deux droites $2x + 3y = 1$ et $y = 5x$, trouver la condition pour qu'un point (x_0, y_0) soit dans l'angle obtus de ces deux droites.

5159. — On donne une circonférence de centre O et deux tangentes fixes T et T'. Une tangente variable rencontre T et T' aux points A et A'. Montrer que l'angle $\widehat{AOA'}$ est constant. Que devient cette propriété si l'on fait une projection conique ?

5160. — On donne un triangle ABC, un point M variable sur AB et un point P variable sur AC tels que $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}}$. Lieu du milieu de MP.

5161. — On donne deux cercles dont l'un O est intérieur à l'autre O'. Une tangente variable au cercle O' rencontre le cercle O aux points M et N. Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle MNO'.

5162. — Condition pour le faisceau $ax^4 + 2bx^2y^2 + cy^4 = 0$ soit harmonique.

5163. — Conditions pour que l'équation $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = 0$ représente trois droites faisant deux à deux des angles de 120°.

5164. — Couper deux faisceaux homographiques par une sécante telle que les deux faisceaux déterminent sur elle une involution.

5165. — On donne sur une droite Δ deux divisions en involution et un point A en dehors de la droite. On joint le point A à un point m quelconque de la droite, et du point homologue m' on abaisse une perpendiculaire sur Am. Lieu du pied de cette perpendiculaire.

5166. — Déterminer trois cercles ayant leurs centres en trois points donnés et tangents entre eux.

5167. — Calculer la longueur d'un arc de cercle connaissant la flèche et la corde.

5168. — Aire de la polaire d'un cercle par rapport à un point situé à l'intérieur du cercle.

5169. — Rectification d'un arc de parabole.

5170. — On considère la courbe $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, et un point M de cette courbe. Comment la courbe tourne-t-elle en ce point sa concavité par rapport à l'origine ?

5171. — Etant donnée la courbe $x(x-y)^2 - 2y(x-y) - mx = 0$, déterminer m de manière qu'une des asymptotes passe par le point $x = 1$, $y = 2$. Construire la courbe.

5172. — Asymptotes de la courbe $x(x+y)^2 - 4y(x+y) - 3x = 0$.

5173. — Rayon de courbure de la courbe $x = a\cos^3\varphi$, $y = b\sin^3\varphi$. Cosinus directeurs de la tangente. Arc de la courbe.

5174. — Calculer l'arc de la courbe $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$. Lieu du point obtenu en portant sur la tangente dans le sens des arcs décroissants une longueur égale à l'arc.

5175. — Centre de courbure en un point de la parabole.

5176. — Rayon de courbure, centre de courbure et développée de la courbe $y = \sin x$.

5177. — Sur la tangente en un point quelconque M d'une courbe on porte une longueur MP égale à une constante. Lieu du point P, tangente.

5178. — Trouver les points du plan des xy pour lesquels on a $\sqrt{x} + \sqrt{y} < 1$.

5179. — Par un point M d'une courbe plane, on mène une droite faisant avec la normale en M un angle constant, et on prend sur cette droite une longueur constante MP. Lieu du point P. Tangente en ce point.

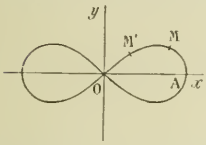
5180. — Equations paramétriques de la cycloïde. Aire. Longueur d'un arc. Courbure. Développée.

5181. — Rectifier la courbe $\rho = ae^{m\omega}$.

5182. — Sur la tangente en un point M d'une courbe plane on porte une longueur MA égale à une constante a, puis sur la normale au même point une longueur MB égale à une constante b. Trouver le point de contact de la droite AB et de son enveloppe.

5183. — Courbes parallèles.

5184. — Sur la tangente en un point d'une spirale logarithmique on porte une longueur égale au rayon de courbure. Déterminer l'aire d'un secteur de ce lieu.



5185. — On considère la lemniscate $\rho^2 = \cos 2\omega$, et deux points M et M' de cette courbe dont les angles polaires θ et θ' vérifient la relation $\cos\theta \cos\theta' = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Démontrer que arc AM = arc OM'.

5186. — On donne deux points fixes A et B et on demande le lieu des points M tels que $MA.MB = k^2$. Discuter.

5187. — A tout point $M(x, y)$ du plan on fait correspondre un point $M(X, Y)$ tel que l'on ait $X + iY = e^{x+iy}$. Montrer que cette transformation conserve les angles

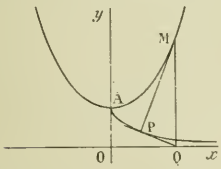
Même question pour la transformation $X + iY = (x + yi)^2$.

5188. — Evaluer l'aire comprise entre les deux courbes $y^2 - 2px = 0$, $ay^2 - x^3 = 0$.

5189 — Deux tiges d'égale longueur OA et AB sont articulées en A ; le point O est fixe et le point B se meut sur une droite fixe passant par le point O. Trouver le lieu d'un point de la droite AB.

5190. — On considère la cubique $(x^2 + y^2)(ax + by) + xy = 0$. Exprimer les coordonnées d'un point en fonction d'un paramètre. Relations entre les paramètres de trois points en ligne droite. En déduire les points d'inflexion. La tangente en un point M_1 rencontre la courbe en M_2, la tangente en M_2 rencontre la courbe en M_3,... ; limite de M_n.

5191. — Construire la courbe $\rho = a \sin^3 \frac{\omega}{3}$. Une droite passant par le pôle la rencontre en trois points. Montrer que les tangentes en ces points forment un triangle équilatéral.



5192. — On considère la courbe $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$. Trouver la tangente et le centre de courbure au point $x = 0$, $y = a_n$.

5193. — On considère la chainette $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, et soit $A(a, 0)$ son sommet. On porte sur la tangente en M une longueur MP égale à l'arc MA. Lieu du point P.

Montrer que la tangente en P est perpendiculaire à MP, et rencontre Ox au point Q, projection de M sur Ox. Démontrer que PQ est égal à a.

5194. — Inversement trouver toutes les courbes dont la tangente à une valeur constante.

5195. — On coupe la parabole $y^2 - 2px = 0$ par une parallèle à Oy qui la rencontre en M et M'. Trouver le moment d'inertie du segment OMM' par rapport à Ox et par rapport à Oy.

5196. — Trouver l'équation cartésienne de la courbe $\rho = a + b\cos\omega$. Intersection de cette courbe et d'un cercle passant par le point double. Pouvait-on prévoir le nombre des points de rencontre ?

5197. — Construire la courbe $(xy - x - y)^2 + 2xy = 0$. Montrer qu'elle est unicursale, et exprimer les coordonnées d'un point en fonction rationnelle d'un paramètre.

5198. — On donne une courbe C et sur cette courbe un point fixe M_0; sur la tangente en un point quelconque M et du côté du point M_0 on prend un point P tel que MP soit égal à l'arc M_0M. Coordonnées de P, tangente à la courbe décrite par P. Rayon de courbure.

5199. — Longueur du limaçon de Pascal.

5200. — Entre les coordonnées de deux points M et M_1 on a les relations $x_1 = ax + b$, $x_1^2 - y_1^2 = a(x^2 + y^2) + c$. Tangentes aux points correspondants. Lieu du point de rencontre des normales.

5201. — A tout point d'affixe z on fait correspondre un point d'affixe z' tel que $z' = \frac{1}{z}$. Montrer que c'est une inversion, suivie d'une symétrie. Construction du point z' connaissant le point z.

5202. — Aire comprise entre les deux paraboles $y^2 - 2px = 0$, $x^2 - 2py = 0$.

5203. — Quelle est la courbe représentée par les équations $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$? Interprétation géométrique de t.

5204. — On donne deux cercles égaux et tangents ; on considère un point variable M sur l'un d'eux, on prend la polaire de ce point par rapport à l'autre, et le point P où cette polaire rencontre la parallèle à la ligne des centres menée par le point M. Lieu du point P. Construire la courbe obtenue.

5205. — On suppose que les équations paramétriques d'une courbe $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$ renferment une variable λ. Comment aurait-on l'enveloppe des courbes obtenues en faisant varier λ ?

5206. — On considère une courbe en coordonnées polaires définie par les équations $\rho = f(s)$, $\omega = \varphi(s)$, s désignant

l'arc de la courbe. Les fonctions $f(s)$ et $\varphi(s)$ sont-elles arbitraires ? A chaque valeur de s correspond un point de la courbe M : on mène la tangente MT dans le sens des arcs croissants, et on considère sur OM la direction Oz, telle que $(Ox, Oz) = \omega$. Calculer le sinus et le cosinus de l'angle des deux directions Oz et MT.

5207. — Trouver une courbe qui coupe sous un angle constant les droites passant par un point fixe.

5208. — Trouver les courbes dans lesquelles le rayon de courbure est égal et de sens contraire à la normale.

5209. — Trajectoires orthogonales des cercles de rayon constant passant par un point fixe.

5210. — On considère un axe polaire Ox et deux courbes C et C'. Une droite passant par le point O rencontre ces courbes aux points M et M' ; on mène les tangentes en ces points, elles se coupent en un point P. Étant donnée la courbe C, peut-on déterminer la courbe C' de manière que le point P soit constamment sur Ox ?

5211. — Trouver une courbe telle que le produit du cube de la distance d'un point fixe à une tangente quelconque par le rayon de courbure du point de contact soit constant.

5212. — Trajectoires orthogonales des courbes $x^2 + y^2 = 1$, $\lambda x - y = \lambda e^{\frac{x}{y}}$.

5213. — Comment peut on déterminer une courbe connaissant une relation entre le rayon de courbure R et l'arc s, $R = f(s)$?

5214. — Trajectoires orthogonales des courbes $x^2 + y^2 - 2\lambda y + a^2 = 0$.

5215. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy et un point fixe A sur Oy. Trouver une courbe telle que la tangente en un point quelconque M rencontre Ox en un point P équidistant de M et de A (*).

5216. — On donne un cercle, et on demande de déterminer une courbe telle que la tangente en un point quelconque M rencontre le cercle en un point P, de manière que MP soit égal au rayon.

5217. — Déterminer une courbe telle que la portion de normale comprise entre le point d'incidence et Ox soit la moitié du rayon de courbure.

5218. — Trouver une courbe telle que l'arc s soit une fonction de x ou de y.

5219. — Trouver une courbe plane dont le rayon de courbure soit constant.

5220. — Soit M un point d'une courbe, P et Q les points où la tangente et la normale en M rencontrent la perpendiculaire menée par le point O à OM. Déterminer la courbe de façon que PQ soit constant.

5221. — Déterminer une courbe plane telle que si l'on désigne par C le centre de courbure en un point M quelconque, et O un point fixe du plan, l'angle $\widehat{COM}$ soit droit.

5222. — Trouver une courbe telle que si par un point M de cette courbe on mène une parallèle à Ox, et par le point O une parallèle à la tangente en M qui rencontre la première au point P, le milieu de MP décrive une courbe donnée.

5223. — Trajectoires orthogonales des paraboles ayant pour axe Ox et pour directrice Oy.

5224. — Trajectoires orthogonales d'une famille d'ellipses homothétiques et concentriques.

5225. — Déterminer une courbe telle que, M_0 étant un point fixe de cette courbe et M un point quelconque, l'arc M_0M soit proportionnel à l'aire du secteur OM_0M. O désignant un point fixe du plan.

5226. — Soit M un point quelconque d'une courbe, P sa projection sur Ox, N et T les points de rencontre avec Ox de la normale et de la tangente au point M. Déterminer la courbe de façon que l'on ait $\overline{PT}^2 + \overline{ON}^2 = \overline{OM}^2$.

5227. — Trouver les trajectoires orthogonales des courbes $\rho^2 = \lambda \frac{\omega}{\pi - \omega}$ (*).

5228. — On considère une courbe C et un point fixe O. On joint le point O à un point quelconque M de la courbe, et par le point O on mène une perpendiculaire à OM qui rencontre la normale en M au point P. Déterminer la courbe de façon que le centre de courbure en M soit le milieu de MP.

5229. — Trouver une courbe telle que la longueur du rayon vecteur soit égale à la longueur de la tangente.

5230. — Trouver les courbes pour lesquelles la normale et la tangente forment avec Ox un triangle d'aire constante.

5231. — Trouver les courbes dont le centre de courbure se projette sur Ox, au point de rencontre de cet axe et de la tangente.

5232. — Déterminer une courbe telle que la projection de la normale sur le rayon vecteur soit constante.

5233. — Trouver une courbe telle que la tangente et la normale en chaque point interceptent sur Ox un segment de valeur constante.

5234. — Trouver la courbe dont la normale a une longueur constante : quelles sont les trajectoires orthogonales des courbes trouvées ?

5235. — Trouver la courbe dont l'arc est proportionnel au rayon vecteur.

5236. — Quelles sont les courbes planes, dans lesquelles le rayon de courbure est double de la partie de normale comprise entre la courbe et Ox ?

5237. — Déterminer les courbes planes, dont les tangentes et les normales engendrent sur une droite une involution.

5238. — Trouver les courbes telles que le produit de la normale par la sous-normale ait une valeur constante.

5239. — Trouver une courbe telle que la projection du rayon vecteur sur la tangente soit proportionnelle à l'arc.

5240. — Trouver une courbe telle que le rayon de courbure soit égal au segment de la normale interceptè entre deux droites parallèles.

5241. — Trouver les courbes telles que l'angle de la tangente avec le rayon vecteur soit égal à $m\omega$.

(*) Voir *Leçons de Mathématiques spéciales*, tome VIII, page 576 ; tome IX, page 24.

5242. — Trouver les courbes telles que la longueur de la normale soit proportionnelle à l'abscisse du point de rencontre de la normale et de Ox.

5243. — Trajectoires orthogonales d'une famille d'ellipses semblables à une ellipse donnée, ayant pour axe Ox et passant par un point fixe de Oy.

5244. — Trouver les courbes telles que le segment déterminé sur Oy par la tangente et la normale en un point soit constant.

5245. — Déterminer une courbe telle que si on désigne par M un point quelconque de la courbe, C le centre de courbure en ce point, et O un point fixe du plan, l'angle de OC avec OM ait une valeur constante α.

5246. — La polaire d'un point M par rapport à une parabole rencontre la courbe en deux points A et B. Quel lieu doit décrire le point M pour que le cercle circonscrit au triangle MAB soit tangent à la parabole ?

(*A suivre.*)

CONCOURS DE 1906 (*Suite.*)

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques élémentaires (*).

1° Étant donné un triangle ABC ayant pour côtés $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, trouver dans le plan de ce triangle le lieu du point M tel que

$$\pm a.\overline{MA}^2 \pm b.\overline{MB}^2 \pm c.\overline{MC}^2 = a.b.c, \qquad (1)$$

en prenant toutes les combinaisons de signes possibles.

2° Le lieu correspondant à l'équation

$$b.\overline{MB}^2 + c.\overline{MC}^2 - a.\overline{MA}^2 = a.b.c$$

est un cercle S_A. On trouverait de même un cercle S_B et un cercle S_C. On considère tous les triangles ABC inscrits à un cercle donné et circonscrits à un deuxième cercle donné et intérieur au premier : Calculer la somme

$$\frac{1}{\rho_A^2} + \frac{1}{\rho_B^2} + \frac{1}{\rho_C^2},$$

ρ_A, ρ_B, ρ_C désignant les rayons des cercles S_A, S_B, S_C.

3° Calculer les puissances des sommets A, B, C et des centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle ABC par rapport au cercle S_A. Déterminer les points d'intersection de ce cercle S_A et des côtés du triangle ABC.

4° Si, les sommets B, C restant fixes, le rapport $\frac{AB}{AC}$ demeure invariable, le cercle S_A est orthogonal à un cercle fixe.

5° On donne le cercle S_A, le cercle exinscrit au triangle ABC et situé dans l'angle A, ainsi que le point de contact de ce cercle et du côté BC. Trouver l'enveloppe de la droite joignant les points de contact de ce cercle exinscrit et des côtés AB, AC.

6° Lieu du point M vérifiant l'une des équations (1) quand ce point n'est plus assujetti à rester dans le plan ABC.

Mathématiques spéciales.

1544. — 1° On considère la courbe dont l'équation est, en coordonnées rectangulaires,

$$(x^2 + y^2)^2 - ax(x^2 + y^2) - a^2y^2 = 0,$$

et on demande d'exprimer x et y en fonction rationnelle d'un paramètre, de construire la courbe et de trouver les relations qui lient les valeurs de ce paramètre correspondant à quatre points situés, soit sur un cercle ne passant pas par l'origine, soit sur une droite ne passant pas par l'origine.

2° Soient M_1 le point où le cercle osculateur en un point M rencontre de nouveau la courbe, M_2 le point où le cercle osculateur en M_1 rencontre de nouveau la courbe, etc.; démontrer que si quatre points M sont sur une droite D, les points M_1 correspondants sont en général sur un cercle, orthogonal à un cercle fixe si D varie. Si les points M_1 sont sur une droite D_1, les points M_2 sont sur une droite D_2, et ainsi de suite ; trouver la position limite des droites D, D_1, D_2...

(*) Des solutions étudiées de la question de Mathématiques élémentaires sont publiées dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*.

Si quatre points M sont sur un cercle C, les points M_1 correspondants sont, en général, sur un cercle C_1; démontrer que s'ils sont sur une droite il existe deux points fixes P et P′ d'où l'on voit sous un angle droit les segments déterminés sur ox par les cercles C. Dans le cas général, les points M_2 sont sur un cercle C_2, etc.; quelles conditions doit remplir le cercle C pour que les points M_p soient sur une droite? Dans l'hypothèse où tous les points obtenus successivement sont sur des cercles C_1, C_2..., trouver vers quelles limites tendent les puissances, par rapport à ces cercles, des points de la courbe situés sur ox; en déduire la limite de ces cercles.

3° Trouver le lieu d'un point A tel que quatre des points de contact des tangentes issues de ce point soient sur un cercle Γ; quel est le nombre des tangentes réelles menées de A?

Démontrer que le cercle Γ est orthogonal à un cercle fixe et trouver le lieu de son centre.

Composition sur l'analyse et ses applications géométriques.

1° Soient x, y, z les coordonnées cartésiennes d'un point quelconque d'une surface S; p et q les paramètres directeurs du plan tangent en ce point, définis par la relation identique

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0; \tag{1}$$

exprimer ces cinq quantités à l'aide de deux paramètres variables α et β, de manière à vérifier, outre la relation (1) les suivantes:

$$z - px - qy = \alpha, \tag{2}$$

$$y = \beta\alpha, \tag{3}$$

$$p + q\beta = u(\alpha, \beta), \tag{4}$$

$u(\alpha, \beta)$ étant une fonction donnée de α et de β.

Si l'on prend α et β comme variables indépendantes, il existe en général un système et un seul de cinq fonctions x, y, z, p, q satisfaisant aux conditions précédentes et on l'obtient sans aucun signe de quadrature.

Faire voir que la surface S ainsi obtenue, se réduit à une courbe si $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0$, et dans ce cas seulement.

Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface S dans le système de coordonnées curvilignes α, β. Montrer que les lignes $\alpha =$ const., $\beta =$ const. sont conjuguées sur S. Les développables circonscrites à la surface suivant les lignes $\alpha =$ const. sont des cônes. Quel est le lieu des sommets de ces cônes?

2° Pour que les développables circonscrites à S suivant les lignes $\beta =$ const. soient également des cônes, il faut et il suffit que la fonction u soit de la forme

$$u = AB + \alpha B_1 + B_2$$

où A est une fonction quelconque de α seule; B, B_1, B_2 trois fonctions quelconques de β seule.

Si l'on choisit de toutes les manières possibles la fonction A (les fonctions B, B_1, B_2 étant au contraire prises une fois pour toutes) la surface S ne cesse pas de vérifier une certaine équation linéaire aux dérivées partielles

$$Pp + Qq = R \tag{5}$$

où P, Q, R sont des fonctions de x, y, z. Quelles sont les caractéristiques de cette équation?

Le lieu des sommets des cônes circonscrits suivant les courbes $\beta =$ const. est le même pour toutes les surfaces intégrales de l'équation (5).

3° Comment doivent être choisies les fonctions B, B_1, B_2 pour que ce lieu soit une droite D (non située dans un même plan avec l'axe des z)?

Montrer qu'on peut alors, sans diminuer la généralité, ramener les fonctions B_1, B_2 à être des polynomes du premier degré en β.

Comment s'intégrerait l'équation des lignes asymptotiques des surfaces S ainsi obtenues?

Que trouverait-on en rapportant ces surfaces à de nouvelles coordonnées ayant pour axe des z la droite D?

Quelle relation ont-elles avec les surfaces analogues que l'on obtiendrait en faisant jouer à la droite D le rôle de l'axe des z primitifs, et à celui-ci le rôle de la droite D?

A quelle forme simple pourrait-on ramener l'équation de l'une de ces surfaces par une transformation homographique?

Mécanique rationnelle.

Un solide de révolution homogène S est mobile autour de son centre de gravité, que l'on suppose fixe dans l'espace. Ce centre de gravité est le sommet commun à deux trièdres, l'un $O\xi\eta\zeta$ fixe dans l'espace, l'autre $Oxyz$ lié au solide, Oz étant dirigé suivant l'axe de révolution.

Un point P, situé sur Oz, à une distance donnée d du point O, est soumis à une force perpendiculaire à l'axe $O\zeta$ et dirigée vers cet axe ; la valeur absolue de cette force est égale à $kM\rho$, k étant un coefficient constant, M la masse totale du solide S, ρ la distance du point P à $O\zeta$.

1° Former les équations différentielles qui servent à déterminer en fonction du temps les paramètres fixant la position du trièdre mobile.

2° Si l'on suppose que l'axe du solide S est d'abord placé perpendiculairement à $O\zeta$ et que l'on imprime au solide une rotation initiale autour de Oz, cette rotation persistera ensuite. Quelle valeur minimum peut-on attribuer à la vitesse angulaire de cette rotation pour qu'elle soit stable, c'est-à-dire telle que si l'on vient à troubler très peu le mouvement, l'axe Oz reste indéfiniment très voisin du plan $\xi O\zeta$?

3° En supposant que l'axe Oz est placé primitivement d'une manière donnée quelconque et que la composante suivant Oz de la rotation initiale est donnée différente de zéro, quelles doivent être les autres conditions initiales du mouvement pour que Oz tende, lorsque le temps croît indéfiniment, vers une position limite perpendiculaire à $O\zeta$? Dans le cas où ces conditions sont remplies, quelles sont les principales circonstances du mouvement ?

4° Etudier le mouvement dans le cas particulier suivant : le solide S est constitué par une tige rigide, de masse négligeable, dirigée suivant Oz, et par deux disques circulaires identiques ayant leurs centres sur Oz et leurs plans perpendiculaires à cet axe, à une distance du point O égale à $\frac{l}{\sqrt{2}}$. Pour chacun des disques, la masse, représentée par m, est supposée répartie uniformément sur une circonférence de rayon égal à l. Le point P est le centre de l'un des disques et le coefficient k est égal à 2. Les conditions du n° 3 sont remplies et la composante suivant Oz de la vitesse angulaire de la rotation initiale est égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Trouver le lieu de l'axe Oz du solide.

5° Les conditions du n° 3 étant remplies pour un solide de révolution S quelconque, on imprime à ce solide, à un certain moment, une percussion de grandeur donnée et de direction perpendiculaire au plan $zO\zeta$. Suivant quelle ligne d'action faut-il appliquer cette percussion pour que l'axe Oz dans le mouvement ultérieur tende vers une position limite perpendiculaire à $O\zeta$? Comparer le nouveau déplacement de l'axe Oz avec celui qui aurait eu lieu sans la percussion.

Nota. — La position du trièdre mobile par rapport au trièdre fixe sera déterminée par les angles d'Euler, θ, ψ, φ. Si A et C désignent les moments principaux d'inertie par rapport à Ox et Oz ; p, q, r les composantes de la rotation suivant Ox, Oy, Oz et $2T$ la force vive du solide, on rappelle les formules suivantes :

$$p = \psi' \sin\theta \sin\varphi + \theta' \cos\varphi,$$
$$q = \psi' \sin\theta \cos\varphi - \theta' \sin\varphi,$$
$$r = \psi' \cos\theta + \varphi',$$
$$2T = A(p^2 + q^2) + Cr^2 = A(\sin^2\theta\psi'^2 + \theta'^2) + C(\psi'\cos\theta + \varphi')^2.$$

QUESTIONS PROPOSÉES

1545. — On considère la droite variable Δ qui a pour équation par rapport à deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy,

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0,$$

p étant une fonction de α.

1° Déterminer cette fonction de α de façon que, si M est le point de contact de Δ avec son enveloppe Γ, l'angle de la droite Ox avec la droite OM soit égal à $\frac{3}{2}\alpha$. Calculer les coordonnées de M en fonction de α et montrer qu'on peut les exprimer rationnellement en fonction de $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Former l'équation polaire de Γ quand on prend O pour pôle et Ox pour axe polaire.

2° Construire la courbe Γ. Cette courbe présente une boucle, calculer la longueur de cette boucle et l'aire limitée par cette boucle.

3° On abaisse du point O la perpendiculaire OI sur Δ. Déterminer le lieu du point I. Montrer qu'il existe un rapport constant entre l'aire balayée par le rayon vecteur OI et l'arc décrit par le point de contact M de la droite Δ avec son enveloppe.

4° Une droite quelconque passant par l'origine, d'angle polaire θ par rapport à Ox, rencontre Γ en trois points M_1, M_2, M_3. Montrer que les tangentes aux points M_1, M_2, M_3 à Γ forment un triangle équilatéral admettant l'origine à son intérieur. Déterminer les coordonnées du centre C de ce triangle en fonction de θ et trouver le lieu de C, quand θ varie.

5° En un point M variable sur Γ on mène la droite Δ' perpendiculaire à OM. Déterminer l'enveloppe Γ' de Δ'. Calculer les coordonnées du point M' de contact de Δ' avec son enveloppe en fonction de α et montrer qu'on peut les exprimer rationnellement en fonction de $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Former l'équation polaire de Γ' quand on prend O pour pôle et Ox pour axe polaire. Construire cette courbe Γ'.

Ch. Michel.

1546. — 1° Équation générale des quadriques Q qui sont équilatères et qui contiennent deux droites fixes D et Δ.

2° Montrer que parmi les quadriques Q il y a quatre surfaces gauches de révolution. Calculer pour l'une d'elles la portion de surface comprise entre le cercle de gorge et l'un des parallèles de rayon triple. Construire les axes de ces surfaces gauches.

3° On considère les génératrices des quadriques Q, de même système que D et Δ qui passent par un point A. Prouver qu'elles restent dans un plan P.

4° Lieu du point A lorsque ce point est en ligne droite avec les deux points d'intersection du plan P et des droites D et Δ.

Th. L.

DEUXIÈME PARTIE

ANALYSE

1489. — *On considère la courbe représentée par l'équation*

$$\rho^2 = a^2\frac{\omega}{\pi - \omega}$$

1° *Construire cette courbe.*

2° *Calculer l'aire limitée par un arc et deux rayons vecteurs.*

3° *Cette aire étant recouverte d'une couche infiniment mince de matière pesante dont la densité est en chaque point inversement proportionnelle à la distance de ce point au pôle, calculer la masse totale de la couche.*

4° *Trouver les trajectoires orthogonales des courbes considérées en y faisant varier* a^2.

1. A toute valeur de ω comprise entre 0 et π l'équation

$$\rho^2 = a^2\frac{\omega}{\pi - \omega}$$

fait correspondre deux valeurs réelles de ρ égales et de signes contraires, donc la courbe est symétrique par rapport au pôle.

Quand ω croît de 0 à π, la valeur positive de ρ croît de 0 à $+\infty$; nous en déduisons la branche de courbe OABL qui est asymptote à Ox, car on a

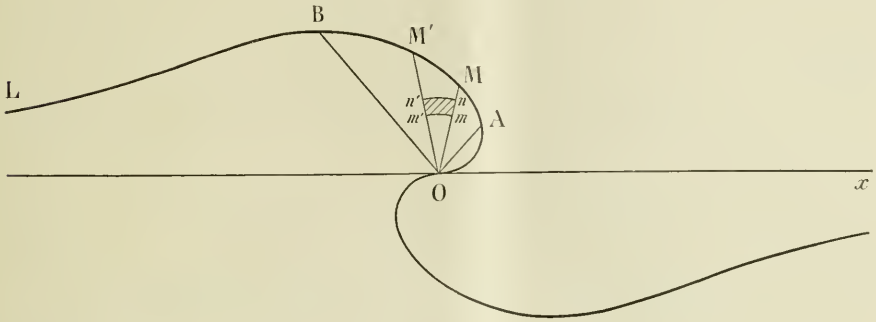
$$\rho \sin(\omega - \pi) = a \sin(\omega - \pi)\sqrt{\frac{\omega}{\pi - \omega}} = a\sqrt{\frac{\omega \sin^2(\pi - \omega)}{\pi - \omega}},$$

et comme $\frac{\sin(\pi - \omega)}{\pi - \omega}$ a pour limite 1 pour $\omega = \pi$, on voit que $\rho \sin(\omega - \pi)$ a pour limite zéro.

La courbe entière se compose donc de la branche OABL et de sa symétrique par rapport au point O.

2. Soit à déterminer l'aire du secteur OAB, α et β désignant les angles polaires des points A et B. Cette aire est égale à l'intégrale définie

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\omega, \qquad \text{ou} \qquad \frac{a^2}{2}\int_\alpha^\beta \frac{\omega d\omega}{\pi-\omega}.$$



Or, on a

$$\frac{\omega}{\pi-\omega} = \frac{\pi}{\pi-\omega} - 1,$$

et, par suite,

$$\int \frac{\omega d\omega}{\pi-\omega} = -\pi \mathrm{L}(\pi-\omega) - \omega,$$

d'où

$$\int_\alpha^\beta \frac{\omega d\omega}{\pi-\omega} = \pi \mathrm{L}\frac{\pi-\alpha}{\pi-\beta} + \alpha - \beta.$$

L'aire cherchée est donc égale à

$$\frac{a^2}{2}\left[\pi \mathrm{L}\frac{\pi-\alpha}{\pi-\beta} + \alpha - \beta\right].$$

3. Supposons maintenant que l'aire du secteur OAB soit recouverte d'une couche infiniment mince de matière pesante dont la densité en chaque point m est égale à $\frac{k}{\mathrm{O}m}$.

Considérons deux rayons vecteurs infiniment voisins OM et OM′, correspondant aux angles polaires ω et $\omega + d\omega$, et coupons-les par deux arcs de cercle mm' et nn' ayant pour centre le point O et pour rayons respectivement r et $r + dr$. Nous découpons ainsi une aire infiniment petite égale à

$$\frac{1}{2}(r+dr)^2 d\omega - \frac{1}{2} r^2 d\omega$$

ou, à $rdrd\omega$, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre.

La masse de cet élément est égale à $\frac{k}{r} rdrd\omega$, ou $kdrd\omega$, et, par suite, la masse du secteur OMM′ est $\int_0^\rho kdrd\omega$ ou $k\rho d\omega$. Il en résulte que la masse totale de la couche est égale à l'intégrale définie

$$\int_\alpha^\beta k\rho d\omega \qquad \text{ou} \qquad ka\int_\alpha^\beta \sqrt{\frac{\omega}{\pi-\omega}}\, d\omega.$$

Pour calculer l'intégrale indéfinie $\int \sqrt{\frac{\omega}{\pi-\omega}}\, d\omega$, posons $\sqrt{\frac{\omega}{\pi-\omega}} = t$, nous en tirons

$$\frac{\omega}{\pi-\omega} = t^2, \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{\pi t^2}{1+t^2};$$

par suite,
$$d\omega = \frac{2\pi t dt}{(1+t^2)^2}.$$

Donc,
$$\int \sqrt{\frac{\omega}{\pi-\omega}}\, d\omega = 2\pi \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2}.$$

Or
$$\frac{t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t^2)^2},$$

par suite,
$$\int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2} = \int \frac{dt}{1+t^2} - \int \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$
$$= \operatorname{arc\,tg} t - \frac{1}{2}\left[\frac{t}{1+t^2} + \operatorname{arc\,tg} t\right] = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,tg} t - \frac{t}{1+t^2}\right].$$

Remplaçons t par sa valeur $\sqrt{\frac{\omega}{\pi-\omega}}$, nous avons
$$\int \sqrt{\frac{\omega}{\pi-\omega}}\, d\omega = \pi\left[\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\omega}{\pi-\omega}} - \frac{\sqrt{\omega(\pi-\omega)}}{\pi}\right],$$
et la masse cherchée est égale à
$$\pi k a\left[\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\beta}{\pi-\beta}} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi-\alpha}} + \frac{\sqrt{\alpha(\pi-\alpha)} - \sqrt{\beta(\pi-\beta)}}{\pi}\right].$$

4. Cherchons d'abord l'équation différentielle des courbes $\rho^2 = a^2 \frac{\omega}{\pi-\omega}$.

En différentiant par rapport à ω on a $\quad 2\rho\rho' = \frac{a^2\pi}{(\pi-\omega)^2}$,

d'où, en éliminant a^2 entre ces deux équations, $\quad \frac{\rho}{2\rho'} = \frac{\omega(\pi-\omega)}{\pi}$.

Remplaçons ρ' par $-\frac{\rho^2}{\rho'}$, nous obtenons l'équation différentielle des trajectoires orthogonales ; nous avons ainsi
$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{2\omega(\omega-\pi)}{\pi}.$$

Il est alors facile d'intégrer, on a
$$L\rho = \frac{2\omega^3}{3\pi} - \omega^2 + LA, \qquad \rho = Ae^{\frac{2\omega^3}{3\pi} - \omega^2}.$$

La courbe représentée par cette équation est une spirale qu'il est aisé de construire.

Posons $z = \frac{2\omega^3}{3\pi} - \omega^2$, nous avons $\frac{dz}{d\omega} = \frac{2\omega(\omega-\pi)}{\pi}$, d'où nous déduisons les variations de z, et par suite celle de ρ (en supposant $A > 0$)

ω	$-\infty$		0		π		$\frac{3\pi}{2}$		$+\infty$
z	$-\infty$	croît	0	décroît	$-\frac{\pi^2}{3}$	croît	0	croît	$+\infty$
ρ	0	croît	A	décroît	$Ae^{-\frac{\pi^2}{3}}$	croît	A	croît	$+\infty$

L'origine est un point asymptote.

R. de FARIA.

Bonnes solutions par MM. G. Bresse, à Belfort ; P. Brizard, à Paris ; G. Foucay, à Roanne.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1471. — *Soient* MF, MF′ *deux rayons vecteurs variables d'une ellipse de foyers* F *et* F′. *La perpendiculaire élevée en* F *à* FM, *et la perpendiculaire élevée en* F′ *à* F′M *se rencontrent en* P, *et rencontrent la première,* F′M *en* Q′ *et la seconde,* FM *en* Q. *Construire les courbes* : 1° *lieu de* P ; 2° *lieux de* Q *et* Q′.

1. Supposons l'ellipse rapportée à ses axes et soient $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ les coordonnées du point M. La droite MF a pour coefficient angulaire $\dfrac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi - c}$, et par suite, la perpendiculaire élevée en F à MF a pour équation

$$y = \frac{c - a\cos\varphi}{b\sin\varphi}(x - c), \qquad \text{ou} \qquad (a\cos\varphi - c)x + by\sin\varphi - c(a\cos\varphi - c) = 0.$$

Nous en déduisons l'équation de la perpendiculaire élevée en F′ à MF′ en changeant c en $-c$, ce qui donne

$$(a\cos\varphi + c)x + by\sin\varphi + c(a\cos\varphi + c) = 0.$$

Ces deux équations peuvent s'écrire

$$ax\cos\varphi + by\sin\varphi + c^2 - c(x + a\cos\varphi) = 0. \qquad ax\cos\varphi + by\sin\varphi + c^2 + c(x + a\cos\varphi) = 0\,;$$

elles peuvent se remplacer par le système équivalent

$$ax\cos\varphi + by\sin\varphi + c^2 = 0, \qquad x + a\cos\varphi = 0.$$

Pour avoir le lieu du point P, il suffit d'éliminer φ entre ces deux équations. La seconde nous donne $\cos\varphi = -\dfrac{x}{a}$; remplaçons dans la première $\cos\varphi$ par cette valeur, nous avons

$$\sin\varphi = \frac{x^2 - c^2}{by},$$

et, en écrivant que $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, nous obtenons

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(x^2 - c^2)^2}{b^2y^2} = 1, \qquad \text{ou} \qquad b^2x^2y^2 + a^2(x^2 - c^2)^2 - a^2b^2y^2 = 0.$$

C'est l'équation d'une courbe du quatrième degré symétrique par rapport aux deux axes.

Pour la construire, nous résoudrons son équation par rapport à y^2 ; nous avons

$$y^2 = \frac{a^2(x^2 - c^2)^2}{b^2(a^2 - x^2)}.$$

A chaque valeur de x correspondent deux valeurs de y égales et de signes contraires, et par suite des branches de courbe symétriques par rapport à Ox : il suffira de construire l'une d'elles, par exemple, celle qui correspond à l'équation

$$(1) \qquad y = \frac{a(x^2 - c^2)}{b\sqrt{a^2 - x^2}},$$

le radical étant supposé précédé du signe $+$.

En changeant x en $-x$, y ne change pas, donc la branche de courbe définie par cette équation est symétrique par rapport à Oy, et on peut se borner à construire la portion de cette courbe qui correspond aux valeurs positives de x.

En résumé, nous discuterons la fonction (1) en donnant à x des valeurs positives ; nous tracerons la branche de courbe correspondante, et nous prendrons sa symétrique par rapport à Oy et par rapport à Ox.

La fonction (1) n'existe que si x est plus petit que a ; nous ferons varier x de 0 à a. La dérivée de y par rapport à x est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax(2a^2 - c^2 - x^2)}{b(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}\,;$$

elle est positive pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle $(0, a)$. On en déduit la variation de y

x	0		c		a
y	$-\frac{c^2}{b}$	croît	0	croît	$+\infty$

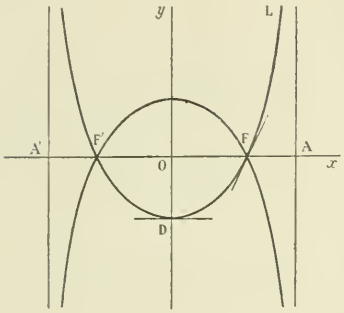


Fig. 1.

et la branche de courbe DFL qui passe par le foyer $(c, 0)$ et est asymptote à la droite $x = a$.

La tangente au point D $\left(0, \quad -\frac{c^2}{b}\right)$ est parallèle à Ox, et la tangente au point F a pour coefficient angulaire $\frac{2ac}{b^2}$.

En achevant par symétrie par rapport aux deux axes, on obtient la courbe représentée par la figure 1.

2. Nous allons chercher le lieu du point Q. Pour cela, transportons l'origine des coordonnées au point F; la droite MF a pour équation $y = \frac{b \sin \varphi}{a \cos \varphi - c} x$,

et la perpendiculaire F'Q à F'M $y = -\frac{a \cos \varphi + c}{b \sin \varphi}(x + 2c)$.

Pour avoir le lieu du point Q, il faut éliminer φ entre ces deux équations. Cette élimination, très facile, conduit à une équation du quatrième degré, dont la discussion est assez pénible.

Pour construire cette courbe, il sera plus simple de résoudre les deux équations précédentes par rapport à x et y, ce qui nous donnera les coordonnées d'un point de la courbe en fonction du paramètre φ.

Nous trouvons ainsi

$$x = \frac{2c(c^2 - a^2 \cos^2 \varphi)}{b^2 - c^2 \sin^2 \varphi}, \qquad y = \frac{-2bc \sin \varphi (c + a \cos \varphi)}{b^2 - c^2 \sin^2 \varphi}.$$

Il suffira de faire varier φ dans un intervalle dont l'étendue soit égale à 2π. Si l'on change φ en $-\varphi$, x ne change pas et y change de signe; la courbe est donc symétrique par rapport à Ox. Nous ferons varier φ de 0 à π, et nous prendrons la portion symétrique de la branche de courbe obtenue par rapport à Ox.

Remarquons que x et y deviennent infinis si $b^2 - c^2 \sin^2 \varphi = 0$, ou $\sin \varphi = \frac{b}{c}$.

Nous sommes donc conduits à distinguer plusieurs cas suivant que b est supérieur, inférieur ou égal à c.

Premier Cas. $b > c$. Dans ce cas, x et y sont continus quand φ varie de 0 à π.

Désignons par α l'angle aigu dont le cosinus est égal à $\frac{c}{a}$; les valeurs remarquables et les signes de x et de y sont indiqués dans le tableau suivant :

φ	0		α		$\frac{\pi}{2}$		$\pi - \alpha$		π
x	$-2c$	$-$	0	$+$	$\frac{2c^3}{b^2 - c^2}$	$+$	0	$-$	$-2c$
y	0	$-$		$-$	$-\frac{2bc^2}{b^2 - c^2}$	$-$	0	$+$	0

On en déduit la forme de la courbe (*fig.* 2).

Nous avons

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{2b^4c\sin 2\varphi}{(b^2 - c^2\sin^2\varphi)^2},$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{2bc[c^3\cos^3\varphi + a(c^2 - 2b^2)\cos^2\varphi - a^2c\cos\varphi + a(b^2 - c^2)]}{(b^2 - c^2\sin^2\varphi)^2},$$

et par suite le coefficient angulaire de la tangente en chaque point a pour valeur

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c^3\cos^3\varphi + a'c^2 - 2b^2)\cos^2\varphi - a^2c\cos\varphi + a(b^2 - c^2)}{b^2\sin 2\varphi}.$$

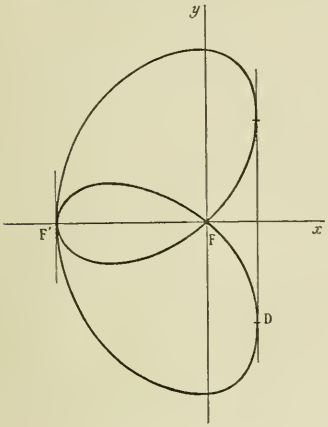


Fig. 2.

La tangente au point $F'(-2c, 0)$ est donc parallèle à Oy; il en est de même de la tangente au point D qui correspond à $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Deuxième cas. $b < c$. Soit β l'angle aigu qui a pour sinus $\frac{b}{c}$, x et y deviennent infinis pour $\varphi = \beta$ et $\varphi = \pi - \beta$. Si on désigne par α l'angle aigu dont le cosinus est égal à $\frac{c}{a}$, on a $\sin\alpha = \frac{b}{a}$, et par suite $\sin\alpha < \sin\beta$, $\alpha < \beta$.

On en déduit le tableau suivant :

φ	0		α		β		$\frac{\pi}{2}$		$\pi - \beta$		$\pi - \alpha$		π
x	$-2c$	$-$	0	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	$\frac{2c^3}{b^2 - c^2}$	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-2c$
y	0	$-$		$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$	$-\frac{2bc^2}{b^2 - c^2}$	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	0

Quand φ varie de 0 à β on obtient la branche infinie de courbe F'H, puis φ variant de β à $\pi - \beta$, on obtient l'arc de courbe LDK, puis enfin la branche MFF' correspondant aux valeurs de φ comprises entre $\pi - \beta$ et π (*fig.* 3).

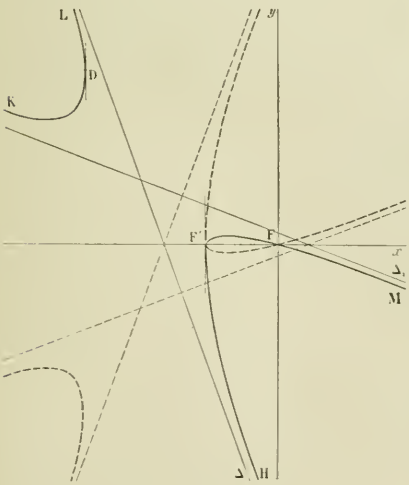


Fig. 3.

Cherchons maintenant les asymptotes. Considérons en premier lieu la branche F'H qui correspond aux valeurs de φ voisines de β.

Calculons la limite de $\frac{y}{x}$; nous avons

$$\frac{y}{x} = \frac{-b\sin\varphi}{c - a\cos\varphi},$$

par suite, pour $\varphi = \beta$

$$\lim\frac{y}{x} = -\frac{b\sin\beta}{c - a\cos\beta};$$

c'est le coefficient angulaire de la direction asymptotique. Il est négatif, car $\frac{c}{a} = \cos\alpha$, donc

$$c - a\cos\beta = a(\cos\alpha - \cos\beta),$$

et nous savons que α est plus petit que β.

Cherchons maintenant la limite de

$$y + \frac{b\sin\beta}{c - a\cos\beta}x.$$

Nous avons

$$y + \frac{b \sin\beta}{c - a\cos\beta}\, x = -\frac{2bc \sin\varphi(c + a\cos\varphi)}{b^2 - c^2\sin^2\varphi} + \frac{b\sin\beta}{c - a\cos\beta}\cdot\frac{2c(c_2 - a^2\cos^2\varphi)}{b^2 - c^2\sin^2\varphi}$$

$$= +\frac{2bc(c + a\cos\varphi)}{b^2 - c^2\sin^2\varphi}\left[-\sin\varphi + \frac{\sin\beta(c - a\cos\varphi)}{c - a\cos\beta}\right]$$

$$= \frac{2bc(c + a\cos\varphi)}{b^2 - c^2\sin^2\varphi}\cdot\frac{c(\sin\beta - \sin\varphi) - a\sin(\beta - \varphi)}{c - a\cos\beta}.$$

On peut écrire $b^2 - c^2\sin^2\varphi = c^2(\sin^2\beta - \sin^2\varphi) = c^2(\sin\beta - \sin\varphi)(\sin\beta + \sin\varphi)$, et par suite

$$y + \frac{b\sin\beta}{c - a\cos\beta}\, x = \frac{2b(c + a\cos\varphi)}{c(c - a\cos\beta)(\sin\beta + \sin\varphi)}\left[c - a\,\frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin\beta - \sin\varphi}\right].$$

Quand φ tend vers β, la quantité en dehors du crochet a pour limite $\dfrac{2b(c + a\cos\beta)}{2c(c - a\cos\beta)\sin\beta}$; quant au rapport $\dfrac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin\beta - \sin\varphi}$, on peut l'écrire $\dfrac{2\sin\dfrac{\beta - \varphi}{2}\cos\dfrac{\beta - \varphi}{2}}{2\sin\dfrac{\beta - \varphi}{2}\cos\dfrac{\beta + \varphi}{2}}$, ou $\dfrac{\cos\dfrac{\beta - \varphi}{2}}{\cos\dfrac{\beta + \varphi}{2}}$; il a pour limite $\dfrac{1}{\cos\beta}$.

Donc

$$\lim\left(y + \frac{b\sin\beta}{c - a\cos\beta}\, x\right) = \frac{b(c + a\cos\beta)(c\cos\beta - a)}{c(c - a\cos\beta)\sin\beta\cos\beta},$$

et par suite l'équation de l'asymptote est

$$y = -\frac{b\sin\beta}{c - a\cos\beta}\, x + \frac{b(c + a\cos\beta)(c\cos\beta - a)}{c(c - a\cos\beta)\sin\beta\cos\beta}.$$

C'est la droite Δ; son ordonnée à l'origine est négative.

Par une méthode analogue on obtient l'équation de la droite Δ_1, asymptote aux branches de courbes FM et KD,

$$y = -\frac{b\sin\beta}{c + a\cos\beta}\, x + \frac{b(c - a\cos\beta)(c\cos\beta + a)}{c(c + a\cos\beta)\sin\beta\cos\beta}.$$

Son coefficient angulaire est négatif, et moindre en valeur absolue que celui de Δ; son ordonnée à l'origine est positive.

Pour avoir toute la courbe, il faut construire la symétrique de la portion trouvée par rapport à Ox.

On peut remarquer que les asymptotes forment deux couples de droites rectangulaires.

Troisième cas. $b = c$. On a alors $b^2 = a^2 - b^2$ ou $2b = a^2$; les valeurs de x et de y se simplifient et deviennent

$$x = \frac{2b(1 - 2\cos^2\varphi)}{\cos^2\varphi}, \qquad y = \frac{-2b\sin\varphi(1 - \sqrt{2}\cos\varphi)}{\cos^2\varphi},$$

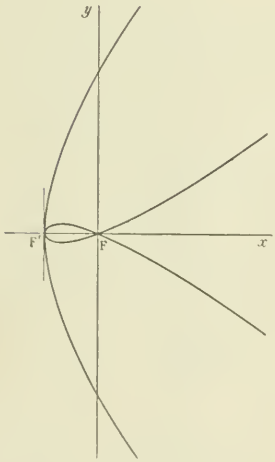


Fig. 4.

d'où le tableau

φ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
x	$-2b$	$-$	0	$+$	$+\infty$ | $+\infty$	$+$	0	$-$	$-2b$
y	0			$-$	$-\infty$ | $-\infty$	$-$	0	$+$	0

et la courbe (*fig.* 4).

On vérifie aisément que les branches infinies sont paraboliques dans les directions qui ont pour coefficients angulaires -1 et $+1$.

G. PÉLISSIER, à Toulouse.

1476. —*Étant donnée une cubique circulaire à point double, on joint un point* M *de cette courbe au point double,* O, *et on prend la symétrique,* Δ, *de cette droite par rapport à la parallèle à l'asymptote menée par le point* M.

Trouver l'enveloppe de cette droite lorsque le point M *décrit la cubique.*

Prenons pour origine le point double, et pour axe des x et des y une perpendiculaire et une parallèle à l'asymptote. Dans ces conditions, l'équation de la cubique est

$$x(x^2+y^2)+ax^2+bxy+cy^2=0.$$

Soit $ux+vy+w=0$ l'équation d'une droite Δ ; nous allons former l'équation de l'ensemble des droites joignant l'origine aux points de rencontre de la cubique et de la droite Δ, et nous écrirons que l'une de ces droites a pour coefficient angulaire $\frac{u}{v}$, c'est-à-dire celui de Δ changé de signe.

L'équation de l'ensemble des droites considérées est

$$wx(x^2+y^2)-(ux+vy)(ax^2+bxy+cy^2)=0\,;$$

pour que l'une de ces droites ait pour coefficient angulaire $\frac{u}{v}$, il faut que cette équation soit vérifiée pour $x=v$, $y=u$. Nous avons donc la condition

$$wv(v^2+u^2)-2uv(av^2+bvu+cu^2)=0,$$

ou, en divisant par v qui ne peut être nul,

$$w(u^2+v^2)-2u(av^2+buv+cu^2)=0.$$

C'est l'équation tangentielle de l'enveloppe : elle représente une hypocycloïde à trois rebroussements.

Solution géométrique. — On sait que toute cubique circulaire à point double peut être définie de la manière suivante :

On donne un cercle ω, un point O sur le cercle et une droite DD′ (*fig.* 1). Par le point O on mène une droite quelconque rencontrant le cercle au point A et la droite DD′ au point B ; sur cette droite OAB on prend un point M tel que le segment $\overline{OM}$ soit égal au segment $\overline{AB}$. Le lieu du point M est une cubique circulaire admettant le point O pour point double et la droite DD′ pour asymptote.

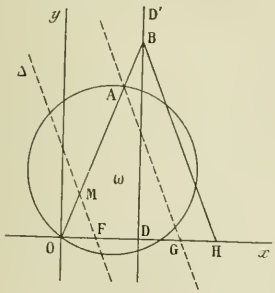


Fig. 1.

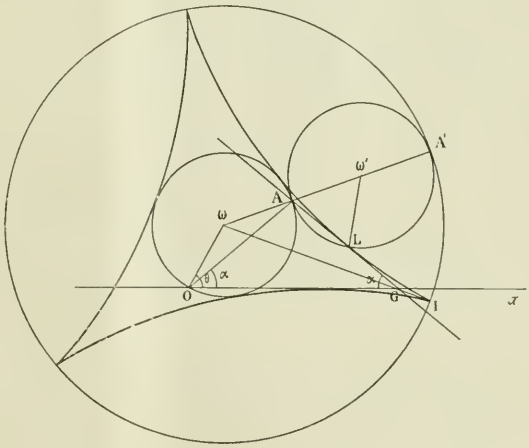


Fig. 2.

Soit BH la droite symétrique de OB par rapport à DD'. Menons par le point M une parallèle à BH, c'est la droite Δ dont nous cherchons l'enveloppe, soit F le point où elle rencontre Ox.

Si l'on mène AG parallèle à BH, les deux segments $\overline{OF}$ et $\overline{GH}$ sont égaux comme projections obliques des deux segments égaux $\overline{OM}$ et $\overline{AB}$. D'autre part, le point D est le milieu de OH ; il est donc aussi le milieu de FG, ce qui nous montre que les droites Δ et AG sont symétriques par rapport au point D.

Donc l'enveloppe de la droite Δ est symétrique par rapport au point D de l'enveloppe de la droite AG. Tout revient à chercher cette dernière enveloppe.

Pour cela, construisons un cercle ω' égal au cercle ω et tangent à celui-ci au point A ; le cercle ω' rencontre AG au point L (*fig.* 2).

Désignons par α les angles variables $\widehat{AOG}$ et $\widehat{AGO}$, et soit θ l'angle fixe $\widehat{\omega Ox}$.

Nous avons $\widehat{\omega OA} = \widehat{\omega AO} = \theta - \alpha$,

et comme $\widehat{OAG} = \pi - 2\alpha$, on en conclut $\omega'AL = 3\alpha - \theta$, et $\widehat{A'\omega'L} = 6\alpha - 2\theta$.

Considérons le cercle ayant pour centre ω et pour rayon $3\omega A$, il est tangent en A' au cercle ω'. Prenons sur ce cercle un arc A'I égal à l'arc A'L du cercle ω', je vais montrer que le point I est fixe, c'est-à-dire indépendant de α.

En effet, l'angle $\widehat{A'\omega I}$ est égal au tiers de l'angle $\widehat{A'\omega'L}$, soit à $2\alpha - \frac{2\theta}{3}$ Donc l'angle $\widehat{O\omega I} = \pi - \frac{4\theta}{3}$.

Par suite la droite ωI est fixe, il en est de même du point I.

Ceci nous montre que le point L décrit une hypocycloïde à trois rebroussements, tangente en L à la droite AG. Donc cette droite enveloppe l'hypocycloïde ainsi définie.

Et la droite Δ enveloppe l'hypocycloïde symétrique par rapport au point D.

Solution satisfaisante de M. Louis Sire, élève au lycée de Nancy.

QUESTIONS PROPOSÉES

1547. — On considère une parabole $y^2 - 2px = 0$ et un point $A(\alpha, \beta)$ de son plan.

1° Trouver la seconde parabole qui passe par les points de rencontre de la parabole donnée avec le cercle de rayon nul ayant pour centre le point A, et le lieu de ce point quand cette nouvelle parabole est tangente à une tangente à la première qui a pour coefficient angulaire m ;

2° Dans les mêmes conditions, trouver le lieu du point de rencontre des deux autres tangentes communes aux deux paraboles ;

3° Déterminer les cordes des contacts relatives à ces tangentes pour les deux paraboles et le lieu de leur point de rencontre quand le point A varie de la façon indiquée. E. H.

1548. — On considère deux tangentes rectangulaires à une ellipse MAA' et MBB', A et B étant les points de contact avec l'ellipse, A' et B' leurs points de rencontre avec le cercle de Monge ; démontrer que l'on a

$$\frac{MA}{MA'} = \frac{MB}{MB'}.$$

A. Sainte-Lagüe, élève de l'Ecole normale supérieure.

BIBLIOGRAPHIE

1° **Problèmes plaisants et délectables** qui se font par les nombres, par Claude-Gaspard Bachet, sieur de Méziriac, quatrième édition revue et simplifiée. — Paris, Gauthier-Villars.

Il est inutile d'insister sur l'intérêt que présente cet ouvrage universellement connu des Mathématiciens. Disons seulement qu'il est présenté actuellement en un joli petit volume broché facile à lire et à transporter avec soi.

2° **N.-H. Abel**, par Ch. Lucas de Pesloüan. — Paris, Gauthier-Villars.

Tous ceux qui s'intéressent aux Mathématiques tiendront à lire les pages émues et si vivantes que l'auteur a consacrées à la vie et aux travaux d'Abel.

Les actes principaux de la vie d'Abel, ses espoirs, ses enthousiasmes, ses travaux, sa fin cruelle et prématurée, tout cela nous est présenté avec beaucoup de clarté et de chaleur par un auteur qui connaît non seulement la vie du grand mathématicien, mais aussi tout le détail et toute la valeur de ses travaux. E. H.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

17e Année. N° 2. Novembre 1906.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

NOTE SUR LES ÉPICYCLOIDES ET LES HYPOCYCLOIDES

par M. **G. Cotty**, élève au lycée de Dijon.

Comme application des résultats que j'ai obtenus géométriquement dans un article précédent de la Revue (mai 1906) je me propose de démontrer le théorème suivant :

Lorsqu'un arc d'épicycloïde ou d'hypocycloïde roule sur une droite, le lieu des positions successives de ses centres de courbure aux points de contact avec la droite est une ellipse ; dans le cas de la cycloïde, c'est un cercle.

Rappelons d'abord ceci :

Soit ω le point de contact d'un arc d'épicycloïde ou d'hypocycloïde avec le cercle tangent à tous ces arcs, M un point de l'arc sur lequel se trouve ω, T le segment compris sur la tangente en M entre M et le cercle précédent, N le segment intercepté sur la normale en M par la courbe et le cercle de base, ρ le rayon de courbure en M. Nous avons les égalités suivantes :

Epicycloïde	*Cycloïde*	*Hypocycloïde*
$\rho = 2N\dfrac{R+r}{R+2r}$	$\rho = 2N$	$\rho = 2N\dfrac{R-r}{R-2r}$
$\text{arc}\,\omega M = 2T\dfrac{R+r}{R}$	$\text{arc}\,\omega M = 2T$	$\text{arc}\,\omega M = 2T\dfrac{R-r}{R}$.

Prenons comme axe des x la droite sur laquelle roule l'arc de courbe, pour axe des y, une perpendiculaire menée par le point Ω de l'axe des x, avec lequel ω vient coïncider pendant le roulement. Les coordonnées (x, y) du centre de courbure sont pour l'épicycloïde :

$$x = 2T\,\frac{R+r}{R}, \qquad y = 2N\,\frac{R+r}{R+2r}.$$

Eliminons N et T entre ces deux relations et $N^2 + T^2 = 4r^2$,
on a l'équation du lieu :

$$\frac{x^2}{\left[4r\dfrac{(R+r)}{R}\right]^2} + \frac{y^2}{\left[4r\dfrac{(R+r)}{R+2r}\right]^2} - 1 = 0,$$

ellipse dont les axes sont mis en évidence.

Pour l'hypocycloïde, il suffit de changer r en $-r$.

Pour la cycloïde, c'est le cercle :

$$x^2 + y^2 - 4r^2 = 0.$$

RAYON DE COURBURE D'UNE ROULETTE QUELCONQUE

par M. **G. Esteben**, à Bordeaux.

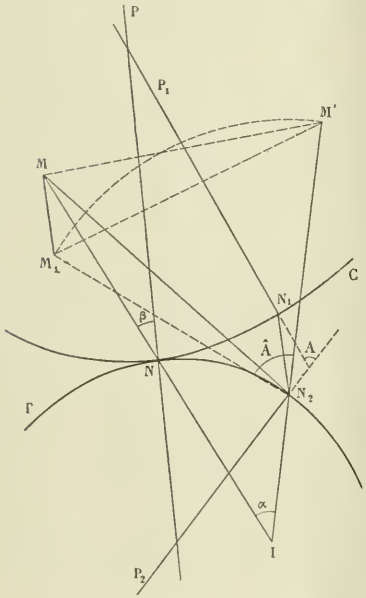
Dans le numéro du mois de mai, M. Cotty détermine géométriquement le rayon de courbure d'une hypocycloïde, on peut se proposer de trouver plus généralement le rayon de courbure d'une roulette quelconque.

Soit Γ la courbe fixe, C la position de la courbe mobile, le point de contact étant N.

Considérons le mouvement du point M entraîné avec la courbe mobile et cherchons à obtenir le point M′ infiniment voisin de M. Pour cela il faut faire mouvoir la courbe C de telle sorte qu'un point N_1, infiniment voisin de N, vienne se placer en N_2 tel que

$$NN_2 = NN_1$$

par un roulement de C sur Γ.



Or décomposons le mouvement de la courbe mobile, auquel participe le point M ; nous pouvons le remplacer par deux autres :

1° Une translation équipollente à N_1N_2 ;

2° Une rotation autour de N_2, telle que les normales N_2P_2 et N_1P_1 soient dans le prolongement l'une de l'autre.

Dans ce mouvement, la normale N_1P_1 a tourné d'un angle égal à celui des normales N_1P_1, N_2P_2, angle qui est bien évidemment égal à la somme des angles de N_2P_2 et de N_1P_1 avec la normale NP. Si donc nous appelons $\widehat{A}$ l'angle dont a tourné N_1P_1, ρ_1 et ρ_2 les rayons de courbure, aux points N_2 et N_1, de Γ et de C, nous aurons

$$\widehat{A} = NN_2\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right).$$

Qu'est devenu M′ infiniment voisin de M dans ce mouvement ? Pour le trouver, il suffit de faire subir au point M une translation MM_1 équipollente à N_1N_2 et de tracer un arc de cercle de N_2 comme centre, MN_2 comme rayon et d'un angle au centre égal à $\widehat{A}$.

La tangente au point M de la roulette est la limite de la position de MM′ ; or, comme MM_1 est un infiniment petit du second ordre, la limite de MM′ peut être remplacée par celle de $M'M_1$, qui est la tangente au cercle de centre N_2 et de rayon M_1N_2.

La normale sera alors bien certainement MN, de même, par analogie, en M′ elle sera $M'N_2$; le centre de courbure qui est à l'intersection de deux normales infiniment voisines se trouvera en I et l'on aura

$$R = \frac{MM'}{\alpha}.$$

Mais

$$MM' = MN_2 . NN_2\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right),$$

ou, en remplaçant MN_2 par MN, ce qui est permis puisque NN_2 est un infiniment petit,

$$MM' = MN . NN_2\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right).$$

D'autre part,

$$\alpha = \widehat{MN_2M'} - \widehat{N_2MN},$$

$$\alpha = NN_2\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) - \frac{NN_2 \cos\beta}{NM},$$

N_2MN étant l'angle sous lequel NN_2 est vu de M.

On a donc finalement la formule cherchée

$$R = \frac{MN\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} - \frac{\cos\beta}{NM}}.$$

Conséquences. — Cette formule permet d'établir les résultats relatifs aux rayons de courbure des épicycloïdes, hypocycloïdes et cycloïdes.

1° Supposons que la roulette soit engendrée par un point d'un cercle roulant sans glisser sur un autre cercle. Soient R_1, R_2 les rayons des cercles correspondant aux rayons désignés antérieurement par ρ_1 et ρ_2; si l'on remarque que $NM = 2R_1 \cos\beta$, on voit que

$$R = 2NM\frac{R_1 + R_2}{2R_1 + R_2}.$$

2° Si nous avons affaire à une cycloïde, le rayon du cercle fixe devenant infini, on a

$$R = 2NM,$$

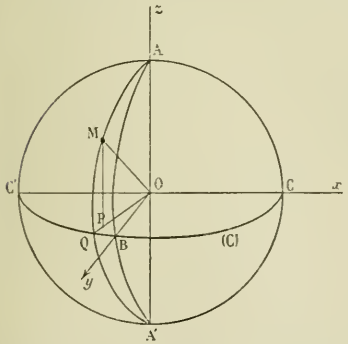
comme on le savait déjà.

CERTIFICAT D'ÉTUDES SUPÉRIEURES (*Caen, juillet 1905.*)

Éléments généraux de mathématiques.

1478. — *Sur une sphère donnée, on considère un grand cercle* (C), *de pôles* A, A'; *puis à chaque point* M *de la surface sphérique on fait correspondre :* 1° *sa projection* P *sur le plan du cercle* (C); 2° *l'intersection* Q *de ce cercle avec le demi-grand cercle* AMA'. *Déterminer les courbes sur lesquelles doit se mouvoir* M *pour que les arcs décrits par les points* P *et* Q *soient égaux. Trajectoires orthogonales de ces courbes. Rectification de l'une des trajectoires.*

Pour simplifier l'écriture, nous supposerons que le rayon de la sphère soit égal à 1.



Nous prendrons pour coordonnées du point M, sur la sphère, la longitude et la latitude, u et v. Soient Ox et Oy deux rayons rectangulaires du cercle (C) et Oz le diamètre de la sphère perpendiculaire au plan du cercle (C). Nous prendrons pour origine des longitudes le demi-cercle AxA', pour origine des latitudes le plan du cercle (C); la longitude sera positive quand elle sera comptée dans le sens xy et la latitude sera positive du côté de OA, négative du côté de OA'. La longitude peut varier de 0 à 2π (ou de $-\infty$ à $+\infty$) et la latitude de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$.

Posons alors arc CQ $= u$, arc QM $= v$; les coordonnées du point M seront

$$x = \cos u \cos v, \qquad y = \sin u \cos v, \qquad z = \sin v;$$

celles du point P sont fournies par les deux premières formules; et celles du point Q sont

$$x = \cos u, \qquad y = \sin u.$$

Cela posé, nous avons, pour le point P,

$$dx = -\sin u \cos v\, du - \cos u \sin v\, dv, \qquad dy = \cos u \cos v\, du - \sin u \sin v\, dv,$$

puis

$$ds^2 = \cos^2 v\, du^2 + \sin^2 v\, dv^2 ;$$

pour le point Q, nous avons évidemment $ds = du$; donc la condition imposée se traduit par

$$du^2 = \cos^2 v\, du^2 + \sin^2 v\, dv^2 ;$$

elle donne

$$du^2 = dv^2, \qquad du = \pm dv.$$

Prenons, par exemple, $dv = du$; nous avons $v = u + c$ et les lieux de M auront pour équations paramétriques

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \cos u \cos (u + c), \\ y &= \sin u \cos (u + c), \\ z &= \sin (u + c). \end{aligned} \right.$$

Chacune de ces lignes est l'intersection de la sphère par un cylindre de révolution parallèle à Oz,

$$(2) \qquad x^2 + y^2 = x \cos c - y \sin c.$$

Soient u et $v = u + c$ les coordonnées d'un point M de l'une de ces lignes. Nous allons chercher une fonction v de u, telle que la courbe correspondante passe au point M et y soit perpendiculaire à celle que nous envisageons.

Or les paramètres de la tangente à la ligne que nous envisageons sont

$$\begin{aligned} &-\sin u \cos v - \cos u \sin v, \\ &\cos u \cos v - \sin u \sin v, \qquad (v = u + c) \\ &\cos v \end{aligned}$$

et ceux de la ligne cherchée

$$\begin{aligned} dx &= -\sin u \cos v\, du - \cos u \sin v\, dv, \\ dy &= \cos u \cos v\, du - \sin u \sin v\, dv, \\ dz &= \cos v\, dv. \end{aligned}$$

La condition d'orthogonalité nous donne $\cos^2 v\, du + dv = 0$.

Par suite,

$$\frac{dv}{\cos^2 v} = -du, \qquad \text{puis} \qquad \operatorname{tg} v = c' - u.$$

Telle est la relation entre u et v, qui définit les trajectoires orthogonales des courbes (1).

Pour rectifier l'une d'elles, nous remarquerons qu'on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \qquad ds^2 = \cos^2 v\, du^2 + dv^2 ;$$

et, comme

$$du = -\frac{dv}{\cos^2 v}, \qquad \text{on a} \qquad ds^2 = dv^2 \left(1 + \frac{1}{\cos^2 v}\right) ;$$

donc finalement

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^2 v}}\, dv.$$

Pour calculer cette expression, nous poserons $\cos^2 v = t$; nous aurons alors

$$-2 \sin v \cos v\, dv = dt, \qquad \text{ou} \qquad dv = -\frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{1-t}}.$$

L'expression cherchée deviendra

$$s = -\int \frac{dt}{2t} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}, \qquad \text{ou} \qquad s = -\int \frac{dt}{2t} \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Cette intégrale se décompose en deux et donne la somme que voici :

$$s = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} ;$$

chacune de celles-ci s'intègre à vue et nous avons finalement

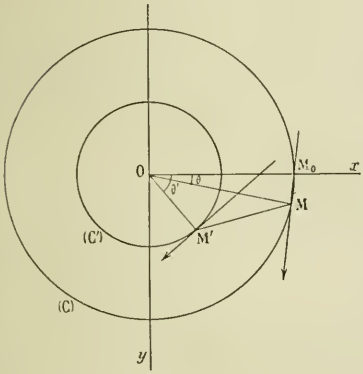
$$s = \frac{1}{2} \arccos t + \frac{1}{2} \mathrm{L}\left(\frac{1}{t} + \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}\right) + \mathrm{C},$$

puis, en revenant au paramètre v,

$$s = \frac{1}{2} \arccos . \cos^2 v + \frac{1}{2} \mathrm{L}\left(\frac{1}{\cos^2 v} + \sqrt{\frac{1}{\cos^4 v} - 1}\right) + \mathrm{C}.$$

1479. — *On donne deux cercles* (C), (C′) *de rayons* R *et* 1/2 R, *situés dans des plans parallèles et ayant leurs centres sur une perpendiculaire à ces plans. Un point* M, *de masse* 1, *assujetti à se mouvoir sur* (C) *et un point* M′, *de même masse, assujetti à se mouvoir sur* (C′), *s'attirent mutuellement avec une force égale à* μ^2MM′. *Déterminer le mouvement des deux points en supposant nulles leurs vitesses initiales; durée des très petites oscillations.*

Nous prendrons pour axe des x le rayon du premier cercle qui passe par la position initiale M_0 du point M, et pour axe des y le rayon perpendiculaire et nous envisagerons la projection de la figure sur le plan des xy. Tout se passe à ce point de vue comme si les points M et M′ étaient attirés naturellement l'un par l'autre et soumis à une force d'intensité μ^2MM′.



Soient θ l'angle de OM avec Ox, θ' l'angle de OM′ avec Ox. La force tangentielle qui agit sur le point M est égale à la projection de MM′ sur la tangente en M, multipliée par μ^2 ; la projection de MM′ est la même que celle du contour MOM′ ; c'est donc $\frac{R}{2} \sin(\theta' - \theta)$, en grandeur et en signe. L'équation du mouvement du point M est

$$\frac{dv}{dt} = \mu^2 \frac{R}{2} \sin(\theta' - \theta), \qquad \text{ou} \qquad 2\frac{d^2\theta}{dt^2} = \mu^2 \sin(\theta' - \theta).$$

Des calculs semblables relatifs au mouvement de M donnent

$$\frac{d^2\theta'}{dt^2} = 2\mu^2 \sin(\theta - \theta').$$

Nous déduisons de là

$$4\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d^2\theta'}{dt^2} = 0.$$

L'intégration de cette équation est immédiate et donne $4\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\theta'}{dt} = \mathrm{C}$,

et, comme les vitesses initiales sont nulles, nous avons $\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta'}{dt} = 0$ au temps $t = 0$; donc la constante c est nulle et, en intégrant de nouveau, nous avons

$$4\theta + \theta' = \mathrm{C}'.$$

Or, pour $t = 0$, θ est nul et θ' a une certaine valeur α ; nous avons donc finalement

$$4\theta + \theta' = \alpha.$$

Portons $\theta' = \alpha - 4\theta$ dans la première équation différentielle ; elle nous donnera

$$2\frac{d^2\theta}{dt^2} = \mu^2 \sin(\alpha - 5\theta).$$

Telle est l'équation qu'il faut intégrer pour avoir le mouvement du point M.

Posons $\alpha - 5\theta = u$; nous aurons $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{1}{5}\frac{d^2u}{dt^2}$, et l'équation deviendra

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{5\mu^2}{2}\sin u = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 \sin u = 0,$$

en désignant par ω^2 la constante positive $\frac{5\mu^2}{2}$.

Il est facile d'avoir une intégrale première de cette équation en multipliant les deux membres par $2\frac{du}{dt}$; mais on ne pourra pas achever l'intégration sans le secours des fonctions elliptiques. Bornons-nous alors à étudier les très petites oscillations.

Il suffit d'examiner un peu la question au point de vue mécanique pour voir que nous aurons de très petites oscillations en supposant simplement α très petit. Alors θ et θ' resteront très petits, et nous pourrons assimiler l'arc u à son sinus. L'équation différentielle devient alors

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u = 0 \qquad \text{et donne} \qquad u = \lambda \cos \omega t + \mu \sin \omega t.$$

Pour $t = 0$, $u = \alpha$ et $\frac{du}{dt} = 0$; donc $\lambda = \alpha$ et $\mu = 0$, et l'on a de suite

$$u = \alpha - 5\theta = \alpha \cos \omega t.$$

Le mouvement du point M est un mouvement vibratoire simple sur le cercle (C), dont l'amplitude est $\frac{\alpha}{5}$, et la durée, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, ou $T = \frac{2\pi}{\mu}\sqrt{\frac{2}{3}}$. La durée d'une oscillation simple est $\frac{T}{2}$.

ALGÈBRE ET ANALYSE

1480. — 1° *On considère la série entière en x*

$$1 + 2x + \cdots + (n^2 + 1)x^n + \cdots$$

Pour quelles valeurs de x cette série est-elle convergente ou divergente?

2° *Montrer qu'entre les coefficients de quatre termes consécutifs quelconques il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants.*

3° *La série étant supposée convergente, calculer sa somme et l'erreur commise quand on s'arrête au terme en x^n. — Calculer à $\frac{1}{1000}$ près la valeur numérique que prend cette somme pour $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.*

4° *Plus généralement, on considère la série entière en x la plus générale telle qu'entre les coefficients de quatre termes consécutifs quelconques il existe la relation linéaire et homogène trouvée au deuxième paragraphe. Déterminer l'expression du terme général de cette série.*

5° *Montrer que la somme de cette série, supposée convergente, constitue l'intégrale générale, supposée développable en série entière, d'une certaine équation linéaire du troisième ordre que l'on demande de former.*

1° Formons le rapport d'un terme au précédent

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2 + 2n + 2}{n^2 + 1}\, x.$$

Lorsque n grandit indéfiniment, ce rapport tend vers x. L'intervalle de convergence est $(-1, +1)$. La série diverge pour les valeurs limites, le terme général augmentant indéfiniment avec n.

2° Les coefficients de x^n, x^{n+1}, ..., étant des polynomes du second degré en n, entre quatre

consécutifs d'entre eux, il existe une relation linéaire et homogène : on l'obtiendra par la méthode des coefficients indéterminés, en annulant les coefficients de n^2 et de n et le terme indépendant de n. Soient α, β, γ, δ les quatre coefficients. On doit avoir

$$\alpha(n^2+1)+\beta[(n+1)^2+1]+\gamma[(n+2)^2+1]+\delta[(n+3)^2+1]\equiv 0,$$

ou

$$\left\{\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma+\delta&=0,\\ \beta+2\gamma+3\delta&=0,\\ \alpha+2\beta+5\gamma+10\delta&=0.\end{aligned}\right.$$

En résolvant ce système par la règle de Cramer, on trouve

$$\frac{\alpha}{1}=\frac{\beta}{-3}=\frac{\gamma}{3}=\frac{\delta}{-1}$$

et la relation cherchée, en désignant les coefficients de x^n, x^{n+1}, ..., par a_n, a_{n+1}, ..., est

$$a_n-3a_{n+1}+3a_{n+2}-a_{n+3}=0.$$

3° La série proposée est la somme des deux séries

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,\qquad x+2^2x^2+\cdots+n^2x^n+\cdots,$$

dans tout l'intervalle de convergence.

Posons $$f_{(n)}(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x};$$

on a successivement

$$\begin{aligned}f'_{(n)}(x)&=1+2x+\cdots+nx^{n-1};\\ xf'_{(n)}(x)&=x+2x^2+\cdots+nx^n;\\ xf''_{(n)}(x)+f'_{(n)}(x)&=1+2^2x+\cdots+n^2x^{n-1};\\ x^2f''_{(n)}(x)+xf'_{(n)}(x)&=x+2^2x^2+\cdots+n^2x^n.\end{aligned}$$

En désignant par S_n la somme des n premiers termes de la série, on a, par suite,

$$S_n=f_{(n)}(x)+xf'_{(n)}(x)+x^2f''_{(n)}(x).$$

Pour n infini ($|x|<1$), on a

$$f_{(\infty)}(x)=\frac{1}{1-x}\qquad\text{et}\qquad S=\frac{1}{1-x}+\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{2x^2}{(1-x)^3}=\frac{2x^2-x+1}{(1-x)^3}.$$

Posons $$f_{(\infty)}(x)-f_{(n)}(x)=\varphi_{(n)}(x)=\frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

On a l'expression de l'erreur commise en s'arrêtant au terme en x^n,

$$S-S_n=\varphi_{(n)}(x)+x\varphi'_{(n)}(x)+x^2\varphi''_{(n)}(x)=\frac{(n^2+2n+2)x^{n+1}-(2n^2+2n+1)x^{n+2}+(n^2+1)x^{n+3}}{(1-x)^3}.$$

Pour $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, on a $$S=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}+1}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}=\frac{4\sqrt{2}-2}{5\sqrt{2}-7}=26+18\sqrt{2},\quad S=51{,}455.$$

4° Soit $F(n)$ le coefficient de x^n dans la série cherchée. La relation

$$F(n)-3F(n+1)+3F(n+2)-F(n+3)\equiv 0$$

peut s'écrire

$$F(n)-2F(n+1)+F(n+2)\equiv F(n+1)-2F(n+2)+F(n+3).$$

Le premier membre est une fonction de n qui ne change pas de valeur quand on y change n en $n+1$. En d'autres termes, pour toutes les valeurs entières de n c'est une constante A. Or l'identité $F(n)-2F(n+1)+F(n+2)\equiv A$ peut s'écrire $F(n)-F(n+1)\equiv F(n+1)-F(n+2)+A$.

Le premier membre est une fonction de n qui, lorsqu'on change n en $n+1$, se trouve diminuée d'une quantité constante A. Il est de la forme, quel que soit le nombre entier n,

$$F(n) - F(n+1) \equiv B - An.$$

Enfin cela s'écrit
$$F(n+1) \equiv An - B + F(n).$$

On a de même

$$F(n) \equiv A(n-1) - B + F(n-1),$$
$$F(n-1) \equiv A(n-2) - B + F(n-2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F(2) \equiv A - B + F(1),$$
$$F(1) \equiv -B + F(0) \equiv -B + C,$$

C étant une nouvelle constante arbitraire.

En sommant toutes ces identités il vient

$$F(n) = A\frac{n(n-1)}{2} - Bn + C = \frac{A}{2}n^2 - \left(\frac{A}{2} + B\right)n + C.$$

Le coefficient de x^n est le trinome le plus général du second degré en n, $an^2 + bn + c$.

5° La somme de cette nouvelle série dans tout l'intervalle de convergence, $(-1, +1)$, a pour expression

$$\Sigma = a[x + 2^2x^2 + \cdots + n^2x^n + \cdots] + b[x + 2x^2 + \cdots + nx^n + \cdots] + c[1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots].$$

En utilisant la notation de la troisième partie on a donc

$$\Sigma = cf\left(\frac{x}{x}\right) + (a+b)xf'\left(\frac{x}{x}\right) + ax^2f''\left(\frac{x}{x}\right).$$

D'ailleurs $f\left(\frac{x}{x}\right) = \frac{1}{1-x}$. Nous avons donc

$$\Sigma = \frac{c}{1-x} + \frac{(a+b)x}{(1-x)^2} + \frac{2ax^2}{(1-x)^3}, \qquad \text{ou} \qquad \Sigma = \frac{(a-b+c)x^2 + (a+b-2c)x + c}{(1-x)^3} = y.$$

Cette fonction y est l'intégrale générale d'une équation linéaire du troisième ordre que nous allons former.

Nous avons
$$y(1-x)^3 = (a-b+c)x^2 + (a+b-2c)x + c,$$

puis, en dérivant, successivement

$$y'(1-x)^3 - 3y(1-x)^2 = 2(a-b+c)x + a + b - 2c,$$
$$y''(1-x)^3 - 6y'(1-x)^2 + 6y(1-x) = 2(a-b+c),$$
$$y'''(1-x)^3 - 9y''(1-x)^2 + 18y'(1-x) - 6y = 0.$$

Cette dernière égalité est l'équation demandée. La solution que nous en connaissons,

$$y = \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{(1-x)^3},$$

contenant trois constantes arbitraires α, β, γ, en est l'intégrale générale.

PARROD et Z.

Très bonnes solutions de M. Langlamet, et de M. Francillon.
M. Francillon a traité une question beaucoup plus générale dont il a tiré celle-ci comme cas particulier.
Assez bonnes solutions : MM. Laurence, Quémeneur, lycée de Rouen.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1906)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*fin*)

5247. — Si deux coniques sont bitangentes, les rayons de courbure aux points de contact forment une proportion. (*)

5248. — Soient P et Q les projections d'un point M sur les diamètres conjugués égaux d'une ellipse. Démontrer que la médiane MR du triangle MPQ est perpendiculaire à la polaire du point M. Cas où le point M est sur l'ellipse. (*)

5249. — Lieu des pôles des normales à la parabole.

5250. — Lieu des sommets des angles de grandeur donnée circonscrits à une parabole.

5251. — Par un point quelconque ω on mène des parallèles à deux directions fixes qui rencontrent une conique en des points A, B et C, D. Démontrer que le rapport $\dfrac{\overline{\omega A}\cdot\overline{\omega B}}{\overline{\omega C}\cdot\overline{\omega D}}$ est constant, quel que soit ω.

5252. — Lieu des centres des coniques d'un faisceau ponctuel ou tangentiel.

5253. — On considère un diamètre variable d'une ellipse, à l'une des extrémités on mène la tangente, à l'autre la normale. Lieu du point de rencontre de ces deux droites.

5254. — Le produit du rayon de courbure en un point d'une ellipse par le cube de la distance du centre à la tangente correspondante est constant.

5255. — Soit AB un diamètre d'une hyperbole équilatère. La normale en A rencontre la courbe au point M. Montrer que l'angle ABM est droit.

5256. — On donne une conique et deux points O et O'. On joint ces deux points à un point variable A de la conique ; les droites obtenues rencontrent la conique en M et M'. La correspondance ainsi obtenue est homographique. Peut-elle être involutive ?

5257. — On donne une parabole et un point A. Par ce point on mène une sécante rencontrant la courbe aux points B et C, et sur cette droite on prend un point M tel que $\overline{AM}^2 = \overline{AB}.\overline{AC}$. Lieu du point M.

5258. — La tangente et la normale en un point M de l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$ rencontrent Oy aux points T et N. Trouver les points de rencontre de Ox et du cercle circonscrit au triangle MNT.

5259. — Une tangente variable à une ellipse rencontre les axes de la courbe en A et B. Sur AB on construit un triangle équilatéral ; lieu du troisième sommet.

5260. — On considère l'ellipse définie par les équations $x=\dfrac{a}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$, $y=\dfrac{b}{2i}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$. Relations entre les t de quatre points situés sur un cercle. En déduire le cercle osculateur.

5261. — On considère une ellipse et le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre. Soit mm' un diamètre quelconque de l'ellipse et MM' le diamètre correspondant du cercle. Mm et $M'm'$ étant parallèles au petit axe. Par l'un des foyers on mène une corde cc' du cercle parallèle à MM'. Démontrer que $cc' = mm'$.

5262. — Équation générale des ellipses ayant pour tangentes au sommet les axes de coordonnées et tangentes à un cercle fixe ayant pour centre l'origine.

5263. — On donne une conique et une droite Δ, base de deux divisions en involution. Par deux points homologues, on mène des tangentes à la conique, lieu des points de rencontre. Cas où Δ est tangente à la conique. Transformer la question par polaires réciproques.

5264. — Soit M un point d'une ellipse de centre O, on abaisse OP perpendiculaire sur la tangente au point M, et on mène le diamètre OA parallèle à la tangente. Démontrer que le rayon de courbure au point M est égal à $\dfrac{\overline{OA}^2}{OP}$.

5265. — Étudier la conique $x^2+4xy-3y^2-24x-36y-141=0$. Centre et axes.

5266. — Foyers de la conique $2xy+4x-1=0$.

5267. — Trouver les asymptotes de la conique $2x^2-4xy+6y^2+6x+2y-1=0$.

5268. — On considère le cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes à une parabole. Une des tangentes reste fixe, les deux autres se rapprochent indéfiniment de la première. Trouver la limite du cercle circonscrit.

5269. — Trouver les sommets de l'ellipse définie par les équations $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, $y = A'\cos\omega t + B'\sin\omega t$.

5270. — On donne une ellipse et un point P. Déterminer un point M de l'ellipse tel que la droite PM et la tangente en M fassent des angles égaux avec les axes de l'ellipse.

5271. — On donne une ellipse et on considère un cercle variable ayant pour centre un point fixe A. On demande le lieu des milieux des cordes communes au cercle et à l'ellipse et le lieu des centres des couples de sécantes communes.

5272. — Par un point M d'une ellipse, on mène une droite faisant avec les axes les mêmes angles que la tangente en M, mais en sens contraire. Enveloppe de cette droite.

5273. — Construire la courbe $(ax+by)^2-x=0$, et calculer l'aire comprise entre cette courbe et Ox.

(*) Voir *Revue de Mathématiques spéciales*, tome VIII, page 566, tome IX, page 6.

5274. — On donne une ellipse et un point P. Par ce point on mène une perpendiculaire sur un diamètre quelconque, et on prend l'intersection de cette perpendiculaire et du diamètre conjugué. Lieu de ce point de rencontre. Solution géométrique.

5275. — Trouver les pieds des normales menées par le point $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$ à la parabole $y^2 - 2x = 0$.

5276. — Par un point A variable sur une parabole on mène les normales AB et AC à cette courbe. Lieu du pôle de BC et du point de rencontre de BC avec la tangente en A.

5277. — Peut-on déduire le théorème de Pascal des propriétés des divisions homographiques sur une conique ?

5278. — Théorème de Desargues. En déduire les propriétés relatives à l'intersection d'une droite avec une hyperbole et ses asymptotes.

5279. — Par le foyer d'une conique on mène une sécante variable rencontrant la conique aux points A et B. Lieu du point de rencontre des tangentes en A et B.

5280. — Par un point de la directrice d'une parabole on abaisse des perpendiculaires sur les tangentes. Lieu des pieds de ces perpendiculaires.

5281. — Que représente l'équation $x^2 + y^2 - a^2 + 2\lambda xy = 0$. Montrer que si λ varie, ces courbes tracent sur une droite des divisions en involution. Points doubles de cette involution. Condition pour qu'ils soient réels.

5282. — Étudier les coniques $\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} - 1 = 0$. Combien en passe-t-il par un point du plan ? Quelle est la nature de ces coniques ?

5283. — Mener à la courbe $x^2 - 3y^2 + 5 = 0$ des normales par le point (x_0, y_0). Discuter.

5284. — On donne une parabole de sommet A et un point M de la courbe. Trouver sur la courbe un point M′ tel que le rapport anharmonique $(MM'A\infty)$ soit égal à -1.

5285. — Lieu des sommets des angles droits circonscrits à la courbe $(y - 2x)^2 + x + 2y = 0$.

5286. — Trouver le sommet de la conique $x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$.

5287. — On donne un cercle, trois points d'une conique et un point ayant même polaire par rapport au cercle et à la conique. La conique est-elle déterminée ? Trouver l'intersection de la conique et du cercle.

5288. — Soient $x = \frac{t^2}{2p}$, $y = t$ les coordonnées d'un point d'une parabole en fonction du paramètre t. On considère deux points M et M′ correspondant aux valeurs t et t'. Trouver les coordonnées du pôle de la droite MM′. Si ce pôle décrit un cercle tangent à la parabole en son sommet, quelle relation y a-t-il entre t et t' ?

5289. — Étant donnée l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, trouver les coniques qui coupent cette ellipse à angle droit aux quatre points d'intersection.

5290. — Étudier la conique $x^2 + y^2 - xy + x + y = 0$. Sommets et axes.

5291. — Lieu des projections du centre d'une ellipse sur les normales.

5292. — D'un point M d'une ellipse on abaisse MP et MQ perpendiculaires sur les axes de la courbe. Démontrer que la droite PQ est normale à une ellipse.

5293. — Une tangente variable à une hyperbole équilatère rencontre les asymptotes aux points A et B. On construit sur AB un triangle équilatéral. Lieu du troisième sommet.

5294. — Podaires des coniques. Étude géométrique. Cas où le pôle est au foyer. Vérifier analytiquement les résultats obtenus.

5295. — On donne l'ellipse $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$. On pose $e^{i\varphi} = t$, calculer x et y en fonction de t. Relation entre les t de quatre points situés sur un cercle. En déduire l'équation du cercle osculateur. On donne un point A de l'ellipse et on demande de trouver un cercle osculateur en un autre point M que le point A et passant par le point A. Il y a trois solutions. Trouver le centre de gravité du triangle formé par les tangentes aux trois points.

5296. — Calculer le rayon de courbure au point le plus haut de la conique $x^2 - 3xy + 3y^2 - 4 = 0$.

5297. — On donne un axe dirigé Ox et deux points A et B en dehors. Sur Ox on prend deux points variables M et M′ tels que le segment $\overline{MM'}$ soit constant. Lieu du point de rencontre de AM et BM′. Étude géométrique.

5298. — Enveloppe d'une droite qui forme avec deux droites fixes un triangle de surface constante.

5299. — Enveloppe de la droite $x\cos\varphi + y\sin\varphi - a\cos 2\varphi = 0$. Longueur d'un arc de la courbe.

5300. — Enveloppe d'une droite telle que la perpendiculaire menée à cette droite par son pôle par rapport à une ellipse passe par un point fixe.

5301. — Enveloppe de la droite $x\cos\theta + y\sin\theta - 3a\sin\frac{\theta}{3} = 0$. Calculer la longueur de l'arc.

5302. — On considère la courbe $x(x^2 + y^2) + y^2 - x^2 = 0$, et on demande l'enveloppe d'un cercle dont le centre décrit la courbe et qui passe par l'origine.

5303. — Trouver l'enveloppe de la droite $x\cos\theta + y\sin\theta - a\sin\frac{\theta}{2} = 0$. Longueur de l'arc de courbe. Combien passe-t-il de ces droites par un point du plan ?

5304. — Trouver l'enveloppe de la droite $ux + vy + w = 0$ sachant qu'on a $\frac{x_0}{u} - \frac{y_0}{v} + \frac{c^2}{w} = 0$. C'est une parabole tangente aux axes de coordonnées. Trouver son axe et la forme réduite de son équation.

5305. — Enveloppe de la droite $x \cos \lambda + y \sin \lambda + f(\lambda) = 0$. Normale, rayon de courbure.

5306. — Soit une ellipse de foyers F et F'. Trouver l'enveloppe de la corde MM' sachant que FM et F'M' sont parallèles à deux diamètres conjugués.

5307. — Trouver sur une ellipse un point M tel que le rayon de courbure en ce point soit égal au demi-diamètre conjugué du diamètre qui passe au point M.

5308. — Lieu des sommets des angles droits dont les côtés sont normaux à une conique.

5309. — Trouver l'enveloppe d'un cercle dont le centre décrit une ellipse et qui passe par le centre de cette ellipse. Montrer géométriquement que cette enveloppe est homothétique de la podaire de l'ellipse par rapport à son centre.

5310. — Lieu des milieux des normales à une ellipse.

5311. — Equation aux coefficients angulaires des normales menées par le point (x_0, y_0) à la parabole

$$(ux + vy)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

5312. — Enveloppe des cordes d'une parabole de longueur donnée.

5313. — Enveloppe des cordes d'une parabole dont la projection sur l'axe ou sur la tangente au sommet est de longueur donnée.

IV. Géométrie analytique à trois dimensions.

5314. — On fait tourner la droite $x = z + 1$, $y = 2z + 3$ autour de la droite joignant l'origine O au point A $(x = 1,\ y = 1,\ z = 1)$ d'un angle de 45° dans le sens direct. Trouver les équations de la nouvelle position de la droite.

5315. — On fait tourner la droite $x = az + p$, $y = bz + q$ autour de Oz ; peut-on la rendre perpendiculaire à sa première position ?

5316. — On donne dans l'espace trois points définis par leurs coordonnées. Trouver les coordonnées du centre de gravité et de l'orthocentre du triangle formé par ces trois points.

5317. — On donne trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et un point $A(a, b, c)$. Déterminer un tétraèdre régulier admettant pour sommets les points O et A, et tel qu'un autre sommet soit dans le plan des xy.

5318. — Trouver une courbe tracée sur le cylindre $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ telle que les tangentes à cette courbe soient tangentes à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$.

5319. — Trouver une courbe tracée sur une sphère et telle que les tangentes à cette courbe soient tangentes à un cylindre de révolution dont l'axe passe par le centre de la sphère.

5320. — Trouver sur la sphère une courbe coupant tous les méridiens sous un même angle.

5321. — Lieu des points équidistants d'une droite et d'un plan. Cas particulier où la droite et le plan sont perpendiculaires.

5322. — On projette un point M sur le plan yOz en P, et on prend la droite OP' symétrique de OP par rapport à Oz. On fait de même pour les deux autres plans de coordonnées. Démontrer que les trois droites analogues à OP' sont dans un même plan. Quel lieu doit décrire le point M pour que ce plan soit tangent à un cône donné ?

5323. — On donne deux droites quelconques. Trouver l'équation de la surface engendrée par l'une tournant autour de l'autre.

5324. — On considère une hélice située sur un cylindre de révolution ayant pour axe Oz. Une droite variable assujettie à rencontrer Oz à angle droit et à s'appuyer sur l'hélice engendre une surface. Représentation paramétrique de cette surface. On coupe cette surface par un cylindre de révolution d'axe Oz. Nature de l'intersection.

5325. — Trouver sur un cylindre de révolution une courbe telle que son plan osculateur soit normal au cylindre.

5326. — Les extrémités d'un segment AB décrivent des courbes. Soit M un point invariablement lié à AB. Montrer qu'à chaque instant les plans normaux aux trajectoires des points A, B, M passent par une même droite.

5327. — On donne trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz et trois sphères concentriques de centre O. On mène une droite passant par le point O qui les rencontre en A, B, C. Par le point A on mène un plan parallèle au plan des yz, par B un plan parallèle au plan des zx, par C un plan parallèle au plan des xy. Ces plans se coupent en un point M dont on demande le lieu. Puis, par le point A on mène un plan perpendiculaire à OA qui rencontre Ox en A_1, par le point B un plan perpendiculaire à OB qui coupe Oy en B_1, et par le point C un plan perpendiculaire à OC qui rencontre Oz en C_1. Montrer que le plan $A_1B_1C_1$ passe par le point M et est tangent en ce point à la surface, lieu du point M.

5328. — Trouver sur un cylindre parabolique une courbe dont les tangentes font un angle constant avec les génératrices.

5329. — On considère la courbe $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t$. Equation du plan passant par trois points t_1, t_2, t_3. Plan osculateur en un point. Mener les plans osculateurs passant par un point A non situé sur la courbe. Il y a trois solutions ; montrer que le plan des trois points de contact passe par le point A.

5330. — On donne dans l'espace deux droites qui ne se rencontrent pas ; on demande le lieu engendré par une droite de longueur constante s'appuyant sur les deux droites.

5331. — Trouver sur un cylindre de révolution une courbe telle que les tangentes à cette courbe rencontrent un cercle donné concentrique à une section droite.

5332 — Trouver l'équation du cône ayant pour sommet le point (1, 1, 1) et pour directrice la courbe $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t$.

5333. — Déterminer sur une sphère ayant pour centre l'origine une courbe telle que deux méridiens quelconques passant par Oz interceptent sur cette courbe un arc égal à l'arc intercepté par les mêmes méridiens sur le grand cercle du plan des xy.

5334. — Tangente, plan osculateur, rayon de courbure en un point de la courbe $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, $z = a\cos n\theta$.

5335. — Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente en un point d'une courbe gauche. calculer $d\alpha$, $d\beta$ et $d\gamma$.

5336. — Que représente l'équation $f(S, S') = 0$, S et S' étant les premiers membres des équations de deux sphères ?

5337. — On coupe une surface par un plan parallèle à un plan tangent et voisin. Forme limite de la section.

5338. — Étudier la courbe $x = \frac{z^3}{a^2}$, $y = \frac{z^2}{a}$. Degré. Plan osculateur.

5339. — Étudier la surface $\frac{x^2}{a^2 - z^2} - \frac{y^2}{b^2 - z^2} - \frac{2z}{c} = 0$. Sections par des plans parallèles aux plans de coordonnées.

5340. — Calculer l'arc de la courbe $x = a\cos 2\theta\sin\theta$, $y = a\sin 2\theta\sin\theta$, $z = a\cos\theta$. Trouver les cosinus directeurs de la tangente.

5341. — Que représente la surface $z = \frac{2axy}{x^2 + y^2}$? Lieu des projections d'un point fixe sur les génératrices.

5342. — Sections du tore par un plan bitangent et par une sphère bitangente. Calcul et épure.

5343. — On considère la courbe $a^4x = \frac{z^5}{10}$, $a^2y = \frac{z^3}{3}$. Trouver la longueur d'un arc. Trouver le lieu de la droite joignant les deux points de rencontre de la courbe avec un plan passant par Oz. Montrer que les tangentes font un angle constant avec une droite fixe.

5344. — Plan tangent en un point de la surface engendrée par la droite $x = tz + t^2$, $y = t^2z + t^3$.

5345. — Volume de la surface $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{z^2 + c^2} = 0$ compris entre les plans $z = 0$, $z = h$.

5346. — On donne une sphère tangente à l'origine au plan yOz. Trouver la surface engendrée par des droites tangentes à la sphère, parallèles au plan des xy, et rencontrant Oz. Sections par les plans $z = h$, $x = k$. Plan tangent en un point de la surface.

5347. — Étudier les quadriques :

$$z^2 - 2xy = 1, \qquad x^2 - y^2 + z^2 - 2yz + 4azx - 2xy + 8x = 0, \qquad x^2 - y^2 + z^2 - z + y = 0,$$

$$x^2 - y^2 + z^2 + 2xz - 4x + 4y - 4z = 0, \qquad (x + y - z)^2 + x^2 + y^2 - z^2 + 2x - 1 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(yz + zx + xy) + 2(x + y + z) = 0, \qquad x^2 - 3y^2 + 4z^2 = 1 \quad \text{(sections circulaires)},$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 8x = 0, \qquad x^2 + 4yz - 2x + 2y + 2z = 0, \qquad x^2 - y^2 - z^2 + 4xy = 1 \quad \text{(ombilics)},$$

$$x^2 + 3y^2 - 3yz - 4xz + 2xy + 4z^2 + 2 = 0, \qquad x^2 + (y - z)^2 + (z + 1)^2 = 2,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 4xz + 2z = 0 \quad \text{(sections circulaires)}, \qquad (y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2 + (x + y + z)^2 = 1,$$

$$x^2 + 2yz - z^2 + 2x + 1 = 0 \quad \text{(ombilics)}, \qquad x^2 - y^2 + 2z^2 - 2yz + x - 1 = 0, \qquad yz + zx + xy - a^2 = 0 \text{ (méridienne)}.$$

5348. — Équation de la section droite du cylindre $(3x - 2y)^2 + 5(x + y + 1)^2 - 10 = 0$.

5349. — Lieu des centres des quadriques $x^2 + y^2 + z^2 + 2axy - 4azx + 2yz - 2x + 6y + 2az - 1 = 0$.

5350. — Montrer que deux surfaces du deuxième degré qui ont une génératrice commune se touchent en deux points.

5351. — Plans cycliques du cône $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0$.

5352. — Étant donnée la quadrique $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 3yz + x = 0$, trouver les sections de cette quadrique qui se projettent sur le plan des xy suivant des cercles.

5353. — Que représente l'équation $\lambda(x^2 - a^2) + \mu(y^2 - b^2) + \nu(z^2 - c^2) = 0$ quand λ, μ, ν varient ? Lieu des points pour lesquels le plan tangent est parallèle à un plan fixe.

5354. — Intersection de deux quadriques ayant une conique commune.

5355. — Par un point donné, on mène une droite variable qui rencontre une quadrique en deux points A et B. Lieu du milieu de AB.

5356. — On considère les droites qui sont perpendiculaires à leurs conjuguées par rapport à une quadrique. Lieu de ces droites qui passent par un point.

5357. — Trouver l'équation du cône qui a pour sommet un point de l'axe Oz et pour base un cercle dans le plan des xy passant par l'origine. Plans cycliques du cône

5358. — Trouver l'équation d'un ellipsoïde de révolution connaissant les sommets A et A' de l'axe de révolution et le rayon de l'équateur. Examiner en particulier le cas où l'origine est le milieu de AA'.

5359. — On donne un ellipsoïde rapporté à ses axes et on considère trois demi-diamètres conjugués OM, OM' et OM''. Connaissant les coordonnées de M et de M', calculer celles de M''.

5360. — On donne trois droites D_1, D_2, D_3. Construire un triangle $A_1A_2A_3$ dont les sommets soient sur D_1, D_2, D_3 et tels que A_2A_3 soit perpendiculaire à D_1, A_3A_1 à D_2 et A_1A_2 à D_3. Le problème est en général impossible. A quelle condition est-il possible ?

5361. — Mener par la droite $ux + vy + wz - 1 = 0$, $u'x + v'y + w'z - 1 = 0$ des plans tangents à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$. Condition pour que ces plans soient confondus.

5362. — Condition pour qu'un plan $ux + vy + wz = 0$ coupe le cône $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$ suivant deux droites rectangulaires. Peut-on déduire de là la condition pour que le cône contienne trois génératrices formant un trièdre trirectangle ?

5363. — Lieu des points tels que la perpendiculaire menée de l'un d'eux sur son plan polaire par rapport à une quadrique passe par un point fixe. Equation du cône qui a pour base la cubique trouvée et son sommet à l'origine.

5364. — Etant donnée une surface réglée du deuxième ordre, démontrer que quatre génératrices d'un système déterminent sur deux génératrices de l'autre système des rapports anharmoniques égaux.

5365. — Etant donné un cône du deuxième degré, trouver un plan tel que le sommet du cône se projette sur ce plan en l'un des foyers de la section.

5366. — Autour de quelles droites faut-il faire tourner une ellipse pour que la surface engendrée soit du deuxième degré ?

5367. — Equation d'un cylindre de révolution tangent à l'origine au plan des xy. Trouver l'indicatrice à l'origine.

5368. — Lieu du pôle du plan $ux + vy + wz + r = 0$ par rapport aux quadriques

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - \mu = 0,$$

λ et μ étant des variables.

5369. — On considère les trois droites

$$x = az + p, \qquad x = a'z + p', \qquad x = a''z + p'',$$
$$y = bz + q, \qquad y = b'z + q', \qquad y = b''z + q''.$$

Trouver la surface engendrée par une droite qui les rencontre.

Trouver la surface engendrée par un cercle rencontrant ces trois droites et dont le plan est parallèle au plan des xy.

5370. — Moment d'inertie de l'ellipsoïde de révolution $\dfrac{x^2+y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ par rapport à son axe.

5371. — Section du cône $x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$ par le plan $x - 2y + z + 1 = 0$. Nature de la section. Trouver son foyer.

5372. — On donne deux droites fixes D et D' et une droite variable rencontrant D et D' en deux points A et A', tels que les droites joignant A et A' à un point fixe O soient rectangulaires. Trouver le lieu de la droite AA'.

5373. — Trouver l'équation du paraboloïde de révolution ayant pour sommet le point A (a, b, c) et pour foyer le point F (α, β, γ).

5374. — Lieu des points de l'espace dont le rapport des distances à un point fixe et à une droite fixe est constant.

5375. — Equation générale des quadriques passant par les sommets d'un cube symétrique par rapport aux trois plans de coordonnées.

5376. — Normale en un point d'un ellipsoïde. Droite conjuguée de cette normale.

5377. — On donne deux droites D et D' qui ne se rencontrent pas ; par la droite D on mène un plan quelconque P et par la droite D' un plan P' perpendiculaire à P. Trouver le lieu de la droite intersection de P et de P'. Montrer géométriquement que tout plan perpendiculaire à l'une des droites D ou D' coupe la surface obtenue suivant un cercle.

5378. — Correspondance homographique entre les points de deux coniques situées ou non dans un même plan. Montrer que les génératrices d'une quadrique tracent sur deux sections planes des divisions homographiques. Réciproque. Cas de deux sections circulaires parallèles.

V. Géométrie descriptive.

5379. — Symétrique d'une droite par rapport au bissecteur du deuxième dièdre.

5380. — Mener par une horizontale un plan parallèle à une droite donnée. Trouver les traces.

5381. — Perpendiculaire commune à deux droites parallèles au deuxième bissecteur.

5382. — Perpendiculaire commune à une droite de profil et à une droite quelconque.

5383. — On donne un segment de droite par les cotes de ses extrémités et un point de cote donnée. Construire le moment linéaire de la droite par rapport au point.

5384. — On donne une droite par sa projection cotée, et un point par sa projection et sa cote. Faire tourner ce point de 45° autour de la droite, le sens positif étant défini par le sens des cotes croissantes sur la droite.

5385. — On donne une verticale Oz et deux droites OA et OB qui la rencontrent au point O et qui se projettent horizontalement suivant oa et ob. Connaissant les angles que font OA et OB avec le plan horizontal, et l'angle AOB, construire l'angle aob.

5386 — Construire les projections d'une parabole connaissant les projections de son foyer et de sa directrice.

5387. — Mener par un point un plan coupant les côtés d'un quadrilatère gauche en quatre points qui soient les sommets d'un parallélogramme.

5388. — Plans bissecteurs de deux plans définis par leurs échelles de pente.

5389. — Projection d'un octaèdre régulier.

5390. — On donne un plan défini par une frontale et une horizontale, et dans ce plan un cercle défini par son centre et son rayon. Déterminer le point de l'ellipse projection horizontale où la tangente fait 45° avec xy.

5391. — Projection du cercle circonscrit à un triangle.

5392. — On donne quatre droites passant par un même point et formant un angle polyèdre. Mener par un point un plan coupant cet angle suivant un parallélogramme.

5393. — Un trièdre trirectangle a une arête verticale, une de bout et l'autre parallèle à la ligne de terre. Le couper suivant un triangle égal à un triangle donné.

5394. — On donne un plan par ses traces et un cercle dans le plan horizontal. Ce cercle est le rabattement d'un cercle du plan donné autour de la trace horizontale. Cette circonférence est dans l'espace la base d'un cône dont la hauteur est double du rayon de base. Contours apparents de ce cône.

5395. — Construire une droite passant par un point, parallèle à un plan et située à une distance donnée d'une droite donnée.

5396. — Trouver les contours apparents d'un cône dont la base est une circonférence située dans un plan de bout et définie par son rabattement sur le plan horizontal.

5397. — On donne un cône dont la base est un cercle dans le plan horizontal. On considère le cône supplémentaire. Déterminer : 1° sa trace horizontale ; 2° ses contours apparents.

5398. — Normale commune à un cône de révolution d'axe vertical et à une droite quelconque.

5399. — Une droite AB est l'axe d'un tronc de cône de révolution dont on donne les bases en grandeur dans les plans menés par A et B perpendiculairement à AB. Représenter les projections du tronc de cône. Construire le sommet du cône.

5400. — On donne un cercle γ dans le plan horizontal, un plan vertical P et trois points A, B, C. Le cône de sommet A et de directrice γ coupe le plan P suivant une conique γ_1. Le cône de sommet B et de directrice γ_1 coupe le plan horizontal suivant une courbe γ_2, et enfin le cône qui a pour sommet C et pour directrice γ_2 rencontre le plan P suivant la courbe γ_3. Trouver le point le plus à droite et le point le plus à gauche de γ_3.

5401. — On donne un cône ayant pour base un cercle dans le plan horizontal, et une droite dans ce plan. Mener par cette droite un plan coupant le cône suivant une parabole. Déterminer le sommet de cette parabole.

5402. — On donne un plan défini par son échelle de pente, une conique dans ce plan dont la projection horizontale est un cercle. Cette conique est la directrice d'un cône dont le sommet est donné par sa projection horizontale et sa cote. Trouver la trace horizontale du cône. Mener à cette trace des tangentes par un point du plan horizontal.

5403 — On donne un cône ayant pour base un cercle dans un plan quelconque P. Trouver les autres plans non parallèles au plan P qui coupent ce cône suivant un cercle.

5404. — On donne un cône ayant pour base un cercle horizontal. On le coupe par un plan de bout parallèle à une génératrice de contour apparent vertical. La section est une parabole. Trouver le sommet de la projection horizontale.

5405. — Section d'un cône à base circulaire horizontale par un plan parallèle au deuxième bissecteur.

5406. — Intersection d'un cône de révolution à axe vertical et d'un cylindre de révolution ayant pour axe l'une des génératrices de contour apparent vertical du cône.

5407. — On donne un cercle dans le plan horizontal et un point S. Le cône qui a pour sommet le point S et pour base le cercle est coupé par un plan de profil suivant une conique, qu'on prend comme base d'un deuxième cône de sommet T. Déterminer l'intersection des deux cônes.

5408. — Condition pour que deux coniques soient les projections d'une même conique.

5409. — Intersection d'un cylindre hyperbolique ayant sa base dans le plan horizontal avec un cône dont le sommet est sur l'axe du cylindre et dont la base est un cercle situé dans le plan horizontal et passant par le centre de l'hyperbole.

5410. — On donne dans le plan horizontal un cercle qui est la base commune à deux cylindres. On les coupe par un plan de front, et on considère deux cônes ayant pour bases les sections et pour sommets des points donnés. Trouver les contours apparents de ces cônes et leur intersection.

5411. — On donne une droite quelconque rencontrant deux verticales. Ces verticales sont les axes de deux cônes de révolution ayant la première droite pour génératrice. Intersection des deux cônes.

5412. — Intersection de deux cylindres de révolution dont l'un a ses génératrices perpendiculaires au plan vertical et dont l'autre a ses génératrices parallèles à la ligne de terre.

5413. — Intersection d'un cône de révolution à axe vertical et d'un cylindre parabolique.

5414 — Une parabole est tangente en son sommet s à la ligne de terre ; c'est la directrice d'un cône dont le sommet (s, s') est sur la verticale du point s. Intersection de ce cône avec un cylindre vertical dont la directrice est un cercle du plan horizontal tangent en s à la ligne de terre.

5415 — Branches infinies dans l'intersection d'un cylindre hyperbolique et d'un cylindre parabolique.

5416. — On coupe un cylindre de révolution à axe vertical par un plan parallèle au deuxième bissecteur. Ombre portée par la section à l'intérieur du cylindre supposé creux.

5417. — On donne une sphère par ses contours apparents ; elle représente la terre. Le méridien de front est celui de Paris, l'axe de la terre étant vertical. Dessiner sur la sphère les points dont la longitude est égale à la latitude. Tangente en un point. Points remarquables.

5418. — Mener à une sphère des plans tangents par une droite parallèle à la ligne de terre.

5419. — Trouver la projection verticale d'une droite passant par un point donné et tangente à une sphère donnée, connaissant la projection horizontale de la droite cherchée.

5420 — Ombre portée par une sphère sur une droite.

5421. — Mener dans une sphère dont le centre est dans le plan horizontal une corde parallèle à une droite de front, de longueur donnée et dont l'une des extrémités est dans le plan horizontal.

5422. — Intersection d'une sphere dont les contours apparents sont confondus et d'une droite située dans le second bissecteur.

5423. — Par un point A d'une sphère on mène une droite quelconque qui représente un rayon lumineux tombant sur la sphère au point A. Construire le rayon réfléchi.

5424. — On donne une sphère et un prisme dont la base est un triangle situé dans le plan du grand cercle horizontal et à l'intérieur de ce cercle. Les arêtes du prisme ont une direction donnée. Solide commun à la sphère et au prisme.

5425. — On donne les projections cotées de quatre points. Déterminer le centre de gravité, les centres des sphères inscrite et circonscrite au tétraèdre défini par les quatre points.

5426 — On donne deux sphères ayant pour centres les points O et O_1 et passant toutes deux par un point M intersection des deux sphères.

5427. — Trouver les contours apparents d'une surface de révolution engendrée par une courbe située dans un plan de bout et se projetant horizontalement suivant un cercle, qui tourne autour d'un axe quelconque.

5428. — Une conique située dans le deuxième bissecteur ayant ses projections confondues suivant un cercle, tourne autour d'un axe de front. Section de la surface obtenue par un plan vertical.

5429. — Une surface de révolution a son axe de front et est définie par sa méridienne principale. Mener à cette surface un plan tangent par un point donné, dont le point de contact soit sur un parallèle donné.

5430 — Ombre portée d'un tore à axe vertical sur le plan vertical.

5431. — On donne dans un plan de bout une ellipse qui se projette suivant un cercle sur le plan horizontal, et on fait tourner cette ellipse autour d'un axe vertical. Trouver la courbe de contact de la surface engendrée et du cylindre circonscrit dont les génératrices en projection horizontale et verticale font 45° avec les lignes de rappel.

5432. — On considère une hélice tracée sur un cylindre de révolution à axe vertical, et on la fait tourner autour d'une droite verticale. Méridienne principale de la surface engendrée.

5433. — On fait tourner une hélice tracée sur un cylindre de révolution à axe vertical autour d'une droite définie par sa projection horizontale graduée. Trouver un point du contour apparent horizontal de la surface engendrée, et la tangente en ce point.

5434. — Un cylindre de révolution est défini par son axe et un point. 1° Construire ses contours apparents ; 2° étant donnée la projection d'un point, trouver l'autre projection et le plan tangent ; 3° mener les plans tangents par un point ou parallèlement à une droite. Résoudre ces problèmes en géométrie descriptive et en géométrie cotée.

5435. — Déterminer un cône de révolution dont on donne l'axe et le sommet pour qu'il soit tangent à un cylindre de révolution dont l'axe est de front.

5436. — Mener par un point une tangente commune à deux cylindres de révolution.

5437. — Construire une hélice sur un cylindre de révolution à axe vertical ; un point et la tangente.

5438. — En géométrie cotée on donne le sommet, l'axe et l'angle au sommet d'un cône de révolution. Mener à ce cône des plans tangents parallèles à une droite.

5439. — Construire un cône de révolution passant par un point et tangent aux deux plans de projection, connaissant son sommet.

5440. — Construire un cône de révolution connaissant son axe et sachant qu'il est tangent au plan horizontal.

5441. — On donne un cône de révolution défini par son axe, son sommet et une génératrice quelconque. Intersection de ce cône et d'une droite.

5442. — On donne un cône de révolution par son axe, son sommet et le demi-angle au sommet. Trouver le contour apparent horizontal.

5443. — On donne un point, une droite et un plan. Mener par le point une droite rencontrant la droite donnée et faisant avec le plan un angle donné.

5444. — Ombres d'un cône de révolution sur les plans de projection.

5445. — On donne un cône de révolution par son axe et une génératrice. Construire un cylindre de révolution d'axe donné et tangent au cône.

5446. — On donne deux droites qui se rencontrent en un point S, et qui sont définies par leurs projections cotées. Mener par le point S une droite faisant avec les droites données des angles α et β.

5447. — On donne une sphère, un point et une droite en géométrie cotée. Mener par le point une droite tangente à la sphère et rencontrant la droite donnée.

5448. — On donne un cône de révolution dont l'axe est de front. Construire un cylindre tangent à ce cône et ayant pour axe la ligne de terre.

5449. — On donne une droite de front D, une droite quelconque Δ et un point A, et on demande de mener par le point A une droite faisant un angle de 30° avec D et un angle de 45° avec Δ.

5450. — On donne une droite A, un point S sur cette droite et une autre droite B. Construire un cône de révolution

ayant pour axe A, pour sommet S et tangent à la droite B. Soit M le point de contact. Le plan vertical projetant B coupe le cône suivant une conique tangente à B en M. Construire le rayon de courbure de cette conique au point M.

5451. — Mener par une droite un plan faisant un angle donné avec une droite donnée.

5452. — Construire un cône de révolution tangent à une verticale donnée, connaissant son axe et son sommet.

5453. — On donne trois points A, B, C et on considère le cercle qui passe par ces points. Au centre O de ce cercle on élève une perpendiculaire à son plan, sur laquelle on prend de part et d'autre deux points S et S_1 tels que $OS = OS_1 = 15^{cm}$. Représenter le double cône dont les sommets sont S et S_1 et qui a pour base le cercle.

5454. — On donne une droite par sa projection graduée ; c'est l'axe du cône de révolution dont le sommet a pour cote zéro et dont le demi-angle au sommet est égal à 30°. Intersection de ce cône et d'une droite quelconque.

5455. — On donne une verticale et une droite D. Construire une droite Δ, rencontrant D, faisant un angle donné avec le plan horizontal et telle que la perpendiculaire commune à Δ et à la verticale ait une longueur donnée et soit dans un plan horizontal donné.

5456. — Intersection d'une droite quelconque et d'un hyperboloïde de révolution à axe de front.

5457. — Contours apparents de la surface engendrée par une droite de front tournant autour d'une horizontale.

5458. — Une droite de front tourne autour d'une droite du plan vertical. On demande la trace horizontale de la surface engendrée.

5459. — Une surface gauche de révolution est définie par son axe vertical, une asymptote et un point de la méridienne principale. Mener à cette surface un plan tangent par un point, le point de contact étant sur un méridien donné.

5460 — Une surface gauche de révolution est définie par son axe de front et une génératrice G. Trouver la seconde génératrice qui passe par un point donné A sur G. Déterminer sur la génératrice G le point situé sur le contour apparent vertical.

5461. — Intersection d'une surface gauche de révolution à axe de front avec le deuxième bissecteur.

5462. — On donne une surface gauche de révolution à axe vertical limitée à deux plans horizontaux. On suppose le solide creux à l'intérieur, et on demande l'ombre portée de la base supérieure.

5463. — Déterminer les génératrices d'une surface gauche de révolution à axe vertical qui font un angle donné avec la ligne de terre.

5464. — Intersection d'un paraboloïde de révolution à axe vertical avec une droite. Un plan de bout coupe la surface suivant une section qui se projette horizontalement suivant un cercle. Trouver le centre de ce cercle (géométriquement et analytiquement). Section par un plan quelconque.

5465. — Ombre au flambeau d'un paraboloïde de révolution à axe vertical.

5466. — On donne quatre droites ayant leurs projections parallèles (géométrie cotée). Existe-t-il des droites les rencontrant toutes les quatre ?

5467. — On donne une horizontale et quatre droites qui la rencontrent (géométrie cotée). Existe-t-il d'autres droites rencontrant les quatre droites données.

5468. — Un paraboloïde est défini par une génératrice verticale et une génératrice quelconque ; il a pour plan directeur le plan horizontal. Traces des génératrices. Ombre au flambeau, ombre au soleil.

5469 — Étudier les génératrices d'un hyperboloïde défini par trois droites dont les projections horizontales sont concourantes.

5470 — On donne trois droites dont les projections verticales passent par un même point, ainsi que les projections horizontales. On considère l'hyperboloïde défini par ces trois droites. Construire les génératrices de la surface.

5471. — Un hyperboloïde est défini par une verticale, une ligne de bout et la ligne de terre. Construire des génératrices des deux systèmes.

5472 — Trouver le plan polaire d'un point par rapport à un paraboloïde hyperbolique défini par deux génératrices et un plan directeur horizontal. Cône circonscrit.

5473 — Intersection d'un paraboloïde hyperbolique et d'une droite.

5474. — Un paraboloïde hyperbolique a pour plan directeur le plan bissecteur du deuxième dièdre. Mener à ce paraboloïde un plan tangent de front.

5475. — On donne trois frontales dont les projections verticales sont concourantes. Etudier le paraboloïde hyperbolique défini par ces trois droites.

5476. — On donne un quadrilatère gauche dont les côtés sont les génératrices d'un paraboloïde hyperbolique. Mener à cette surface les plans tangents de profil.

5477 — On considère un hyperboloïde défini par un cercle horizontal et deux génératrices rencontrant ce cercle, dont l'une est verticale. Section plane.

5478. — On donne un hyperboloïde défini par trois génératrices dont une est verticale et une autre de front. Construire un point quelconque et le plan tangent. Intersection de la surface et d'un plan parallèle au deuxième bissecteur.

5479. — Section plane d'un paraboloïde hyperbolique défini par une horizontale s'appuyant sur deux droites. Trouver les tangentes de front de la section.

5480 — On donne une surface gauche de révolution définie par son axe vertical et une génératrice de front. Construire une sphère tangente à l'hyperboloïde en un point de cette génératrice. Intersection des deux surfaces ; tangentes au point double.

5481 — On coupe un ellipsoïde de révolution à axe vertical par un plan de bout, et on supprime la partie supérieure. Trouver l'ombre portée à l'intérieur, les rayons lumineux passant par un point fixe.

5482. — Intersection de deux cylindres de révolution dont l'un est vertical et l'autre horizontal.

5483. — Intersection d'un cylindre de révolution à axe de front et d'une sphère tangente au cylindre.

5484. — Intersection d'un ellipsoïde de révolution à axe vertical et d'un cylindre dont la base est un cercle dans le plan horizontal.

5485. — Intersection d'un paraboloïde engendré par une horizontale s'appuyant sur deux droites de front A et B et d'un cylindre de révolution ayant pour axe la droite A.

5486. — Intersection d'un paraboloïde de révolution à axe vertical et d'un cône de révolution dont l'axe est de front et dont une génératrice est verticale.

5487. — Intersection d'un cône de révolution à axe vertical avec un hyperboloïde engendré par l'axe du cône tournant autour d'une droite de front.

5488. — On donne un cône de révolution à base horizontale, le sommet étant au-dessous. Ombre à l'intérieur.

5489. — On donne une sphère de centre O ; soit BC le diamètre parallèle à la ligne de terre et A le point le plus haut. Intersection de la sphère et du cône engendré par la verticale du point C tournant autour de AB.

5490. — On considère un cône ayant pour sommet le point le plus élevé d'une sphère et pour directrice l'intersection de la sphère par un plan de bout. Trace horizontale du cône.

5491. — On donne dans le plan vertical un cercle de centre o' tangent en a' à la ligne de terre. C'est le cercle de gorge d'un hyperboloïde engendré par une droite D du plan horizontal, passant par a'. Trouver l'intersection de cet hyperboloïde avec la surface engendrée par le cercle tournant autour d'un axe vertical situé dans le plan de profil du point o'.

5492. — Mener à un tore dont l'axe est vertical des plans tangents par une droite.

5493. — Intersection d'un cône de révolution à axe vertical et d'une sphère tangente à l'axe du cône et ayant son centre dans le plan de front de l'axe. Chercher analytiquement la projection horizontale de l'intersection.

5494. — Intersection de deux cônes de révolution dont les axes sont dans un même plan de front.

5495. — On donne une surface gauche de révolution définie par son axe vertical et une droite quelconque D. Intersection de cette surface et d'un hyperboloïde défini par l'axe du premier, sa génératrice de front et la droite D.

5496. — On donne un point A, une verticale D et une droite quelconque Δ. Construire une droite qui soit à une distance donnée du point A, qui rencontre D et Δ en faisant avec Δ un angle α.

5497. — Un cercle dans le plan vertical est tangent à la ligne de terre et à une droite verticale. On le fait tourner successivement autour de ces deux droites. Intersection des deux tores ainsi engendrés. Résoudre la question analytiquement.

5498. — Intersection d'un hyperboloïde de révolution à une nappe avec un cône de révolution engendré par une génératrice de front de l'hyperboloïde tournant autour d'un axe vertical.

5499. — On considère un ellipsoïde à trois axes inégaux, dont deux plans principaux sont parallèles aux plans de projection. On demande l'ombre portée par la moitié inférieure de cette surface sur les plans de projection, les rayons lumineux étant de front et inclinés à 45° sur le plan horizontal.

5500. — On donne une ellipse située dans un plan de front et ayant son grand axe vertical. Trouver l'intersection de l'ellipsoïde engendré par cette ellipse tournant autour de son grand axe et du cône de révolution engendré par le grand axe en tournant autour d'une droite située dans le plan de l'ellipse et passant par son centre.

5501. — Intersection d'un ellipsoïde de révolution à axe de front avec une droite donnée.

5502. — Intersection d'une sphère et d'un cône qui a pour base un cercle de front dont la projection verticale coïncide avec le contour apparent vertical de la sphère.

5503. — Même question en remplaçant le cône par un cylindre.

5504. — Intersection d'une sphère et d'un cylindre de front dont la base située dans un plan de bout se projette horizontalement suivant le contour apparent horizontal de la sphère.

5505. — Intersection de deux surfaces gauches de révolution engendrées par une même droite tournant autour de deux axes verticaux.

5506. — On donne une sphère et un plan, et on considère le cône ayant pour sommet le point le plus haut de la sphère et pour base la section de la sphère par le plan. Intersection de ce cône et d'une droite quelconque.

5507. — Intersection d'une sphère et d'un paraboloïde à plan directeur horizontal.

5508. — Intersection de deux paraboloïdes hyperboliques ayant comme plan directeur commun un plan de bout et comme deuxième plan directeur, l'un le plan horizontal et l'autre le plan vertical.

5509. — On donne un cylindre de révolution vertical reposant sur le plan horizontal et limité supérieurement. Sur ce cylindre repose un deuxième cylindre de plus grand rayon et de même axe. Ombres du système sur le plan vertical.

5510. — On donne une sphère et un point S situé sur la verticale du centre. Par ce point on mène une tangente au grand cercle de front de la sphère ; c'est l'axe d'un cône de révolution dont une génératrice est verticale. Intersection des deux surfaces.

5511. — Ombres de la niche, les rayons lumineux ayant leurs projections inclinées à 45° sur la ligne de terre.

5512. — Intersection d'un tore et d'une sphère bitangente.

5513. — On donne un cône ayant pour base une ellipse dans le plan horizontal. On fait tourner une génératrice de ce cône autour d'un axe vertical. Intersection de la surface engendrée et du cône.

5514. — On donne un hémisphère limité supérieurement à un plan horizontal passant par le centre de la sphère. Ombres propres et portées sur les plans de projection.

5515. — Intersection d'un cône et d'un cylindre circonscrits à une sphère.

5516. — On considère un paraboloïde engendré par une horizontale s'appuyant sur deux droites A et B. Intersection de cette surface et d'un cône de révolution ayant pour axe la droite A.

5517. — Intersection d'un tore à axe vertical et d'un paraboloïde dont les plans directeurs sont l'un horizontal et l'autre de bout.

5518. — Intersection d'une surface gauche de révolution à axe vertical avec un cône ayant son sommet sur la surface et pour base le cercle de gorge.

5519. — On donne deux droites qui se coupent, et on les fait tourner autour d'une horizontale de leur plan. Trouver l'intersection des cônes obtenus.

5520. — Ombres du système formé par un cône de révolution à axe vertical et par une sphère dont le point le plus bas est au sommet du cône.

5521. — On donne trois points O, A, B. Intersection de la sphère de diamètre OA avec le cône engendré par la droite OA tournant autour de OB.

5522 — Construire la courbe (un point et la tangente), lieu des projections d'un point sur les génératrices ou sur les plans tangents d'un cône dont la base est un cercle horizontal.

5523. — On donne une surface gauche de révolution définie par son axe vertical A et une génératrice de front G. On demande l'intersection de cette surface et du paraboloïde hyperbolique engendré par une horizontale s'appuyant sur les droites A et G.

5524. — Intersection d'un cône de révolution à axe vertical et d'un paraboloïde hyperbolique engendré par une horizontale s'appuyant sur une des génératrices de contour apparent vertical du cône et sur une autre droite de front.

5525. — Intersection d'un cylindre vertical et d'une sphère tangente.

5526. — On donne un hyperboloïde de révolution engendré par une droite de front G tournant autour d'un axe vertical. Intersection de cette surface et du cône de révolution engendré par une verticale (rencontrant G) et tournant autour de G.

5527. — On considère un hyperboloïde de révolution défini par son axe vertical A et une génératrice de front G, et un paraboloïde hyperbolique passant par les droites A et G et ayant pour plan directeur le deuxième bissecteur. Intersection des deux surfaces.

5528. — Un hyperboloïde est défini par trois génératrices, une verticale, une droite de bout et une droite de front. Un paraboloïde a pour plan directeur le plan horizontal, passe par la verticale et une autre droite de front. Intersection des deux surfaces.

5529. — On donne deux droites A et B parallèles à la ligne de terre et situées dans un même plan de front et une droite C les rencontrant. Intersection des cônes de révolution engendrés par B tournant autour de C et par C tournant autour de A.

VI. Cinématique.

5530. — On donne un cercle fixe de rayon R et un cercle mobile de rayon $\frac{R}{3}$ qui roule à l'intérieur du cercle fixe de manière que le point de contact ait un mouvement uniforme sur le cercle fixe. Étudier le mouvement d'un point du cercle mobile.

5531. — Un point décrit une sinusoïde $y = \sin x$, sa projection sur Ox étant animée d'un mouvement uniforme. Etudier le mouvement du point, sa vitesse et son accélération.

5532. — Trouver un mouvement dans lequel l'accélération est constamment perpendiculaire et égale à la vitesse.

5533. — Mouvement uniforme sur la cycloïde.

5534. — Une droite D roule sans glisser sur un cercle C de manière que le mouvement du point de contact sur le cercle soit uniforme. Etudier le mouvement d'un point de la droite. Accélération tangentielle et normale.

5535. — On donne deux cercles dans un même plan qui sont parcourus par des mobiles M et M' d'un mouvement uniforme avec la même vitesse angulaire ω. On joint ces points à un point fixe O du plan, et on achève le parallélogramme construit sur OM et OM'. Lieu du quatrième sommet.

5536. — Une parabole roule sans glisser sur une parabole égale d'un mouvement uniforme de manière qu'à l'instant $t = 0$ les deux sommets coïncident. Etudier le mouvement du foyer.

5537. — Que devient la loi des aires quand le centre s'éloigne indéfiniment.

5538. — On donne dans l'espace deux droites perpendiculaires D_1 et D_2. Un point M_1 parcourt D_1 d'un mouvement uniforme ; un point M_2 parcourt D_2 d'un mouvement uniformément varié. Lieu du centre de gravité de ces deux points.

5539. — Un point se déplace sur la courbe $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$, $z = a \cos^2 \varphi$. Calculer l'accélération normale et l'accélération tangentielle.

5540. — Un point décrit un cercle passant par l'origine O, de manière que l'accélération passe constamment par le point O. Trouver la loi du mouvement.

5541. — Un point décrit un cercle d'un mouvement uniformément accéléré. Calculer l'angle de l'accélération avec le rayon vecteur.

5542. — On considère un mouvement dont l'hodographe a pour équation $y = x^2$, $z = \frac{x^3}{\sqrt{3}}$; le diagramme des vitesses est $V = \sqrt{\frac{t^2 - 1}{3}}$. Déterminer le mouvement.

5543. — L'hodographe d'un mouvement est une spirale logarithmique, la loi des espaces est $s = e^t$; trouver la trajectoire.

5544. — Etudier le mouvement $x = a \cos(\omega t + \alpha)$.

5545. — Un point mobile sur un cercle décrit des arcs proportionnels au temps. Calculer l'accélération.

5546. — Nature d'un mouvement dont l'hodographe est une courbe sphérique et en particulier un cercle.

5547. — Si l'on donne l'hodographe d'un mouvement et le diagramme des vitesses, le mouvement est-il déterminé?

5548. — Un point parcourt une courbe C d'un mouvement uniformément accéléré, puis suivant une loi inconnue. En chaque point de la courbe les accélérations dans les deux mouvements ont la même direction. Trouver la loi du second mouvement.

5549. — Un point décrit une hélice circulaire d'axe Oz, de telle manière que la projection de l'hodographe sur le plan des xy soit une parabole de sommet O. Trouver le mouvement.

5550. — Un point décrit une trajectoire suivant une certaine loi; il décrit ensuite la même trajectoire de manière que sa vitesse en chaque point soit égale et opposée à ce qu'elle était dans le premier mouvement. Quelle relation y a-t-il entre les accélérations des deux mouvements?

5551. — On donne un cercle et une parabole dont le sommet est au centre du cercle et dont le paramètre est égal à la moitié du rayon du cercle. Un point M décrit le cercle de façon que l'accélération soit parallèle à la polaire de M par rapport à la parabole. Diagramme des vitesses.

5552. — On considère un mouvement de rotation. Au point M la vitesse est donnée en grandeur et en direction : en deux autres points M_1 et M_2, la vitesse est donnée en grandeur seulement. Déterminer l'axe de rotation.

5553. — Un point décrit une hélice d'un mouvement uniforme; trouver son accélération.

5554. — On donne deux cercles concentriques, et deux points A et B décrivant ces cercles d'un mouvement uniforme en sens contraires. Etudier le mouvement du milieu de AB. Peut-on déduire de la une construction de l'ellipse point par point?

5555. — On donne deux droites D_1 et D_2. Un point A se déplace sur D_1, un point B sur D_2, les positions initiales étant A_0 et B_0. Par un point de l'espace O on mène des vecteurs $O\alpha$ et $O\beta$ équipollents à A_0A et B_0B, et on prend la somme géométrique OM de $O\alpha$ et $O\beta$. Etudier le mouvement du point M. Cas où l'un des mouvements est uniforme et l'autre uniformément varié.

5556 — On donne trois plans de coordonnées rectangulaires et dans chacun de ces plans un cercle. Ces trois cercles de rayons R_1, R_2, R_3 sont décrits par des mobiles M_1, M_2, M_3, ayant pour masses m_1, m_2, m_3, les vitesses angulaires étant égales à ω. Etudier le mouvement du centre de gravité de ces trois points.

5557. — On donne un tétraèdre SABC. Trois points partent respectivement de A, B, C, et se déplacent sur SA, SB, SC, les mouvements étant uniformes. Etudier le mouvement du centre de gravité du système des trois points.

5558. — Etudier le mouvement d'un point sur la parabole $y^2 - 2px = 0$, sachant que la projection du point sur Ox est animée d'un mouvement uniforme. Vitesse, accélération.

VII. Dynamique.

5559. — Mouvement d'un point dans un plan, soumis à deux forces perpendiculaires aux axes de coordonnées et en raison inverse des distances à ces axes.

5560. — Un point pesant placé au point le plus haut d'un cercle vertical est lancé sur ce cercle avec une certaine vitesse initiale. A quel moment quitte-t-il le cercle?

5561. — Un point se déplace sur une droite de manière que sa vitesse soit une fonction connue de son abscisse. Trouver la force qui agit sur le point.

5562. — On donne dans un plan vertical deux axes rectangulaires, Ox horizontal et Oy vertical dirigé vers le bas, et une courbe C passant par l'origine. Un point pesant assujetti à se déplacer sur la courbe est abandonné en O sans vitesse initiale. Trouver sa vitesse au point M, et le temps nécessaire pour parcourir OM. Déterminer la courbe de façon que ce temps soit une fonction donnée de l'ordonnée du point M.

5563. — Un point se meut sur une courbe plane C sous l'action d'une force parallèle à Oy et fonction de y. Trouver cette force. Cas où la courbe C est une conique.

5564. — Mouvement d'un point M sur une parabole sous l'action d'une force centrale égale a MF, F étant le foyer.

5565. — Trouver une courbe C telle que si un point M la décrit sous l'action d'une force centrale fonction de la distance, le mouvement soit uniformément accéléré.

5566. — Mouvement d'un point attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance, sans vitesse initiale, subissant une résistance proportionnelle à la vitesse.

5567. — Un point soumis à l'action d'une force centrale décrit la courbe $\rho = f(\omega)$. Loi de la force. Cas particulier où $f(\omega) = a\,\omega + b$.

5568. — Déduire la profondeur d'un puits de l'intervalle de temps qui sépare l'instant où on laisse tomber un poids dans le puits et celui où on perçoit le bruit de sa chute.

5569. — Un point décrit une ellipse sous l'action d'une force centrale émanée d'un des foyers. Relation entre la position du point et le temps.

5570. — Mouvement d'un point attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance, mais éprouvant une résistance proportionnelle à la vitesse.

5571. — Un poids de 10^{gr} est lancé sous l'incidence $45°$ avec une vitesse de 350^m à la seconde. Calculer sa force vive lorsqu'en retombant il arrive à une distance égale à deux mètres du sol.

5572. — Un point M est attiré par une force perpendiculaire à Oz et inversement proportionnelle au carré de la distance du point Oz. Montrer qu'on peut choisir la vitesse initiale de façon que le point décrive une hélice de pas donné.

5573. — Un train marche à la vitesse de 60^{km} à l'heure. De ce train, on lance un projectile avec une vitesse de 3^m à la seconde, horizontalement et perpendiculairement au train. Ce projectile tombe sur un talus situé à un niveau inférieur de vingt mètres à celui des rails. On demande en quel point il va tomber?

5574. — Etudier le mouvement d'un point attiré par un centre fixe O proportionnellement au cube de la distance, la vitesse initiale étant dirigée vers le point O.

5575. — Soit la force dont les projections sont $X = 1 - \frac{y^2}{x^2}$, $Y = \frac{2y}{x}$. Y-a-t-il un potentiel? Calculer ce potentiel. Courbes de niveau. Lignes de force.

5576. — Un point assujetti à se déplacer sur un cercle est attiré par un point O extérieur au cercle avec une force proportionnelle à la distance. Mouvement du point.

5577. — On lance un mobile avec une vitesse v_0 faisant avec le plan horizontal l'angle α. Quelle doit être v_0 pour que, sans changer α, on atteigne un point déterminé ?

5578. — Étudier le mouvement relatif de deux corps pesants tombant sans vitesse initiale d'un même point O à un intervalle de temps égal à θ.

5579. — Hodographe du mouvement d'un point qui se déplace sous l'action d'une force centrale, inversement proportionnelle au carré de la distance. Solution géométrique.

5580. — Dans le mouvement d'un point attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance, peut-on diriger la vitesse initiale (donnée en grandeur) de façon à atteindre un point donné du plan ?

5581. — On lance verticalement un point matériel pesant qui éprouve une résistance inversement proportionnelle au carré de la vitesse. A quelle hauteur parvient-il ? Quelle est sa vitesse quand il revient au point de départ ?

5582. — Un point se meut sur un cercle d'un mouvement uniforme ou uniformément varié ; il est soumis à l'action d'une force passant par un point fixe du cercle. Trouver l'expression de cette force.

5583. — On lance d'un point divers points matériels dans des directions quelconques avec des vitesses initiales quelconques. Démontrer qu'à chaque instant les tangentes aux diverses trajectoires sont concourantes.

5584. — Mouvement d'un point attiré par un centre fixe par une force égale à $-\frac{\mu}{r^2} - \frac{\mu'}{r^3}$.

5585. — Un point décrit la courbe $x^4 + y^4 = 1$ en étant soumis à l'action d'une force qui passe par l'origine. Étudier le mouvement de ce point.

5586. — Un point pesant M est assujetti à décrire une circonférence située dans un plan vertical. Il est attiré par le diamètre vertical par une force proportionnelle à sa distance à ce diamètre. Mouvement du point M. Positions d'équilibre stable.

5587. — Quelle est la condition pour qu'un mobile attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance décrive un cercle ?

5588. — Un point mobile décrit la courbe $r = a + b\theta$, et est attiré par l'origine en raison inverse du carré de la distance. Calculer le travail de la force après n tours.

5589. — Un point décrit la courbe $\rho^2 = a^2 \cos 2\omega$ d'un mouvement uniforme ; trouver la force qui produit ce mouvement.

5590. — Étudier le mouvement d'un point pesant lancé avec une vitesse v_0 sur une hélice circulaire dont l'axe est horizontal.

5591. — Soit dans un plan un système de forces $X = y$, $Y = x$. Y a-t-il un potentiel ? Lignes de niveau, lignes de force.

5592. — Mouvement d'un point M attiré par deux centres fixes proportionnellement à la distance.

5593. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy et un cercle dont le centre A est sur Ox et dont le rayon est égal à 2 OA. Un point M(x, y) effectue une révolution complète sur le cercle en étant soumis à l'action de la force.

$$X = \frac{y}{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 - 1), \qquad Y = \frac{x}{x^2 + y^2}(1 - x^2 - y^2).$$

Travail effectué.

5594. — Étant donné la force $X = -\frac{a^2 y}{x^2 + y^2}$, $Y = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2}$, $Z = h$, y a-t-il une fonction des forces ?

5595. — Même question pour la force $X = -\frac{a^2 y}{x^2 + y^2}$, $Y = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2}$, $Z = \frac{z^4}{a^2}$. Surfaces de niveau.

5596. — Un point M de masse égale à 1g décrit un cercle de rayon 10cm avec une vitesse angulaire égale à celle de la grande aiguille d'une montre. Calculer l'accélération et la force vive.

5597. — Mouvement d'un point pesant sur une cycloïde dont la concavité est tournée vers le haut.

5598. — Un point pesant décrit une hélice circulaire à axe vertical sous l'action d'une force passant par un point de l'axe. Loi de la force ; loi du mouvement.

5599. — Étudier le mouvement d'un point pesant tombant verticalement, la résistance étant proportionnelle à la vitesse.

5600. — Un point pesant soumis à une certaine force décrit un cercle vertical d'un mouvement uniforme. Trouver cette force.

5601. — On lance un mobile pesant assujetti à rester sur un cercle vertical à partir du point le plus bas. Quelle doit être la vitesse initiale pour qu'il arrive au point le plus haut avec une vitesse nulle ?

5602. — Un point M se meut sous l'action d'une force centrale de façon que OM diminue proportionnellement au temps. Déterminer le mouvement du point M.

5603 — Étudier le mouvement d'un point situé sur une droite Ox et soumis à l'action d'une force attractive ou répulsive égale à $k\sqrt{x}$, x étant l'abscisse du point M.

5604. — Mouvement d'un point sur Ox, soumis à aucune force, mais éprouvant une résistance proportionnelle au carré de la vitesse.

5605. — Un point assujetti à décrire une courbe d'un mouvement uniformément accéléré est attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance. Trouver la forme de la courbe.

5606. — On donne un cercle dans un plan vertical. Un point pesant assujetti à se déplacer sur le cercle est placé en un point M, sans vitesse initiale. Trouver sa vitesse en un point quelconque M. Pression en ce point. On place ensuite le point au point le plus élevé du cercle ; on lui donne une vitesse très petite, négligeable. Déterminer en quel point le mobile quitte le cercle.

5607. — On donne dans un plan vertical une horizontale Ox et une verticale Oz dirigée vers le bas, et on divise en quatre parties égales l'angle droit xOz par les droites OA, OB, OC. Quatre points pesants sont abandonnés en O sans vitesse initiale et assujettis à décrire les droites Oz, OA, OB, OC. Lieu du mouvement du centre de gravité de ces points.

5608 — Un point M décrit un cercle d'un mouvement uniforme sous l'action de son poids et d'une force dirigée vers le centre du cercle. Trouver cette force

5609. — Mouvement d'une bille dans une rigole circulaire, la bille n'étant soumise à aucune force extérieure et sachant qu'il y a frottement.

5610. — Trajectoire d'un point mobile dans un plan, attiré par un point fixe de façon que sa distance au point fixe soit une fonction linéaire du temps.

5611. — Un point est attiré par Oz proportionnellement à la distance, et par le plan des xy proportionnellement à la distance. Etudier le mouvement. Surfaces de niveau. Lignes de forces.

VIII. Statique.

5612. — On donne une courbe, un point A fixe sur cette courbe et un point variable M également sur la courbe. Soit G le centre de gravité de l'arc AM. Trouver la tangente au lieu du point G quand M se déplace sur la courbe. Même question pour le centre de gravité du secteur AOM, O étant un point fixe du plan.

5613. — Un arc de courbe AB est soumis en chaque point à une pression normale et constante. Trouver la résultante de toutes ces forces.

5614. — Une barre rigide est fixée en un point A et s'appuie en B sur une droite verticale. Réactions en A et B.

5615. — Equilibre d'un point pesant assujetti à se déplacer sur un cercle avec frottement.

5616. — Dans la réduction des forces à deux, montrer qu'on peut donner à l'une des forces une direction choisie arbitrairement, ou qu'on peut faire en sorte que les deux forces soient perpendiculaires.

5617. — Réduction d'un système de forces à deux dont l'une passe par un point O. Lieu de l'extrémité de cette force.

5618. — Trouver l'axe central du système formé par trois forces dont les points d'application sont respectivement sur Ox, Oy et Oz.

5619. — Aux sommets d'un losange on applique quatre forces suivant les diagonales, conditions d'équilibre.

5620. — Dans la réduction d'un système de forces à deux, peut-on se donner arbitrairement la ligne d'action d'une des forces ?

5621. — Centre de gravité de la table de Pythagore.

5622. — Déterminer le centre de gravité d'un arc de spirale logarithmique sur laquelle est répandue une matière de telle sorte que la densité en un point soit proportionnelle à la longueur de l'arc comptée à partir du pôle.

5623. — Etant donné un tétraèdre et une force, montrer qu'on peut décomposer la force en forces dirigées suivant les arêtes du tétraèdre.

5624. — Centre de gravité de l'arc et de l'aire de la cycloïde.

5625. — Trouver le centre de gravité d'un arc de cercle, et déterminer le lieu de ce point quand l'une des extrémités de l'arc varie.

5626. — On donne les droites D_1, D_2, ... D_n. Peut-on appliquer sur ces droites des forces se faisant équilibre ? Discuter suivant les valeurs de n.

5627. — Trouver l'équilibre d'un point pesant placé sur un plan incliné et attiré par un point proportionnellement à la distance.

5628. — Centre de gravité d'un arc d'hélice.

5629. — Trouver une courbe C telle qu'un point mobile avec frottement sur cette courbe, et soumis à une force attractive issue d'un point O et proportionnelle à la distance, soit constamment en équilibre limite.

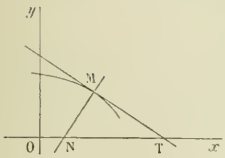
EXAMENS DE 1906 (*Suite*).

CERTIFICAT D'ÉTUDES SUPÉRIEURES (*Lyon, juillet 1906*).

Mathématiques préparatoires.

Analyse infinitésimale.

1549. — Soit $y = f(x)$ l'équation d'une courbe, rapportée à deux axes de coordonnées rectangulaires ; et soient T et N les points où la tangente et la normale en un point quelconque M de cette courbe rencontrent l'axe Ox.



1° A quelle équation différentielle (E) doit satisfaire la fonction $y = f(x)$ pour que l'on ait, pour tous les points M de la courbe, la relation $OT.ON = c^2$, où c est une longueur donnée ?

2° Intégrer cette équation différentielle (E), en se servant du changement de variables $x^2 = u$, $y^2 = v$.

3° Par le point P, de coordonnées $x = c$, $y = \frac{c\sqrt{5}}{2}$ passent deux courbes intégrales de l'équation (E) ; une ellipse et une hyperbole. Trouver les équations de ces deux courbes.

4° L'hyperbole considérée divise l'aire de l'ellipse considérée en trois parties. Calculer l'aire de chacune de ces parties.

Mécanique.

Établir le théorème des forces vives dans le mouvement absolu et dans le mouvement relatif d'un système. Principe de la conservation de l'énergie.

Épreuve pratique.

Etudier les variations de la fonction $y = e^{\frac{x^2}{1+x}}$ et calculer, à 0.001 près, la valeur de y pour $x = 0{,}2$.

QUESTIONS PROPOSÉES

1550. — 1° On considère la fonction $y = x^p(\lambda \mathrm{L}x + \mu)$.

Tracer les différentes formes de la courbe qui représente ses variations, les nombres p, λ, μ variant.

2° Former l'équation différentielle à laquelle la fonction y satisfait, p étant donné, λ et μ variant.

3° Montrer que l'équation différentielle

(1) $$ax^2y'' + bxy' + cy = 0,$$

a, b, c étant des constantes, admet toujours une solution de la forme x^r.

En déduire l'intégration de l'équation (1).

Retrouver les résultats obtenus en faisant le changement de variable $x = e^t$.

4° Chercher, a, b, c, α étant des nombres fixes, et α différent de zéro, le terme général de la série entière la plus générale satisfaisant à l'équation différentielle

(2) $$(ax^2 + \alpha)y'' + bxy' + cy = 0.$$

Que peut-on dire de la convergence de cette série ?

Dans quels cas particuliers l'équation différentielle (2) est-elle satisfaite par un polynome ou bien n'admet-elle pour intégrales que des polynomes ? TH. L.

1551. — Montrer que le polynome $x^m + mx^{m-1} + m(m-1)x^{m-2} + \cdots + m!\,x + m!$ n'a pas de racine réelle si m est pair et a une seule racine réelle et négative si m est impair.

DEUXIÈME PARTIE

MÉCANIQUE

1494. — *Un point se meut de manière que son accélération normale variable soit dans un rapport constant k^2 avec le rayon de courbure de la trajectoire, et que son accélération tangentielle ait une valeur constante a. Trouver l'hodographe et la trajectoire de ce mobile.*

Soient v la vitesse et ρ le rayon de courbure ; nous avons par hypothèse

$$\frac{v^2}{\rho} = k^2\rho, \qquad \text{ou} \qquad v^2 = k^2\rho^2, \qquad \text{ou enfin} \qquad v = k\rho.$$

Désignons par x et y les coordonnées d'un point de la trajectoire et par x', y', x'', y'' les dérivées première et seconde de x et y par rapport au temps. L'égalité $v = k\rho$ peut s'écrire

$$(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}} = k\,\frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2 + y'^2} = k.$$

L'intégration est immédiate et nous donne

$$\text{arc tg}\,\frac{y'}{x'} = kt + \mathrm{C}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{y'}{x'} = \text{tg}\,(kt + \mathrm{C}),$$

C désignant une constante arbitraire.

D'autre part, on a $\dfrac{dv}{dt} = a$, ou, en intégrant, $v = (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}} = at + \mathrm{C}'$;

il en résulte que les coordonnées polaires r et θ d'un point de l'hodographe sont

$$r = at + \mathrm{C}', \qquad \theta = kt + \mathrm{C}.$$

En éliminant t entre ces deux équations, on obtient pour équation polaire de l'hodographe une équation de la forme $r = A\theta + B$, qui représente une spirale d'Archimède.

Cherchons maintenant la trajectoire. Pour simplifier les relations qui précèdent, nous prendrons pour origine du temps l'instant où la vitesse du mobile est nulle ; et nous choisirons comme axe des x une droite parallèle à la tangente à la trajectoire au point où la vitesse est nulle. Nous avons ainsi

$$\frac{y'}{x'} = \operatorname{tg} kt, \qquad v = at = (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}},$$

et, par suite,

$$x' = at\cos kt, \qquad y' = at\sin kt.$$

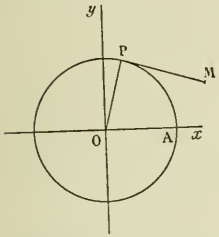
Nous en déduisons $\quad x = \int at\cos kt\,dt, \qquad y = \int at\sin kt\,dt.$

Calculons ces deux intégrales. En intégrant par parties, on a

$$\int t\cos kt\,dt = t\frac{\sin kt}{k} - \int \frac{\sin kt}{k}dt = \frac{t\sin kt}{k} + \frac{\cos kt}{k^2},$$

$$\int t\sin kt\,dt = -t\frac{\cos kt}{k} + \int \frac{\cos kt}{k}dt = -\frac{t\cos kt}{k} + \frac{\sin kt}{k^2};$$

nous en tirons $\quad x - x_0 = \frac{a}{k^2}(\cos kt + kt\sin kt), \qquad y - y_0 = \frac{a}{k^2}(\sin kt - kt\cos kt),$



x_0, y_0 étant des constantes arbitraires, ou en transportant l'origine au point (x_0, y_0),

$$x = \frac{a}{k^2}\left[\cos kt + kt\cos\left(kt - \frac{\pi}{2}\right)\right],$$

$$y = \frac{a}{k^2}\left[\sin kt + kt\sin\left(kt - \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Considérons le cercle ayant pour centre l'origine et dont le rayon est égal à $\frac{a}{k^2}$, et prenons sur ce cercle le point P, tel que l'angle de Ox avec OP soit égal à kt ; puis sur la tangente au point P et dans le sens négatif prenons une longueur PM égale à l'arc AP. On voit immédiatement que le point M a pour coordonnées les nombres x et y définis par les relations précédentes.

Or le point M décrit une développante du cercle considéré ; donc la trajectoire du mobile est une développante de cercle. M. LAURENCE.

Solutions satisfaisantes par MM. G. Cotty, élève à l'Ecole normale supérieure et Foucay, à Roanne.

1495. — *Un point se meut de manière que son accélération normale variable soit dans un rapport constant k^2 avec le rayon de courbure de la trajectoire, et que son accélération totale ait une valeur constante a. Trouver l'hodographe et la trajectoire de ce mobile.*

Comme dans la question **1494**, nous avons d'abord

$$\frac{y'}{x'} = \operatorname{tg} kt, \qquad \text{ou} \qquad \theta = kt,$$

en choisissant la même origine du temps.

Puisque l'accélération totale est constante, l'hodographe est décrite d'un mouvement uniforme de vitesse a, et en désignant par r et θ les coordonnées polaires d'un point de l'hodographe, nous avons

$$\frac{dr^2}{dt^2} + r^2\frac{d\theta^2}{dt^2} = a^2,$$

ou, en remplaçant θ par kt, $\quad dt = \frac{dr}{\sqrt{a^2 - k^2r^2}} = \frac{1}{k}\cdot\frac{d\frac{kr}{a}}{\sqrt{1 - \frac{k^2r^2}{a^2}}}.$

On en déduit, en intégrant,

$$t + C = \frac{1}{k} \arcsin \frac{kr}{a}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{kr}{a} = \sin k(t + C).$$

Pour $t = 0$, on a $r = 0$, puisqu'à l'origine du temps la vitesse est nulle; nous avons donc

$$r = \frac{a}{k} \sin kt, \qquad \text{et} \qquad r = \frac{a}{k} \sin \theta.$$

Il en résulte que l'hodographe est un cercle.

Les coordonnées rectilignes x' et y' d'un point de l'hodographe sont alors

$$x' = \frac{a}{k} \sin kt \cos kt, \qquad y' = \frac{a}{k} \sin^2 kt;$$

et, par suite, les coordonnées x et y d'un point de la trajectoire sont

$$x = \frac{a}{k} \int \sin kt \cos kt \, dt, \qquad y' = \frac{a}{k} \int \sin^2 kt \, dt.$$

Mais on a $\displaystyle\int \sin kt \cos kt \, dt = \frac{1}{k} \int \sin kt \, d(\sin kt) = \frac{\sin^2 kt}{2k} = \frac{1 - \cos 2kt}{4k},$

$$\int \sin^2 kt \, dt = \int \frac{1 - \cos 2kt}{2} dt = \frac{2kt - \sin 2kt}{4k}.$$

Il en résulte $\quad x - x_0 = \dfrac{a}{4k^2}(1 - \cos 2kt), \qquad y - y_0 = \dfrac{a}{4k^2}(2kt - \sin 2kt);$

et, en transportant l'origine au point (x_0, y_0),

$$x = \frac{a}{4k^2}(1 - \cos 2kt), \qquad y = \frac{a}{4k^2}(2kt - \sin 2kt).$$

On reconnaît les équations paramétriques d'une cycloïde, engendrée par un point d'un cercle de rayon $\dfrac{a}{4k^2}$ et roulant sur Oy. M. LAURENCE.

Solutions satisfaisantes par MM. Amblard, à Ruines ; G. Cotty ; Foucry ; R. de Fabia.

QUESTIONS PROPOSÉES

1552. — Trouver la condition pour qu'une équation du troisième degré,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

devienne réciproque avec la racine 1 quand on y fait $x = y + h$, h étant une certaine constante indéterminée. Trouver la relation qui existe alors entre les racines de l'équation du troisième degré et résoudre cette équation.

Appliquer à $\qquad 2x^3 - 13x^2 - 27x - 18 = 0.$ E. H.

1554. — On donne un volant dont la couronne a un diamètre extérieur égal à 5 mètres et un diamètre intérieur égal à 4 mètres. La section méridienne, abstraction faite du moyeu et des bras, est composée de deux ellipses dont le grand axe, parallèle à l'axe de rotation Oz, a une longueur de $0^m,7$.

Ce volant est animé d'une vitesse de 120 tours à la minute ; on demande :

1° sa masse, en le supposant composé de fonte de densité égale à 7,3 ;

2° son moment d'inertie par rapport à Oz et son rayon de gyration par rapport à un axe parallèle à Oz et tangent à la surface extérieure de la couronne ;

3° le nombre de kilogrammètres emmagasinés cinématiquement ;

4° la quantité de chaleur dégagée dans l'hypothèse d'un arrêt brusque, la température finale du volant au-dessus de l'ambiance dans cet arrêt, en supposant que la chaleur spécifique de la fonte soit 0,1138.

5° En supposant que ce volant doive fournir brusquement 50000 kilogrammètres en une seconde, dire quelle sera la diminution relative de sa vitesse angulaire. P. Brizard.

Erratum. — N° 1, page 23, Bibliographie. Au lieu de *Ch. Lucas de Pestoican*, lire *Ch. Lucas de Pestoian.*

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

17e Année. N° 3. Décembre 1906.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

NOTE SUR LES QUARTIQUES BICIRCULAIRES

par M. J Haag, élève à l'école normale supérieure.

1. On sait que toute quartique bicirculaire peut être considérée comme enveloppe d'un cercle qui reste orthogonal à un cercle fixe et dont le centre décrit une conique. Nous allons montrer qu'on peut donner à cette propriété un énoncé d'un emploi plus commode dans les applications :

Les cercles d'un faisceau quadratique ponctuel enveloppent une quartique bicirculaire.

Cette propriété est facile à vérifier analytiquement. Nous nous contenterons de l'établir par la géométrie.

Considérons une famille de cercles (C) telle que par tout point du plan passent deux de ces cercles et deux seulement. Ces cercles enveloppent une certaine courbe (S). Cherchons en combien de points (S) rencontre une droite quelconque (D). Il faut pour cela chercher les points de (D) par lesquels passent deux cercles (C) confondus. Or par tout point de (D) passent deux cercles (C), qui rencontrent de nouveau la droite en deux points M et M'. Or, il est facile de voir qu'il existe entre les points M et M' une correspondance biquadratique involutive. Il y a par suite dans cette correspondance quatre points doubles, qui sont évidemment des points de (S) et les seuls situés sur la droite (D). (S) est donc du quatrième degré. On peut faire voir maintenant d'une façon tout à fait analogue que (S) rencontre un cercle quelconque en quatre points à distance finie, ce qui montre que les points cycliques sont deux points doubles de (S). Ceci résulte d'ailleurs aussi de ce que (S) est une enveloppe de cercles, car les points cycliques sont points-limites pour tous les cercles de la famille ; d'autre part ceux-ci devant être tous tangents à l'enveloppe aux points-limites, les points cycliques sont forcément points doubles au moins.

Il ne faudrait pas croire que ce mode de génération des quartiques bicirculaires est plus général que celui que nous avons rappelé au début de cette note, car il n'en diffère pas. Je dis d'abord que les cercles (C) restent orthogonaux à un cercle fixe. En effet, considérons un cercle particulier (C_1). Un cercle (C) quelconque le coupe en deux points M et M'. Or on voit aisément que les points M et M' décrivent sur (C_1) deux divisions en involution. Donc MM' passe par un point fixe Q. L'axe radical relatif à deux cercles (C) et (C') quelconques passe d'ailleurs par le point Q, puisque celui-ci est le centre radical relatif aux trois cercles (C_1), (C), (C'). Les cercles (C) restent donc orthogonaux à un cercle fixe (Δ) de centre Q ; c'est le cercle directeur des cercles (C).

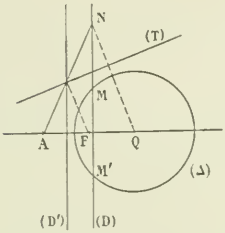
Je dis maintenant que le lieu des centres ω des cercles (C) est une conique (Γ). En effet, soient ω_1 et ω_2 les centres de deux cercles particuliers (C_1) et (C_2), ω le centre d'un cercle (C) quelconque. Il est facile de voir que les droites $\omega_1\omega$ et $\omega_2\omega$ se correspondent homographiquement. Donc ω décrit une conique (Γ) passant par ω_1 et ω_2. C'est la conique déférente.

2. Je me propose maintenant de chercher la ou les conditions pour que la courbe (S) ait un ou deux points doubles autres que les points cycliques.

Soit M un tel point. La tangente en ce point à (S) doit être indéterminée. Il doit donc en être de même de la tangente au cercle (C) qui admet ce point pour point-limite. Or ceci ne peut avoir lieu que dans deux cas : ou bien, il y a une infinité de cercles (C) admettant M pour point-limite, auquel cas tous

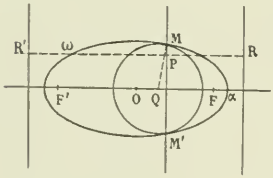
les cercles (C) passeraient par deux points fixes, auxquels se réduirait l'enveloppe ; ou bien il y a un cercle (C) de centre M et de rayon nul, admettant le point M pour point-limite. Or les points-limites d'un cercle (C) de centre ω sont sur la perpendiculaire abaissée de Q sur la tangente en ω à (Γ). Pour que M soit point double de (S), il faut donc qu'il soit le pied d'une normale à (Γ) issue de Q. Il doit être en outre sur le cercle (Δ). Celui-ci doit donc être tangent à (Γ). C'est la condition nécessaire et suffisante pour que (S) ait un point double.

On peut montrer directement que si cette condition est remplie, (S) est bien une quartique admettant le point de contact M pour point double. En effet, la courbe (S) peut être évidemment considérée comme le lieu des points-limites des faisceaux linéaires de cercles orthogonaux à (Δ) et admettant pour axes radicaux les tangentes à (Γ). Or si nous considérons une droite quelconque (D), l'enveloppe des axes radicaux (T) relatifs au cercle (Δ) et aux cercles-points N situés sur (D) est une parabole (Π) de foyer F, milieu de AQ [A pôle de (D)] de tangente au sommet (D') et bitangente au cercle (Δ) en M et M', comme le montre suffisamment la figure ci-contre.



Aux quatre tangentes communes à cette parabole et à (Γ), correspondent quatre points qui sont les points de (S) situés sur (D). On a ainsi démontré en passant que dans le cas général, la courbe (S) est du quatrième degré, sauf cependant si (Γ) est une parabole, auquel cas elle se réduit au troisième degré. Dans le cas particulier où (Δ) est tangent à (Γ) en un point M, si l'on fait passer la droite (D) par ce point, la parabole (Π) correspondante est tangente en M à (Δ) et par suite à (Γ). A la tangente de contact correspond le point M, aux deux autres tangentes communes correspondent deux autres points sur (D). M est donc bien un point double de (S).

Pour que la quartique ait deux points doubles, et par suite se décompose en deux cercles, il faut et il suffit que le cercle directeur soit bitangent à la conique déférente. Cela résulte de ce qui précède. Les deux points de contact sont les deux points doubles, c'est-à-dire les deux points de rencontre des deux cercles-enveloppes. On peut encore montrer directement que l'enveloppe se compose de deux cercles ayant pour centres respectifs les foyers de la déférente situés sur l'axe perpendiculaire à la corde de contact MM'. En effet, soit ω le centre de l'un des cercles (C). Si l'on pose



$$e = \frac{OF}{O\alpha},$$

le rayon du cercle (C) considéré est

$$\rho = e.\omega P.$$

Or $$\omega F = e.\omega R;$$

donc $$\omega F - \rho = e(\omega R - \omega P) = e.PR = R.$$

Le cercle (C) est donc tangent extérieurement au cercle de centre F et de rayon $R = e.PR$. On montre d'une façon analogue qu'il est tangent intérieurement au cercle de centre F' et de rayon $R' = e.PR'$.

ANALYSE

1473. — *On considère la fonction*

$$y = \operatorname{ch} x \cos x.$$

1° *Étudier ses variations.*

2° *Calculer* $\int y dx$.

3° *Développer* y *en série.*

Retrouver le terme général de cette série en considérant y comme intégrale particulière d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

4° *Calculer la valeur numérique de y pour $x = 1$ avec 5 chiffres décimaux exacts.*

5° *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'' + 2y' \operatorname{tg} x + 2y \operatorname{tg}^2 x = 0.$$

1° Soit $$y = \operatorname{ch} x \cos x.$$

La courbe représentant les variations de cette fonction est symétrique par rapport à l'axe des y. Cette courbe est toujours comprise entre les deux chaînettes

$$y_1 = \operatorname{ch} x, \qquad y_2 = -\operatorname{ch} x$$

qu'elle rencontre une infinité de fois, la première toutes les fois que $\cos x = 1$, la seconde quand $\cos x = -1$. Ces points de rencontre avec les deux chaînettes sont des points de contact, car

$$y' = \operatorname{sh} x \cos x - \operatorname{ch} x \sin x$$

et lorsque $\cos x = \pm 1$; $y' = \pm \operatorname{sh} x$; c'est le coefficient angulaire de la tangente à la chaînette correspondante.

Ces points de contact sont, pour la courbe à construire, des points d'inflexion, car on a

$$y'' = -2 \operatorname{sh} x \sin x.$$

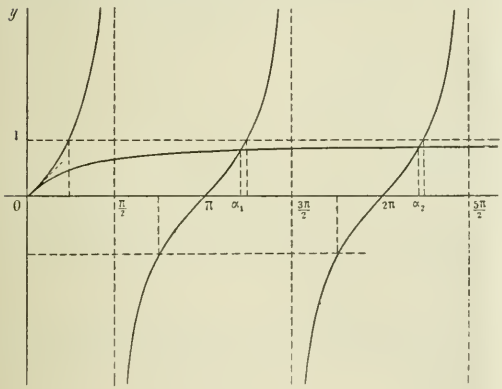
A la rigueur, ces remarques suffisent pour donner l'allure de la courbe.

Résolvons cependant l'équation $y' = 0$, qui s'écrit encore

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tgh} x,$$

et, sous cette forme, se résout immédiatement en traçant, x variant de 0 à $+\infty$, les courbes représentant les variations des deux fonctions $\operatorname{tg} x$ et $\operatorname{tgh} x$.

C'est ce qu'indique la figure suivante qui met en évidence que l'équation $y' = 0$ a une infinité de racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \ldots$ comprises respectivement entre π et $\pi + \frac{\pi}{4}$, 2π et $2\pi + \frac{\pi}{4}$, $\ldots$, $n\pi$ et $n\pi + \frac{\pi}{4} \ldots$



Nous ne tracerons pas la courbe représentant les variations de la fonction y en raison de la difficulté pratique provenant de la rapide augmentation des ordonnées de la chaînette.

2° Pour calculer $\int \operatorname{ch} x \cos x \, dx$, nous intégrerons par parties. Posons d'abord $\operatorname{ch} x dx = du$, $\cos x = v$; nous aurons

$$(1) \qquad \int \operatorname{ch} x \cos x dx = \operatorname{sh} x \cos x + \int \operatorname{sh} x \sin x dx.$$

Posons ensuite $\cos x dx = du$, $\operatorname{ch} x = v$; nous aurons

$$(2) \qquad \int \operatorname{ch} x \cos x dx = \operatorname{ch} x \sin x - \int \operatorname{sh} x \sin x dx.$$

Il suffit d'ajouter membre à membre les égalités (1) et (2) pour obtenir

$$\int \operatorname{ch} x \cos x dx = \frac{\operatorname{sh} x \cos x + \operatorname{ch} x \sin x}{2} + C.$$

3° Le moyen le plus naturel de développer y en série entière est d'écrire

$$y = \operatorname{ch} x \cos x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})(e^{ix} + e^{-ix}),$$

$$y = \frac{1}{4}\left[e^{x(1+i)} + e^{-x(1+i)} + e^{x(1-i)} + e^{-x(1-i)}\right].$$

Le terme général du développement est donc

$$\frac{x^n}{4.n!}\left[(1+i)^n + (-1)^n(1+i)^n + (1-i)^n + (-1)^n(1-i)^n\right].$$

Le coefficient de ce terme est nul si n est impair.

Prenons donc $n = 2p$; le coefficient devient

$$a_{2p} = \frac{1}{2.(2p)!}\left[(1+i)^{2p} + (1-i)^{2p}\right].$$

Or $$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \qquad 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Donc

$$a_{2p} = \frac{(\sqrt{2})^{2p}}{2(2p)!}\, 2\cos\frac{p\pi}{2}.$$

Si p est impair, ce coefficient est nul. Prenons donc $n = 2p = 4q$, il viendra

$$a_{4q} = \frac{4^q}{(4q)!}\cos q\pi = (-1)^q\frac{4^q}{(4q)!}.$$

Le développement en série entière cherché, absolument convergent quel que soit x, est donc

$$y = 1 - \frac{4}{4!}x^4 + \frac{4^2}{8!}x^8 - \cdots + (-1)^q\frac{4^q}{(4q)!}x^{4q} + \cdots.$$

Il était possible de retrouver ce développement en série en considérant y comme intégrale particulière d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Écrivons la suite des dérivées de y

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{ch} x \cos x, \\ y' &= \operatorname{sh} x \cos x - \operatorname{ch} x \sin x, \\ y'' &= -2\operatorname{sh} x \sin x, \\ y''' &= -2\operatorname{sh} x \cos x - 2\operatorname{ch} x \sin x, \\ y^{\text{IV}} &= -4\operatorname{ch} x \cos x. \end{aligned}$$

La fonction y est donc intégrale de l'équation différentielle

(3) $$y^{\text{IV}} + 4y = 0$$

et c'est l'intégrale qui pour $x = 0$ prend la valeur 1, y', y'', y''' s'annulant pour $x = 0$. Comme on sait que y est développable en série entière absolument convergente quel que soit x, comme ce développement est

$$y = y_0 + \frac{y'_0}{1}x + \frac{y''_0}{1.2}x^2 + \cdots + \frac{y_0^{(n)}}{n!}x^n + \cdots,$$

comme l'identité (3) s'écrit encore en différentiant n fois

$$y^{(n+4)} + 4y^{(n)} = 0 \qquad \text{et donne} \qquad y_0^{(n+4)} + 4y_0^{(n)} = 0,$$

le développement est ainsi plus rapidement obtenu.

Faisons encore la remarque que l'équation différentielle (3) a pour équation caractéristique

$$r^4 + 4 = 0, \qquad \text{ou} \qquad (r^2+2)^2 - 4r^2 = 0,$$
$$r^2 + 2 = \pm 2r, \qquad (r \pm 1)^2 = -1, \qquad r = \pm 1 \pm i.$$

Donc les intégrales s'écrivent

$$\lambda_1 e^{(1+i)x} + \lambda_2 e^{(1-i)x} + \lambda_3 e^{-(1-i)x} + \lambda_4 e^{-(1+i)x}$$

ou

$$e^x(\mu_1 \cos x + \mu_2 \sin x) + e^{-x}(\mu_3 \cos x + \mu_4 \sin x),$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\operatorname{ch}x(\nu_1 \cos x + \nu_2 \sin x) + \operatorname{sh}x(\nu_3 \cos x + \nu_4 \sin x).$$

On obtiendrait donc aussi rapidement les développements en série des fonctions

$$\operatorname{ch} x \sin x, \qquad \operatorname{sh} x \cos x, \qquad \operatorname{sh} x \sin x.$$

4° Pour calculer la valeur de $\operatorname{ch} x \cos x$ pour $x = 1$ avec 5 chiffres décimaux exacts, nous emploierons la série

$$y = 1 - \frac{4}{4!}x^4 + \frac{4^2}{8!}x^8 - \frac{4^3}{12!}x^{12} \cdots$$

Pour $x = 1$ on a

$$1 - \frac{4}{4!} + \frac{4^2}{8!} - \frac{4^3}{12!} + \cdots,$$

série alternée, absolument convergente, dont les termes vont en décroissant.

Je calcule ses termes avec une erreur de $\frac{1}{10^7}$, les termes positifs par défaut, les termes négatifs par excès :

u_1	1	u_2	0,1666667
u_3	0,0003968	u_4	0,0000002
	1,0003968		0,1666669

Nous obtenons comme somme

0,8337299 par défaut

sans tenir compte du reste, nous avons déjà une erreur de $\frac{3}{10^7}$ qui ne permet pas d'affirmer la 5ème décimale.

Prenons donc 8 décimales à chaque terme

u_1	1	u_2	0,16666667
u_3	0,00039682	u_4	0,00000014
	1,00039682		0,16666681

Cette fois, nous avons par défaut la somme

0,83373001.

L'erreur résultant des termes est $\frac{3}{10^8}$; le reste est inférieur à $\frac{4^4}{16!}$, c'est-à-dire inférieur à $\frac{1}{10^8}$.

Donc ch 1 cos 1 est compris entre

$$\begin{cases} 0{,}83373001, \\ 0{,}83373005. \end{cases}$$

En cherchant 5 chiffres décimaux exacts, nous en avons obtenu 7.

5° Rappelons qu'étant donnée l'équation différentielle $y'' + y'P(x) + yQ(x) = 0$, il est souvent utile d'introduire une fonction auxiliaire u et de faire le changement de fonction qui remplace y par z,

$$y = uz.$$

L'équation différentielle devient

$$uz'' + 2u'z' + u''z + (uz' + zu')P(x) + uzQ(x) = 0,$$

ou

$$uz'' + [2u' + uP(x)]z' + [u'' + u'P(x) + uQ(x)]z = 0,$$

et l'on peut simplifier l'équation différentielle en annulant le coefficient de z si u est une intégrale particulière de l'équation en y ou en annulant le coefficient de z' si u est intégrale de l'équation

$$2u' + uP(x) = 0.$$

Appliquons ces remarques à l'équation

$$y'' + 2y' \operatorname{tg} x + 2y \operatorname{tg}^2 x = 0.$$

Posons $y = uz$; il vient

$$uz'' + 2(u' + u \operatorname{tg} x)z' + (u'' + 2u' \operatorname{tg} x + 2u \operatorname{tg}^2 x)z = 0.$$

Première méthode. — La fonction

$$u = \operatorname{ch} x \cos x$$

est intégrale particulière de l'équation en y comme on le voit en éliminant $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ entre les trois relations

$$\begin{cases} u = \operatorname{ch} x \cos x, \\ u' = \operatorname{sh} x \cos x - \operatorname{ch} x \sin x, \\ u'' = -2 \operatorname{sh} x \sin x. \end{cases}$$

Donc l'équation en z devient

$$\operatorname{ch} x \cos x\, z'' + 2[\operatorname{sh} x \cos x - \operatorname{ch} x \sin x + \operatorname{ch} x \cos x \operatorname{tg} x]z' = 0,$$

ou $$\operatorname{ch} x \cos x\, z'' + 2 \operatorname{sh} x \cos x\, z' = 0, \qquad \frac{z''}{z'} + 2\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = 0,$$

d'où $$Lz' + L \operatorname{ch}^2 x = LC, \qquad \text{ou enfin} \qquad z' = \frac{C}{\operatorname{ch}^2 x}, \qquad z = C \operatorname{tg} h\, x + C'.$$

Donc

$$y = (C \operatorname{tg} h x + C') \operatorname{ch} x \cos x = (C \operatorname{sh} x + C' \operatorname{ch} x) \cos x.$$

Deuxième méthode. — L'équation différentielle $u' + u \operatorname{tg} x = 0$ s'intègre de suite

et donne $$\frac{u'}{u} + \frac{\sin x}{\cos x} = 0,$$

d'où $$Lu = L \cos x + L\lambda, \qquad u = \lambda \cos x.$$

Prenons donc $u = \cos x$. Il vient $$z'' \cos x + z \cos x = 0,$$

c'est-à-dire $$z'' + z = 0,$$

dont les intégrales sont de la forme $$z = C \operatorname{sh} x + C' \operatorname{ch} x.$$

On retrouve bien $$y = (C \operatorname{sh} x + C' \operatorname{ch} x) \cos x.$$

Très bonnes solutions : MM. Quéméneur, lycée de Rouen ; M. Laurence.
Bonnes solutions : MM. G. Bresse, à Belfort ; Le Blanc, collège Chaptal ; Bourrières, à Bordeaux.
Assez bonne solution : M. Dessimond, à Alger.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1481. — *On considère un paraboloïde π.*

1° *Par un point* M, *on peut mener un plan* P *et un seul qui coupe le paraboloïde π suivant une conique* C *admettant le point* M *pour centre.*

2° *Si le point* M *décrit une droite, le plan* P *reste tangent à un cylindre parabolique et, dans un cas particulier, passe par une droite fixe.*

3° *Si le point* M *décrit une conique dont les points à l'infini sont sur le paraboloïde π, le plan* P *reste tangent à un cône du second degré.*

4° *La conique* C *de section par le plan* P *étant supposée semblable ou égale à une conique donnée, on demande le lieu de son centre* M.

1° Soit le point M de coordonnées x_0, y_0, z_0. Un plan passant par ce point a pour équation

$$u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0) = 0.$$

Le diamètre de la direction de plans u, v, w a pour équations

$$\frac{Ax}{u} = \frac{By}{v} = \frac{-1}{w},$$

($Ax^2 + By^2 - 2z = 0$ désigne l'équation du paraboloïde).

S'il contient le point x_0, y_0, z_0, on a

$$\frac{u}{Ax_0} = \frac{v}{By_0} = \frac{w}{-1}.$$

Donc le plan P existe; il est unique et son équation est

$$Ax_0(x - x_0) + By_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

2° Supposons que le point M décrive la droite $x = \alpha z + p$, $y = \beta z + q$, l'équation du plan P devient, en fonction de z_0,

$$-z_0^2(A\alpha^2 + B\beta^2) + z_0(A\alpha x + B\beta y - 2A\alpha p - 2B\beta q + 1) + Apx + Bqy - z - Ap^2 - Bq^2 = 0.$$

Le plan P enveloppe donc le cylindre parabolique

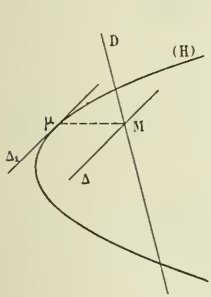
$$(A\alpha x + B\beta y - 2A\alpha p - 2B\beta q + 1)^2 + 4(A\alpha^2 + B\beta^2)(Apx + Bqy - z - Ap^2 - Bq^2) = 0.$$

On peut d'ailleurs éviter de faire appel à la notion d'enveloppe de surface et remarquer que le plan P est parallèle à une direction fixe et que sa trace sur un plan de coordonnées enveloppe une parabole.

Si l'on a $A\alpha^2 + B\beta^2 = 0$, c'est-à-dire si la droite donnée est parallèle à un des plans directeurs du paraboloïde π, le plan P passe par une droite fixe.

Voici une solution géométrique de cette partie :

Remarquons d'abord que le plan P qui correspond à un point M est parabole au plan tangent à l'extrémité du diamètre du point M.

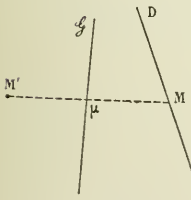


Soit donc D la droite décrite par le point M. Nous allons considérer le plan parallèle à l'axe du paraboloïde et passant par D.

1er Cas. — Il coupe le paraboloïde suivant une parabole H. C'est dire que D n'est pas parallèle à un plan directeur.

Les plans P correspondant aux divers points de la droite D sont parallèles aux génératrices du cylindre circonscrit le long de la parabole H. Cherchons donc l'enveloppe de leurs traces sur le plan de la parabole H qui s'obtiennent en menant par chaque point M de D une parallèle Δ à la tangente Δ_1 à la parabole H au point μ situé sur le même diamètre que M.

La droite Δ enveloppe une parabole parce que le point M et le point à l'infini de Δ décrivent deux divisions homographiques; et cette parabole est aisée à déterminer.



2e Cas. — La droite D est parallèle à un plan directeur.

Le plan parallèle à l'axe du paraboloïde mené par D donne à distance finie une génératrice G et si $M\mu$ est parallèle à l'axe, le plan P passe par M et est parallèle au plan tangent en μ.

Il passe par une droite fixe, car son pôle est le point M' de $M\mu$ tel que μ soit le milieu de MM', et ce pôle décrit évidemment une droite passant par le point commun de G et de D.

3° Si le point M décrit une conique, on a

$$x_0 = \frac{f_1(t)}{\varphi(t)}, \quad y_0 = \frac{f_2(t)}{\varphi(t)}, \quad z_0 = \frac{f_3(t)}{\varphi(t)},$$

f_1, f_2, f_3, φ désignant des polynomes du second degré.

L'équation du plan P devient alors

$$Axf_1\varphi + Byf_2\varphi - z\varphi^2 - Af_1^2 - Bf_2^2 + f_3\varphi = 0.$$

Elle contient le paramètre t au quatrième degré. Donc le plan P reste tangent à une surface développable de quatrième classe.

Si les points à l'infini de la conique sont sur le paraboloïde, les racines de $\varphi(t) = 0$ sont racines de $Af_1^2 + Bf_2^2 = 0$.

Donc le premier membre de l'équation du plan P est dans ce cas divisible par $\varphi(t)$ et, ce facteur enlevé, se réduit à

$$Pt^2 + Qt + R = 0,$$

P, Q, R désignant les premiers membres des équations de trois plans.

Le plan P enveloppe donc le cône du second degré

$$Q^2 - 4PR = 0$$

de sommet $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ et, en transportant l'origine en ce point on peut obtenir ce résultat indépendamment de la théorie des surfaces enveloppes.

Montrons brièvement que ce calcul peut être fait d'une manière plus précise.

Supposons le plan des xy parallèle au plan de la conique décrite par le point M, ce que l'on peut faire en prenant l'équation réduite du paraboloïde en axes obliques.

Soient

$$(1) \qquad \begin{cases} Ax_0^2 + By_0^2 + 2Cx_0 + 2Dy_0 + F = 0, \\ z_0 = h \end{cases}$$

les deux relations exprimant que le point x_0, y_0, z_0 décrit une conique du plan $z = h$ dont les points à l'infini sont sur le paraboloïde.

En se servant des relations (1), l'équation du plan P s'écrit

$$Axx_0 + Byy_0 - z + 2Cx_0 + 2Dy_0 + F + h = 0.$$

Il passe par le point fixe $x = -\frac{2C}{A}$, $y = -\frac{2D}{B}$, $z = F + h$ et sa trace sur le plan $z = h$ s'écrit

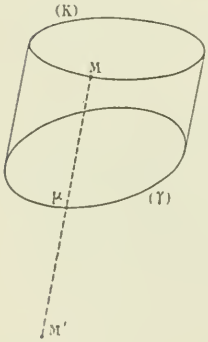
$$Axx_0 + Byy_0 + 2Cx_0 + 2Dy_0 + F = 0.$$

Elle contient linéairement x_0, y_0 qui sont liés par une relation du second degré.

On sait que dans ces conditions, cette trace enveloppe une conique dont l'équation tangentielle s'écrit de suite et dont l'équation ponctuelle s'obtient par la règle habituelle.

Traitons maintenant cette question géométriquement.

Dire que le point M décrit une conique K ayant ses points à l'infini sur le paraboloïde, c'est dire que le cylindre qui admet la conique K comme directrice et qui est parallèle à l'axe du paraboloïde coupe ce paraboloïde à distance finie suivant une conique puisqu'il lui est homothétique. Soit une génératrice $M\mu$ de ce cylindre.



Le plan P correspondant au point M passe par M et est parallèle au plan tangent en μ. Donc, son pôle est en M' sur $M\mu$, M' étant tel que

$$\mu M' = M\mu.$$

Or, le point M' décrit une section plane du cylindre considéré, c'est-à-dire une conique.

Les points d'une conique sont dans un plan ; il y en a deux sur une droite de ce plan.

Les plans P passent donc par un point fixe ; il y en a deux passant par une droite contenant ce point fixe. Ils enveloppent donc un cône du second degré.

4° Nous cherchons les lieux des centres des coniques d'un paraboloïde qui sont semblables ou égales à une conique donnée. Le premier lieu est une surface. Le second est une courbe.

Si une section plane est semblable à une conique donnée, toutes les sections par des plans parallèles le sont aussi. Le premier lieu peut donc s'obtenir comme étant le cylindre de génératrices parallèles à l'axe du paraboloïde dont la directrice est sur le paraboloïde le lieu des points par où passent deux génératrices faisant un angle donné.

Mais il vaut mieux, dans le cas présent, chercher le second lieu, problème qui se ramène au suivant :

Exprimer que le paraboloïde est coupé par le plan

$$Ax_0(x - x_0) + By_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

suivant une conique de grandeur donnée.

Transportons l'origine au point x_0, y_0, z_0. L'équation du plan devient

$$(3) \qquad Ax_0X + By_0Y - Z = 0,$$

et celle du paraboloïde

$$A(X + x_0)^2 + B(Y + y_0)^2 - 2(Z + z_0) = 0$$

ou

$$(4) \qquad AX^2 + BY^2 + 2Ax_0X + 2By_0Y - 2Z + Ax_0^2 + By_0^2 - 2z_0 = 0.$$

La conique de section du plan (3) par le paraboloïde (4) est la même que par le cylindre

$$(5) \qquad AX^2 + BY^2 + f_0 = 0,$$

en posant pour abréger $\qquad f_0 = Ax_0^2 + By_0^2 - 2z_0.$

Cela posé, les longueurs des axes de la conique [(3), (5)] s'obtiendront par la méthode classique. Coupons par la sphère

$$(6) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 = 0.$$

Le cône qui a son sommet à l'origine et qui s'appuie sur la courbe d'intersection des surfaces (5) et (6) est du second degré et a pour équation

$$X^2\left(\frac{A}{f_0} + \frac{1}{R^2}\right) + Y^2\left(\frac{B}{f_0} + \frac{1}{R^2}\right) + \frac{Z^2}{R^2} = 0, \qquad \text{ou} \qquad X^2(AR^2 + f_0) + Y^2(BR^2 + f_0) + Z^2 f_0 = 0.$$

S'il est tangent au plan (3), R sera la longueur d'un des demi-axes de la conique considérée ; et cette condition est

$$\frac{A^2x^0}{AR^2 + f_0} + \frac{B^2y_0^2}{BR^2 + f_0} + \frac{1}{f_0} = 0.$$

Rendue entière, elle donne l'équation en R^2,

$$ABR^4 + f_0(A + B + A^2Bx_0^2 + AB^2y_0^2)R^2 + f_0^2(A^2x_0^2 + B^2y_0^2 + 1) = 0.$$

Si ses racines sont données, on a

$$f_0(A + B + A^2Bx_0^2 + AB^2y_0^2) = H, \qquad f_0^2(A^2x_0^2 + B^2y_0^2 + 1) = K,$$

H et K désignant deux constantes données.

La courbe définie par ces deux équations donne le lieu des centres des coniques de grandeur donnée placées sur le paraboloïde.

En formant une combinaison homogène de H^2 et de K, on aura la surface lieu des centres des coniques du paraboloïde semblables à une conique donnée. Son équation est par exemple

$$\frac{[A + B + AB(Ax_0^2 + By_0^2)]^2}{A^2x_0^2 + B^2y_0^2 + 1} = \frac{H^2}{K}.$$

En particulier, le lieu des centres des hyperboles équilatères du paraboloïde est le cylindre

$$Ax_0^2 + By_0^2 + \frac{1}{A} + \frac{1}{B} = 0$$

qui coupe bien le paraboloïde suivant l'hyperbole de Monge contenue dans le plan

$$2z + \frac{1}{A} + \frac{1}{B} = 0.$$

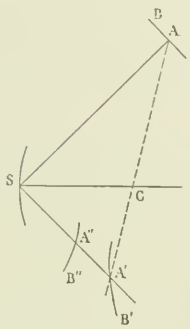
Très bonnes solutions : MM. Quémeneur, lycée de Rouen ; E. Sizaire.
Bonnes solutions : MM. Laurence ; Custaud à Philippeville. Bonne solution géométrique de M. Parrod.

PHYSIQUE

1475. — *Vis-à-vis d'un miroir sphérique de petite ouverture, on place un quadrillage vivement éclairé, dans une position telle que la droite joignant le centre du quadrillage au sommet du miroir fasse avec l'axe de celui-ci un angle de 45°.*

Le plan du quadrillage est normal à cette droite et les traits sont les uns normaux, les autres parallèles au plan d'incidence moyen. Que doit-on trouver en explorant le faisceau réfléchi à l'aide d'un écran?

Soit C le centre du miroir S et A celui du quadrillage. Supposons que ce point A soit à la croisée de deux traits du quadrillage. Les rayons lumineux qui en émanent donneront lieu, après réflexion sur le miroir, à deux focales qui seront rencontrées par la symétrique de SA par rapport à SC. L'une sera située à l'intersection A′ de cette droite et de AC, et dirigée suivant AC; l'autre sera perpendiculaire au plan de la figure en un point A″ tel que l'on ait, d'après l'équation de Petit,



$$\frac{1}{SA} + \frac{1}{SA''} = \frac{2}{R\cos i} = \frac{2\sqrt{2}}{R}.$$

Si maintenant nous considérons les divers points de la ligne AB du quadrillage, chacun donnera lieu à deux focales analogues. Les focales A′ seront toutes situées dans le plan de la figure et leurs milieux appartiendront à un arc de courbe A′B′, de sorte que l'ensemble de ces focales formera une bande lumineuse excessivement étroite ayant la direction générale de A′B′. Les focales A″ formeront au contraire, en se juxtaposant, une bande assez large, perpendiculaire au plan de la figure et le rencontrant suivant A″B″. Chacune des lignes du quadrillage parallèles à AB donnera lieu de même à deux bandes lumineuses, l'une étroite et située sensiblement dans le plan mené par C et par la ligne considérée, l'autre large et perpendiculaire à ce plan. Les bandes telles que A′B′ seront sensiblement parallèles entre elles, ainsi que les bandes telles que A″B″.

Considérons maintenant les lignes du quadrillage qui sont perpendiculaires à la figure. Les focales A′B′ de leurs divers points formeront de larges bandes normales aux précédentes, mais les focales A″ formeront des séries de lignes étroites perpendiculaires au plan de la figure.

Supposons que l'on déplace un écran dans le champ des rayons réfléchis de manière à ce qu'il reste perpendiculaire au plan de la figure.

En A′, et surtout si on l'oriente de manière à lui donner la direction générale de la courbe A′B′, on verra l'image nette des traits parallèles au plan de la figure. En A″, on verra, au contraire, l'image nette des traits perpendiculaires au plan de la figure.

M. LAURENCE.

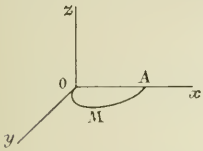
EXAMENS DE 1906 (*Suite*).

CERTIFICAT D'ÉTUDES SUPÉRIEURES (*Paris, juillet 1906*).

Mathématiques préparatoires.

Épreuve écrite.

I. — **1555** Étant donnés trois axes rectangulaires $Oxyz$, on prend sur Ox une longueur $OA = 2$ et on



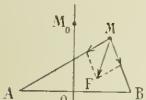
décrit sur OA comme diamètre dans le plan xOy, une demi-circonférence OMA. Calculer le volume limité inférieurement par le plan xOy, latéralement par la surface du cylindre droit ayant pour base le demi-cercle OMA et supérieurement par la surface courbe ayant pour équation $z = x^2y$.

Nota. — On pourra commencer par évaluer le volume élémentaire compris entre deux plans infiniment voisins passant par Oz.

II. — Calculer l'intégrale définie $I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{20 + 16\cos x}$.

III. — **1556**. Déterminer l'exposant constant n par la condition que l'expression $\frac{(x - y\,dx + (x + y)dy}{x^2 + y^2)^n}$ soit la différentielle totale d'une fonction U des deux variables indépendantes x et y. L'exposant n étant ainsi déterminé, calculer la fonction U.

IV. — **1557**. On considère deux points fixes A et B, situés à une distance AB égale à un décimètre. Un point mobile M est attiré par chacun de ces points avec une intensité constante égale à 1 dyne. Montrer que la résultante F des deux attractions dérive d'une fonction de forces U et calculer cette fonction. Déterminer les surfaces de niveau. On abandonne le mobile sans vitesse initiale, dans une position M_0 également distante des deux centres attractifs. Appliquer le théorème de la force vive au mouvement du point et calculer dans le système C. G. S. la vitesse avec laquelle il arrive en O en supposant la distance OM_0 égale à 12 centimètres et la masse m du point égale à 2 grammes.



Épreuve pratique.

1° Construire la partie de la courbe

$$y = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x - 1}$$

correspondant aux valeurs de x supérieures à $\frac{1}{2}$.

2° Montrer que cette partie de la courbe est tangente à l'axe Ox et déterminer le point de contact A.

3° Calculer à $\frac{1}{100}$ près la valeur de x qui rend y maximum et la valeur correspondante de y.

4° Démontrer que la courbe présente un point d'inflexion entre le point A et le point M qui correspond au maximum de y.

QUESTION PROPOSÉE

1558 — On considère l'équation différentielle :

$$(x - 1)\,y' - y = 3x^4 - 12x^3 + 17x^2 - 10x.$$

1° Former l'intégrale générale de cette équation, en la faisant dépendre de sa valeur pour $x = 0$ prise comme paramètre variable ;

2° Discuter suivant les valeurs du paramètre la réalité des racines de l'équation qu'on obtient en égalant l'intégrale générale à 0 ;

3° Lieu des points d'inflexion des courbes intégrales C ;

4° Former l'équation du lieu Γ des points des courbes C où la tangente est parallèle à une direction donnée de coefficient angulaire m. Quand m varie, le lieu Γ est la courbe intégrale générale d'une équation différentielle qu'on demande de déterminer. Construire Γ pour $m = 0$;

5° Construire les diverses formes des courbes intégrales C, suivant les valeurs du paramètre dont elles dépendent. En particulier, on construira les courbes C tangentes à Ox.

Ch. Michel.

DEUXIÈME PARTIE

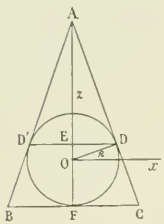
ALGÈBRE

1503. — *Étudier les variations de la surface totale d'un cône de révolution circonscrit à une sphère. Trouver la surface minimum et la distance du sommet de ce cône particulier au centre de la sphère.*

Trouver par le calcul intégral le volume compris entre la surface du cône circonscrit proprement dite et celle de la sphère qui prolonge celle-ci, dans le cas particulier où la surface est minimum.

Trouver le centre de gravité de ce volume particulier.

Nous rapporterons la sphère à trois axes rectangulaires passant au centre de cette sphère, Oz étant placé sur la hauteur du cône et dirigé vers le sommet, et nous désignerons par z la distance du sommet A au centre de la sphère. Nous aurons alors d'une façon évidente,



$$AD = \sqrt{z^2 - R^2}, \qquad \frac{AC}{AO} = \frac{AF}{AD}, \qquad AC = \frac{z(z+R)}{\sqrt{z^2 - R^2}};$$

puis,
$$CF = CD = AC - AD = \frac{z(z+R)}{\sqrt{z^2 - R^2}} - \sqrt{z^2 - R^2}.$$

$$CF = \frac{R(z+R)}{\sqrt{z^2 - R^2}}.$$

Or la surface totale du cône est

$$S = \pi \overline{CF}^2 + \pi CF.AC = \pi CF(CF + AC);$$

donc
$$S = \frac{\pi R(z+R)}{\sqrt{z^2 - R^2}} \frac{(z+R)^2}{\sqrt{z^2 - R^2}};$$

$$S = \frac{\pi R(z+R)^2}{z - R}.$$

Nous déduisons de là immédiatement

$$\frac{dS}{dz} = \frac{\pi R(z^2 - 2Rz - 3R^2)}{(z-R)^2}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{dS}{dz} = \frac{\pi R(z+R)(z-3R)}{(z-R)^2}.$$

D'autre part, des remarques géométriques évidentes nous montrent que z doit varier de R à $+\infty$. Comme $\frac{dS}{dz}$ est négatif pour $z < 3R$ et positif pour $z > 3R$, nous voyons de suite les variations de S : S décroît depuis $+\infty$ jusqu'à $8\pi R^2$, quand z croît de R à 3R ; puis, S croît depuis $8\pi R^2$ jusqu'à $+\infty$, quand z croît de 3R à $+\infty$. Le minimum de S est donc $8\pi R^2$ et il a lieu pour $OA = z = 3R$.

Il est alors facile de calculer le volume du cône AED et celui du segment sphérique DFD'. Chacun d'eux est fourni par l'intégrale $\int \pi x^2 dz$, x étant limité soit à la droite AD, soit à l'arc de cercle DF. Nous avons en outre $OE = \frac{R^2}{OA} = \frac{R}{3}$; par conséquent, les limites de la première intégrale sont $\frac{R}{3}$ et 3R, celles de la seconde, $-R$ et $\frac{R}{3}$. Sur la droite AD, on a $\frac{x}{ED} = \frac{3R - z}{3R - \frac{R}{3}} = 3.\frac{3R - z}{8R}$; d'ailleurs, $ED = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{9}} = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$; par suite $x = \frac{(3R - z)\sqrt{2}}{4}$. Sur l'arc DF, on a

$$x^2 + z^2 = R^2, \qquad x^2 = R^2 - z^2.$$

Donc finalement le volume du cône AED est donné par

$$V_1 = \frac{\pi}{8}\int_{\frac{R}{3}}^{3R}(3R-z)^2dz = \frac{64\pi R^3}{81};$$

celui du segment sphérique est donné par

$$V_2 = \pi\int_{-R}^{\frac{R}{3}}(R^2-z^2)dz = \frac{80\pi R^3}{81}.$$

Le volume total est donc égal à $\frac{16\pi R^3}{9}$.

Cherchons maintenant les z des centres de gravité de ces deux volumes ; nous aurons, pour déterminer ces deux valeurs,

$$V_1z_1 = \int_{\frac{R}{3}}^{3R} zdV = \int_{\frac{R}{3}}^{3R}\frac{\pi}{8}z(3R-z)^2dz = \frac{512.\pi R^5}{8.81},$$

$$V_2z_2 = \int_{-R}^{\frac{R}{3}} zdV = \int_{-R}^{\frac{R}{3}}\pi z(R^2-z^2)dz = -\frac{64\pi R^5}{4.81},$$

et nous déduisons de là

$$z_1 = R, \qquad z_2 = -\frac{R}{5}.$$

La première valeur de z se calcule aisément en s'appuyant sur ce théorème : que le centre de gravité d'un cône ou d'une pyramide est situé à une distance de la base égale au quart de la hauteur. Nous avons ainsi

$$z_1 - \frac{R}{3} = \frac{1}{4}\left(3R - \frac{R}{3}\right),$$

d'où

$$z_1 = R.$$

Le z du centre de gravité du volume total est alors fourni par l'égalité $Vz = V_1z_1 + V_2z_2$, qui nous donne $z = \frac{R}{3}$: le centre de gravité est au point E.

G. FOUCRY, à Roanne.

Bonne solution de M. R. Manen, à Albi (Institution Sainte-Marie).

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1477. — *On considère la cissoïde droite* $(x^2+y^2)x - ay^2 = 0$ *rapportée à deux axes rectangulaires* Ox, Oy *et le cercle générateur* $x^2+y^2-ax=0$. *On prend un point variable* M *sur la cissoïde et la polaire* Δ *de ce point par rapport au cercle.*

1° *Lieu du point de rencontre de la droite* OM *et de la droite* Δ *quand le point* M *décrit la cissoïde.*

2° *Par un point* P *quelconque du plan passent trois droites* Δ *correspondant à trois points* M_1, M_2, M_3 *de la cissoïde. Démontrer que ces trois points sont en ligne droite, et construire la courbe que doit décrire le point* P *pour que, des trois droites* OM_1, OM_2, OM_3, *l'une soit bissectrice de l'angle des deux autres.*

1. Si l'on désigne par t le coefficient angulaire de la droite OM, les coordonnées du point M sont

$$x = \frac{at^2}{t^2+1}, \qquad y = \frac{at^3}{t^2+1},$$

et la polaire Δ de ce point par rapport au cercle a pour équation

$$\frac{at^2}{t^2+1}(2x-a) + \frac{at^3}{t^2+1}2y - ax = 0.$$

ou

$$(1) \qquad 2t^3y + t^2(x-a) - x = 0.$$

Pour avoir le lieu du point de rencontre des droites OM et Δ, il faut éliminer t entre l'équation (1) et l'équation $y = tx$, ce qui revient à remplacer dans (1) t par $\frac{y}{x}$; on obtient ainsi

$$\frac{2y^4}{x^3} + \frac{y^2(x-a)}{x^2} - x = 0, \qquad \text{ou} \qquad 2y^4 + x^2y^2 - x^4 - axy^2 = 0,$$

ou enfin

$$(x^2+y^2)(2y^2-x^2) - axy^2 = 0.$$

Cette équation représente une courbe du quatrième degré, symétrique par rapport à Ox, admettant un point triple à l'origine.

Pour la construire, nous poserons $y = tx$; nous avons alors

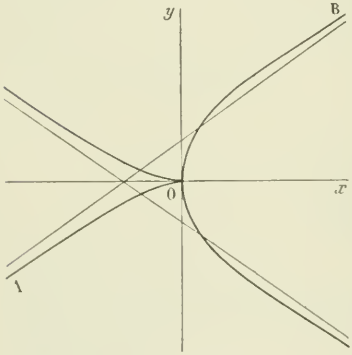
$$x = \frac{at^2}{(t^2+1)(2t^2-1)}, \qquad y = \frac{at^3}{(t^2+1)(2t^2-1)},$$

et nous allons étudier les variations de x et de y quand t varie. Si l'on change t en $-t$, x ne change pas et y change de signe; cela nous montre de nouveau que la courbe est symétrique par rapport à Ox; et pour en avoir la moitié, il suffira de faire varier t de 0 à $+\infty$.

Prenons les dérivées de x et de y par rapport à t; nous avons

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2at(2t^4+1)}{(2t^2-1)^2(t^2+1)^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{at^2(2t^4-t^2+3)}{(2t^2-1)^2(t^2+1)^2};$$

donc $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ sont toujours négatifs, et par suite, x et y sont des fonctions décroissantes. Ces fonctions sont discontinues pour $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



t	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
x	0	décroît	$-\infty \mid +\infty$	décroît	0
y	0	décroît	$-\infty \mid +\infty$	décroît	0

Nous obtenons ainsi les branches de courbe OA et BO; la première est tangente à l'origine à Ox, et la deuxième à Oy.

Le coefficient angulaire de la direction asymptotique est $\frac{1}{\sqrt{2}}$; pour avoir l'ordonnée à l'origine de l'asymptote, il faut chercher la limite de $y - \frac{x}{\sqrt{2}}$, ou de $tx - \frac{x}{\sqrt{2}}$ ou encore de $\frac{x(t\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$.

Nous avons donc

$$y - \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{x(t\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}} = \frac{at^2(t\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(t^2+1)(2t^2-1)},$$

ou, en divisant haut et bas par $t\sqrt{2}-1$,

$$(2) \qquad y - \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{at^2}{\sqrt{2}(t^2+1)(t\sqrt{2}+1)},$$

et alors pour $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a

$$\lim.\left(y - \frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{a}{6\sqrt{2}}.$$

Donc l'équation de l'asymptote est

$$(3) \qquad Y - \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{a}{6\sqrt{2}}.$$

Pour avoir la position des branches de courbe par rapport à cette asymptote, il faut chercher le signe de $y - Y$ pour les valeurs de t voisines de $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Retranchons les égalités (2) et (3) membre à membre, nous avons

$$y - Y = \frac{at^2}{\sqrt{2}(t^2+1)(t\sqrt{2}+1)} - \frac{a}{6\sqrt{2}} = \frac{a(-t^3\sqrt{2}+5t^2-t\sqrt{2}-1)}{6\sqrt{2}(t\sqrt{2}+1)(t^2+1)},$$

ou

$$y - Y = \frac{a(-t^2\sqrt{2}+4t+\sqrt{2})\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{6\sqrt{2}(t\sqrt{2}+1)(t^2+1)}.$$

Le second membre est de la forme $\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)f(t)$, $f(t)$ désignant une fonction rationnelle qui est positive pour $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc, pour les valeurs de t voisines de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y - Y$ a le signe de $t - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Il en résulte que la branche OA qui correspond à $t < \frac{1}{\sqrt{2}}$ est au-dessous de l'asymptote, tandis que la branche OB est au-dessus.

Nous aurons toute la courbe en construisant les symétriques des branches OA, OB et de l'asymptote par rapport à Ox.

2. Pour que la droite Δ passe par le point P, il faut et il suffit que son pôle M par rapport au cercle soit situé sur la polaire du point P. Or cette polaire rencontre la cissoïde en trois points ; donc, il existe trois droites Δ passant par le point P, et les points M correspondants sont en ligne droite.

On peut d'ailleurs le vérifier analytiquement. Une droite quelconque $ux + vy + w = 0$ rencontre la cissoïde en trois points dont les t sont racines de l'équation

$$\frac{uat^2}{1+t^2} + \frac{vat^3}{1+t^2} + w = 0,$$

ou

$$(4) \qquad vat^3 + (ua + w)t^2 + w = 0.$$

Dans cette équation le coefficient de t est nul ; par conséquent, pour que trois points de la cissoïde soient en ligne droite, il faut que les t de ces points vérifient la relation $\Sigma t_1 t_2 = 0$.

Cela posé, écrivons que la droite Δ passe par le point $P(x_0, y_0)$, nous avons

$$(5) \qquad 2t^3 y_0 + t^2(x_0 - a) - x_0 = 0 ;$$

cette équation admet trois racines qui vérifient la relation $\Sigma t_1 t_2 = 0$, donc les trois points correspondants sont en ligne droite : et si l'on identifie les équations (4) et (5), on obtient pour u, v, w les coefficients de la polaire du point P par rapport au cercle.

Soient t_1, t_2, t_3 les racines de l'équation (5) ; ces nombres sont les coefficients angulaires des droites OM_1, OM_2, OM_3. Pour que la droite OM_1 soit bissectrice des droites OM_2 et OM_3, il faut qu'on ait

$$\frac{t_1 - t_2}{1 + t_1 t_2} + \frac{t_1 - t_3}{1 + t_1 t_3} = 0,$$

ou $(t_1 - t_2)(1 + t_1 t_3) + (t_1 - t_3)(1 + t_1 t_2) = 0$, ou encore, $2t_1 - (t_2 + t_3) + t_1(t_1 t_3 + t_1 t_2) - 2t_1 t_2 t_3 = 0$.

Nous avons $t_1 t_3 + t_1 t_2 + t_2 t_3 = 0$, par suite $t_1 t_3 + t_1 t_2 = -t_2 t_3$; de sorte que l'égalité précédente peut s'écrire

$$3t_1 - (t_1 + t_2 + t_3) - 3t_1 t_2 t_3 = 0.$$

Or nous avons

$$t_1 + t_2 + t_3 = -\frac{x_0 - a}{2y_0}, \qquad t_1 t_2 t_3 = \frac{x_0}{2y_0};$$

en remplaçant, on a

$$3t_1 + \frac{x_0 - a}{2y_0} - \frac{3x_0}{2y_0} = 0 \qquad \text{ou} \qquad t_1 = \frac{2x_0 + a}{6y_0}.$$

Tout revient donc à écrire que $\frac{2x_0 + a}{6y_0}$ est racine de l'équation (3), ce qui donne

$$\frac{(2x_0 + a)^3}{108y_0^2} + \frac{(2x_0 + a)^2(x_0 - a)}{36y_0^2} - x_0 = 0,$$

ou, en supprimant les indices,

$$y^2 = \frac{(2x + a)^2(5x - 2a)}{108x}.$$

C'est l'équation du lieu ; elle représente une courbe du troisième degré, symétrique par rapport à Ox. A chaque valeur de x correspondent deux valeurs de y, égales et de signes contraires ; nous considérerons seulement l'une d'elles, par exemple celle qui est définie par l'équation

$$y = \frac{2x + a}{6}\sqrt{\frac{5x - 2a}{3x}},$$

le radical étant supposé précédé du signe $+$.

Pour que y soit réel, il faut que $\frac{5x - 2a}{3x}$ soit positif, et, pour cela, que x soit extérieur à l'intervalle $\left(0, \frac{2a}{5}\right)$.

La dérivée de y par rapport à x est

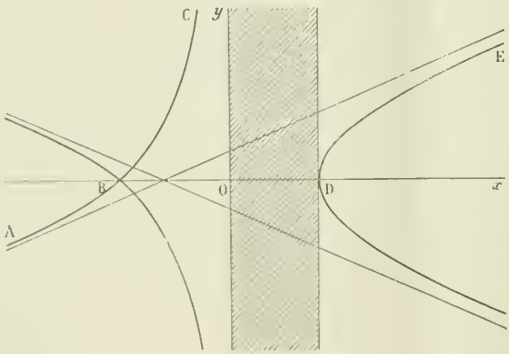
$$\frac{dy}{dx} = \frac{10x^2 - 2ax + a^2}{18x^2\sqrt{\frac{5x - 2a}{3x}}},$$

elle est toujours positive, donc la fonction y est croissante. Ses variations sont représentées par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{a}{2}$		0		$\frac{2a}{5}$		$+\infty$
y	$-\infty$	*croît*	0	*croît*	$+\infty$		0	*croît*	$+\infty$

Nous en déduisons la branche de courbe ABC asymptote à Oy, et la branche DE, la tangente au point D étant parallèle à Oy.

Cherchons maintenant si les branches infinies BA et DE ont une asymptote. Pour cela, nous allons développer y par rapport aux puissances descendantes de x.



Nous pouvons écrire

$$y = \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \frac{2x + a}{6}\left(1 - \frac{2a}{5x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

ou, en développant $\left(1 - \frac{2a}{5x}\right)^{\frac{1}{2}}$ par la formule du binome,

$$y = \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \frac{2x + a}{6}\left(1 - \frac{a}{5x} - \frac{a^2}{50x^2} + \frac{\lambda}{x^3}\right),$$

λ restant fini, quand x augmente indéfiniment.

Nous en tirons

$$y = \sqrt{\frac{5}{3}}\left(\frac{x}{3} + \frac{a}{10} - \frac{a^2}{25x} + \frac{\mu}{x^2}\right);$$

par suite, l'asymptote a pour équation

$$Y = \sqrt{\frac{5}{3}}\left(\frac{x}{3} + \frac{a}{10}\right),$$

et l'on a

$$y - Y = \sqrt{\frac{5}{3}}\left(-\frac{a^2}{25x} + \frac{\mu}{x^2}\right).$$

Le second membre a le signe de $-\frac{a^2}{25x}$ pour les valeurs de x suffisamment grandes. Par suite, la branche BA est au-dessus de l'asymptote, et la branche DE au-dessous.

En achevant par symétrie par rapport à Ox, on obtient la figure ci-dessus.

G. PÉLISSIER, à Toulouse.

Bonnes solutions par MM. G. Bresse, à Belfort ; G. Foucry, à Roanne ; G. Frey, à Alger ; A. Le Blanc, collège Chaptal ; Jean Mattos, à Leyssin ; Montpezat d'Estaing, école des Anglais, le Point-du-Jour, Lyon ; Jules Yernaux, école des mines, à Mons.

PHYSIQUE

1484. — *Pour déterminer l'indice d'une lentille plan-convexe, on procède aux opérations suivantes ;*

1° On mesure le rayon de courbure de la face convexe à l'aide d'un sphéromètre. Le déplacement de la vis affleurant successivement la lentille et le plan de l'instrument est trouvé égal à $10^{mm},024$, *avec une incertitude de* $0^{mm},005$. *Le rayon du cercle passant par les trois pieds est de* $56^{mm},3$, *avec une incertitude de* $0^{mm},15$.

2° On mesure l'épaisseur de la lentille : on trouve 20^{mm} *avec une erreur possible de* $0^{mm},25$.

3° On argente la face convexe puis, observant du côté de la face plane, on détermine la position du centre du miroir concave équivalent à la lentille ; on trouve ce point à 95^{mm} *de la face plane, avec une erreur possible de* 1^{mm}.

Calculer l'indice, ainsi que l'erreur qui pourrait affecter la mesure ainsi faite.

Cherchons d'abord le rayon de courbure R de la face convexe : a désignant le déplacement de la vis et r le rayon du cercle circonscrit aux trois pieds, R est donné par la formule

$$R = \frac{1}{2}\left(a + \frac{r^2}{a}\right),$$

et la valeur numérique déduite des données est

$$R = 163^{mm},1.$$

L'incertitude sur R est donnée par la différentielle

$$\delta R = \frac{1}{2}\left\{\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)\delta a + \frac{2r}{a}\delta r\right\}$$

ou, en donnant à chaque terme une valeur positive,

$$\delta R = \frac{1}{2}\left\{(\overline{5,6}^2 - 1) \times 0,005 + 2 \times 5,6 + 0,15\right\} = 0^{mm},92.$$

D'autre part, le centre du miroir équivalent à la lentille argentée est le conjugué, par rapport à la face plane, du centre de la face convexe. Si l'on désigne par d sa distance à la lentille et par e l'épaisseur de celle-ci, on aura donc

$$R - e = nd, \qquad \text{d'où} \qquad n = \frac{R - e}{d},$$

ce qui donne. avec les nombres trouvés, $n = 1{,}506$.

L'incertitude sur n sera

$$\delta n = \frac{\delta R}{d} - \frac{\delta e}{d} - \frac{R - e}{d^2}\,\delta d,$$

ou, en donnant toujours à chaque terme une valeur positive,

$$\delta n = \frac{0{,}92}{95} + \frac{0{,}25}{95} + \frac{143}{95 \times 95} = 0{,}028.$$

La méthode apparait donc comme peu précise.

M. LAURENCE.

ÉCOLE CENTRALE (1906)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

Arithmétique (M. Combette.)

3343. — Ecrire le nombre 5324 dans le système de base 8.

3344. — Reste de la division par 11 des nombres 7 915, $7\,915^2$, $7\,915^3$.

3345. — Tout nombre entier est un produit de facteurs premiers.

3346. — Plus grand commun diviseur, plus petit multiple commun de trois nombres A, B, C.

3347. — Réduire les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ au plus petit dénominateur commun.

3348. — Former les diviseurs d'un nombre. Exemples :

$$N = 3^2 \times 5^2 \times 7\,; \qquad N = 2^4 \times 5^2 \times 7\,; \qquad N = 2^4 \times 3^2 \times 5^3.$$

3349. — Nombre des diviseurs de $N = 2^3 \times 5^2 \times 7$.

3350. — Diviseurs du nombre $N = 2^5.3^2.7$. — Nombre et somme de ces diviseurs.

3351. — Extraire la racine carrée du nombre 74.524 et faire la théorie sur cet exemple.

3352. — Calculer le quotient $\frac{0{,}518}{0{,}0241}$ à $\frac{1}{100}$ près.

3353. — Limite de l'erreur du quotient $\frac{31{,}915}{0{,}7914}$, l'erreur sur chaque terme étant inférieure à une unité de l'ordre de son dernier chiffre.

3354. — Calculer $\frac{1}{\pi}$ à $\frac{1}{1\,000}$ près ; $\sqrt{\pi}$ à $\frac{1}{100}$ près ; $\sqrt{0{,}128}$, $\sqrt{0{,}374}$, $\sqrt{0{,}571}$ à $\frac{1}{1\,000}$ près ;

$$\sqrt{\frac{0{,}342}{0{,}0127}} \text{ à } \frac{1}{100} \text{ près.}$$

3355. — Calculer $\sqrt{e-2}$, $\sqrt{\pi+e}$, $\sqrt{\pi^2-e}$ à $\frac{1}{100}$ près ; $\sqrt{\pi-e}$, $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ à $\frac{1}{1\,000}$ près ;

$$\sqrt{\frac{1}{\pi}}, \quad \sqrt[3]{\pi} \text{ à } \frac{1}{100} \text{ près.}$$

3356. — Calculer $\cos a$, sachant que $\sin a = 0{,}35117$.

3357. — Le nombre 0,3147 étant approché à $\frac{1}{10\,000}$ près, calculer sa racine carrée avec la plus grande approximation possible.

3358. — La surface d'un cercle a été mesurée au dmq près : $S = 32^{\text{dmq}},21$. Trouver son rayon avec la plus grande approximation possible.

Algèbre (M. Combette.)

3359. — Résoudre les systèmes

$$\left|\begin{array}{l} 2x - 3y + 5z = 1, \\ 4x - 2y + 3z = 4, \\ 6x - 5y + 8z = 2\,; \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 1, \\ 5x + 2y - 3z = 3, \\ 7x - y - 2z = 4\,; \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} 3x-2y+4z=5,\\ 2x+5y-3z=2,\\ 5x+3y+z=1\,; \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} 3x-y+4z=1,\\ 5x-3y+5z=2,\\ 8x-4y+9z=8\,; \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} 3x+2y-5z=4,\\ 2x-3y+4z=2,\\ 5x-y-z=6. \end{array}\right.$$

3360. — Eliminer x et y entre les trois équations

$$ax+by+c=0, \qquad a'x+b'y+c'=0, \qquad a''x+b''y+c''=0.$$

3361. — A quelle condition le système

$$ax+by+cz=0, \qquad a'x+b'y+c'z=0, \qquad a''x+b''y+c''z=0$$

admet il d'autres solutions que $x=0$, $y=0$, $z=0$?

3362. — Déterminer les coefficients a, b, c du trinome ax^2+bx+c, connaissant les valeurs A, B, C qu'il prend pour $x=\alpha, \beta, \gamma$.

3363. — Démontrer la formule $C_m^p = C_{m-2}^{p-2} + 2C_{m-2}^{p-1} + C_{m-2}^{p}$.

3364. — Coefficient de $a^3b^4c^2$ dans $(a+b+c+d)^9$.

3365. — Somme des n premiers nombres entiers.

3366. — Somme des n premiers nombres impairs.

3367. — Somme des cubes des n premiers nombres entiers.

3368. — Somme des cubes des termes d'une progression arithmétique.

3369. — Étudier les séries

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots;$$

$$\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi+1}+\frac{1}{\pi+2}+\cdots+\frac{1}{\pi+n}+\cdots;$$

$$\frac{1}{e}+\frac{1}{e+1}+\frac{1}{e+2}+\cdots+\frac{1}{e+n}+\cdots$$

3370. — Étudier les séries $u_n=\frac{1}{n^3}$, $u_n=\frac{1}{n^4}$, $v_n=\frac{1}{n^2}$.

3371. — Soit la série $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ à termes positifs. Démontrer que si nu_n tend vers 5 quand n augmente indéfiniment, la série est divergente. Si n^2u_n tend vers 3, la série est convergente.

3372. — Étudier les séries

$$u_n=\frac{n+1}{4n^2-7}, \quad u_n=\frac{4n^2-1}{5n^3-1}, \quad u_n=\frac{2n-1}{n^3+4}, \quad u_n=\frac{3n-4}{5n^3+1}, \quad u_n=\frac{3n+1}{5n^3-1}, \quad u_n=\frac{n+5}{4n^3+2},$$

$$u_n=\frac{4n-1}{5n^3+1}, \quad u_n=\frac{5n-1}{3n^4+1}, \quad u_n=\frac{2n+3}{4n^4-8}, \quad u_n=\frac{5n+3}{4n^4+2}, \quad u_n=\frac{n^2+3}{n^5+8}, \quad u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

3373. — Démontrer que si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\frac{2}{3}$ quand n augmente indéfiniment, la série est convergente.

3374. — Si dans une série à termes positifs, $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $\frac{4}{5}$, qu'en résulte-t-il pour la série ?

3375. — Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une limite λ, $\sqrt[n]{u_n}$ tend aussi vers une limite et cette limite est λ.

3376. — La série $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$ est convergente pour toute valeur de x. Démontrer que $\frac{x^n}{n!}$ tend vers 0 quand n augmente indéfiniment.

3377. — Calculer e à $\frac{1}{1\,000}$ près ; $\sqrt[3]{e}$, $e^{\frac{2}{3}}$ à $\frac{1}{100}$ près ; $\sqrt[4]{e}$ à $\frac{1}{1\,000}$ près.

3378. — Développer 3^{5x}. Développer $5^{\cos x}$; étudier la série trouvée.

3379. — Étudier les séries

$$1+\frac{\cos\alpha}{1}+\frac{\cos 2\alpha}{2!}+\cdots+\frac{\cos n\alpha}{n!}+\cdots;$$

$$1+\frac{\cos\alpha}{1}+\frac{\cos^2\alpha}{2!}+\cdots+\frac{\cos^n\alpha}{n!}+\cdots;$$

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}+\cdots.$$

3380. — Caractéristique du logarithme décimal d'un nombre. Exemples : 428,17 ; 0,00217 ; — le cologarithme de a étant donné, $\operatorname{colog} a = \overline{3},56\,894$, chercher $\log \sqrt[5]{a}$.

3381. — On place 4 000fr à la fin de chaque année. On demande ce qu'est devenue cette somme au bout de 8 ans ; taux 4°/₀.

3382. — Formule de Taylor pour un polynome entier en x.

3383. — Développement suivant les puissances de h et de k de $f(x+h,\ y+k)$, $f(x,y)$ étant un polynome du second degré en x et y. Démontrer que si ce polynome est homogène, on a

$$hf'_x + kf'_y = xf'_h + yf'_k.$$

3384. — Démontrer que si $f(x, y)$ est homogène et de degré m, on a

$$xf'_x + yf'_y = mf(x,y).$$

3385. — Développement de $f(x+h,\ y+k,\ z+l)$.

3386. — Démontrer que $F''_{xy} = F''_{yx}$.

3387. — Si $f(x)$ est un polynome entier en x, on a

$$f(x_0+h) - f(x_0) - \frac{h}{1}f'(x_0) = \frac{h^2}{1.2}f''(x_0+\theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

3388. — Si $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont des polynomes entiers en x, on a

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(x_0+\theta h)}{\varphi'(x_0+\theta h)}, \ 0 < \theta < 1.$$

En particulier

$$\frac{f(h) - f(0)}{\varphi(h) - \varphi(0)} = \frac{f'(\theta h)}{\varphi'(\theta h)}, \quad 0 < \theta < 1.$$

3389. — Dérivées des fonctions suivantes :

$y = \dfrac{4x^3 - 2x - 5}{5x^4 + 3x - 2}$, $\quad y = 8\cos^3 5x^2$, $\quad y = 8\cos^3 5x^3$, $\quad y = 5\cos^3 8x^4$, $\quad y = \sqrt[5]{x}$, $\quad y = \sqrt[5]{3 - 4\cos^3 x^5}$,

$y = 5\sqrt[4]{2 - 5x^3}$, $\quad y = \sqrt[5]{9\cos^2 4x^7}$, $\quad y = 3^{5\cos 4x^2}$, $\quad y = 5^{\cos^3 4x^4}$, $\quad y = 5^{\cos^4 3x^3}$, $\quad y = 8^{\cos^3 5x^2}$,

$y = \operatorname{arc\,tg} 8x^3$, $\ y = \operatorname{arc\,tg}(5x^3 + 4)$, $\ y = 5\cos^3(8x)$, $\ y = \sqrt[5]{4\cos^3 5x^4} - 5^{2x^3}$, $\ y = 5^{4x^2}\sqrt[5]{\cos^2 x^2 + 1}$, $\ y = 5\operatorname{tg}^2 x^4.\sqrt{5x^2+1}$,

$y = 5^{\cos 4x^2}\operatorname{arc\,tg} 7x^3$, $\ y = \mathrm{L}\cos^3 4x^3$, $\ y = \mathrm{L}\operatorname{arc\,tg} 8x^3$, $\ y = \mathrm{L}\operatorname{arc\,tg}(\sin^2 7x^5)$, $\ y = \mathrm{L}\arcsin 8x^3$, $\ y\ \mathrm{L}\arccos 8x^4$,

$y = \log 10\cos^4 8x^5$, $\ y = \mathrm{L}(4\cos^3 8x^2 - 1)$, $\ y = \mathrm{L}(\arcsin 7x^3)$, $\ y = \mathrm{L}(\operatorname{arc\,tg} 8x^3 \times 9x^5)$, $\ y = 4\cos^2 5x^3 \times \mathrm{L}(4\operatorname{tg}^3 x^4)$.

3390. — Dérivées de

$y = x^x$, $\quad y = x^{5x^3}$, $\quad y = (x^x)^x$, $\quad y = (x)^{x^x}$, $\quad y = (5x^2+1)^{x^3+1}$, $\quad y = 5(3x-1)^{\cos^4 2x^3}$,

$y = (\cos 4x^2)^{x^3-1}$, $\quad y = (8x^2+1)^{4\cos^3 x}$, $\quad y = (5x^2+2)^{4\cos^3 5x^2}$, $\quad y = (8x^3+2x)^{\operatorname{tg}^4 x^2}$, $\quad y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$,

$y = (3\cos x + 1)^{\sin^2 5x}$, $\quad y = (3\cos^2 x + 1)^{4\sin^3 x + 1}$, $\quad y = (\cos^4 8x^3)^{5x^3+1}$, $\quad y = 4(\cos^3 8x^3)^{\operatorname{tg}^3 x^2}$, $\quad y = (5x^2-1)^{\cos^2 5x}$,

$y = (\sin 3x)^{\cos^3 4x}$, $\quad y = (\arcsin 8x^3)^{4\operatorname{tg}^3 x^2}$, $\quad y = (\operatorname{arc\,tg} 8x^3)^{4\cos^2 5x^2}$, $\quad y = (\operatorname{arc\,tg} 8x^3)^{4\cos^3 8x^2}$,

$y = (\operatorname{arc\,tg} 5x^4)^{4\cos^3 x}$, $\quad y = (\operatorname{arc\,tg} 5x^4)^{\cos^3 x^2}$.

3391. — Étant donnée l'équation $f(x,y) = 0$, trouver la dérivée de y par rapport à x. Qu'arrive-t-il si f'_x et f'_y sont nuls en même temps ?

3392. — Calculer y'_x sachant que l'on a

$$5x^2 - 4y^2 + 8^{3x} - \log 5y = \lambda\,;$$
$$4^{2x^2-y} - 5\operatorname{arc\,tg}(x^2 - 3y) = 1.$$

3393. — Calculer y'_x et z'_x sachant que

$$f(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z) = 0.$$

3394. — Dérivée d'ordre n de $\sin x$ et $\cos x$.

3395. — Dérivées n^es de $y = \dfrac{m}{ax+b}$, $\ y = \dfrac{4}{x-2}$, $\ y = \dfrac{3}{7x+1}$, $\ y = \dfrac{7}{4x-1}$,

$y = \dfrac{1}{4x^2-9}$, $\ y = \dfrac{4}{x^2+x-2}$, $\ y = \dfrac{1}{x^2-5x+6}$, $\ y = \dfrac{8}{x^2+x-6}$.

3396. — Primitives des fonctions suivantes :

$y' = 5x^2.7^{4x^3}$, $\quad y' = \dfrac{4x}{5x^3+1}$, $\quad y' = \dfrac{2x^2}{8-5x^6}$, $\quad y' = \dfrac{2x^2}{4+5x^6}$, $\quad y' = \dfrac{5x^2}{4+3x^6}$, $\quad y' = \dfrac{7x^2}{4+5x^6}$,

$y' = \dfrac{4x}{8x^2-5}$, $\quad y' = \dfrac{x^2}{(x-1)^3}$, $\quad y' = \dfrac{7x+3}{5x^2+2}$, $\quad y' = \dfrac{3x+4}{(x-1)^2+1}$, $\quad y' = \dfrac{4x^2-5}{(x-2)^2+1}$, $\quad y' = \dfrac{4x+3}{\sqrt{x^2-6x+7}}$,

$y = \dfrac{5x^2}{\sqrt{4-5x^6}}$, $\quad y' = \dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2-5x+4}}$, $\quad y' = \dfrac{4x^2}{\sqrt{8-3x^6}}$, $\quad y' = \dfrac{4x+7}{\sqrt{5x^2+3x+9}}$, $\quad y' = \dfrac{4x^2}{\sqrt{8-5x^6}}$,

$y' = \dfrac{5x^2}{\sqrt{4x^3-7}}$, $\quad y' = \dfrac{5x^2}{\sqrt{4-9x^6}}$, $\quad y' = \dfrac{5x^2}{\sqrt{4x^3-1}}$, $\quad y' = \dfrac{5x^2}{\sqrt{4-6x^3}}$, $\quad y' = \dfrac{5x^3}{\sqrt[5]{2+7x^4}}$, $\quad y' = \dfrac{x}{\sqrt{8x^4-1}}$,

$y' = \dfrac{5x}{\sqrt{16x^4-3}}$, $\quad y' = \dfrac{3x}{\sqrt{5-7x^4}}$, $\quad y' = \dfrac{5x^2}{\sqrt{4-3x^6}}$, $\quad y' = \dfrac{5x^2}{\sqrt{8-2x^6}}$, $\quad y' = \dfrac{3x^2}{\sqrt{4-5x^6}}$, $\quad y' = \dfrac{8x^2}{\sqrt{4+5x^6}}$,

$y' = \dfrac{5x^3}{\sqrt{2-4x^6}}$, $\quad y' = \dfrac{7x^3}{\sqrt{8+5x^8}}$, $\quad y' = \dfrac{5x^3}{\sqrt{9-42x^6}}$, $\quad y' = \dfrac{5\cos x}{\sqrt{8+4\sin^2 x}}$, $\quad y' = \dfrac{7\sin x}{\sqrt{8+5\cos^2 x}}$,

$y' = \dfrac{4\sin x}{\sqrt{5\cos^2 x+3}}$, $\quad y' = \dfrac{6\sin 2x}{\sqrt{3\cos^2 x+5}}$, $\quad y' = \dfrac{5\sin 2x}{\sqrt{3\cos^2 2x+5}}$, $\quad y' = \dfrac{4}{\cos^2 x\sqrt{7+3\operatorname{tg}^2 x}}$, $\quad y' = \dfrac{1}{\sin x}$,

$y' = \sin^3 x$, $\quad y' = \cos^4 x$, $\quad y' = \operatorname{tg} x$, $\quad y' = \operatorname{tg}^3 x$, $\quad y' = \operatorname{tg}^4 x$.

3397. — Primitives des fonctions suivantes :

$$y' = \cos\left(3x - \frac{\pi}{5}\right).\sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right), \qquad y' = \sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)\sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right),$$

$$y' = \sin\left(5x - \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(7x + \frac{\pi}{5}\right), \qquad y' = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right).$$

3398. — Étudier les variations de la fonction $y = \frac{x^3 - 1}{2x^2 + 1}$. Étude des racines de la dérivée. Valeur approchée des racines par la méthode de Newton.

3399. — Variations de la fonction $y = \frac{5x^3 + 1}{x^2 - 4}$; limite supérieure de la racine positive de l'équation $5x^3 - 60x - 2 = 0$ — Résoudre graphiquement au moyen de deux courbes $y = 5x^3$ et $y = 60x + 2$.

3400. — Variations des fonctions

$$y = \frac{x^3 - 5}{x^2 + 1}, \qquad y = \frac{3x - 2}{x^3 - 1}, \qquad y = \frac{x^3 + 3x + 5}{x^2 + 1}, \qquad y = \frac{x^3 + 3x + 4}{x^2 + 1},$$

$$y = \frac{2x - 1}{4x^3 + 1}, \qquad y = \frac{5x^4 + 1}{x^2 - 1}, \qquad y = \frac{2x^2 - 1}{x^3 + 1}, \qquad y = \frac{x^2 - 4}{2x^3 + 1},$$

$$y = \frac{x - 3}{x^4 + 1}, \qquad y = \frac{x^3 - x + 2}{x + 1}, \qquad y = \frac{4x^3 + 1}{x^2 + x}, \qquad y = \frac{x^3 - 1}{4x^2 - 1},$$

$$y = \frac{4x^3 - 2}{3x^2 + 2}, \qquad y = \frac{x^3 - 2x + 3}{x^2 - 1}, \qquad y = \frac{x^3 + x - 1}{x^2 - 4}, \qquad y = \frac{x^3 - 2x + 3}{x + 1},$$

$$y = \frac{x^3 + 3x + 5}{x^2 + 1}, \qquad y = \frac{x^3 - x - 2}{(x^3 + 1)(x - 1)}, \qquad y = \frac{x^3 - 2x - 4}{(x^2 - 1)(x + 3)}, \qquad y = \sin^5 x.\cos^3 x, \qquad y = e^{\frac{1}{x}}.$$

3401. — On donne $x^3y^5 = 8$. Trouver le minimum de $4x^2 + 3y^4$.

3402. — x étant l'infiniment petit principal, déterminer l'ordre infinitésimal de chacun des infiniment petits suivants :

$$x - \sin x, \qquad 1 - \cos x, \qquad 1 - \cos x + \operatorname{tg} x, \qquad 5x - \operatorname{tg} 8x,$$

$$\sin x - x + \frac{x^3}{6}, \qquad 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cos x, \qquad e^x - 1 - \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2}, \qquad 9x^2 - \operatorname{tg}^2 3x, \qquad 3x^2 - \sin^2 x.$$

3403. — Limites de $\frac{\sin(x - a)}{\sin x - \sin a}$ pour $x = a$; de $\frac{3x - \operatorname{tg} 5x}{\sin 4x + \operatorname{tg} 3x}$, $\frac{3x^2 - \operatorname{tg}^2 4x}{\sin^2 5x}$; $\frac{2x^2 - \operatorname{tg}^2 5x}{\sin^2 8x}$ pour $x = 0$.

3404. — Limites de $\left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}\right)^m$ pour $m = \infty$; de $(1 + \operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{cotg} 5x}$ pour $x = 0$, de $(1 + 3\sin x + 2\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x = 0$ et de $x^{\frac{1}{1-x}}$ pour $x = 1$.

3405. — Limites de $\frac{a^x}{x^5}$ et $\frac{\mathrm{L}x}{x^2}$ pour x infini.

3406. — Condition pour que $x^m + y^m$ soit divisible par $xy + y^2$.

3407. — Exprimer que le polynome $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ est divisible par $x^2 - \lambda x + 1$.

3408. — Soit un polynome $\varphi(x) = f(x^2) + xf_1(x^2)$; démontrer que le reste de la division de $\varphi(x)$ par $x^2 - a$ est égal à $f(a) + xf_1(a)$.

3409. — Conditions pour que les deux équations $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0$ aient les mêmes racines.

3410. — Somme des quatre racines de l'équation $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$; même question pour $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

3411. — Condition pour que deux équations du second degré aient une racine commune.

3412. — Condition pour que l'équation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ admette une racine double. Condition pour que les trois racines soient réelles.

3413. — Conditions pour que l'équation $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ admette une racine triple.

3414. — On donne l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$; former une équation admettant pour racines les sommes deux à deux des racines de la proposée.

3415. — Conditions pour que l'équation $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ soit réciproque.

3416. — Nature des racines de l'équation $x^3 - 1 = 0$; α étant l'une des racines imaginaires, montrer que α^2 est l'autre ; que α^m est aussi racine.

3417. — A quelles conditions l'imaginaire $\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ serait-elle racine de l'équation $x^3 - 1 = 0$?

3418. — Racines de l'équation $x^5 - 1 = 0$.

3419. — Montrer que l'équation $\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} + \frac{1}{x - c} - 2 = 0$ $(a < b < c)$ admet trois racines réelles, l'une étant comprise entre a et b, une autre entre b et c.

3420. — Même question pour les équations $\frac{4}{x-a}+\frac{5}{x-b}+\frac{7}{x-c}-1=0$; $\frac{4}{x+5}+\frac{3}{x+8}+\frac{2}{x-2}-1=0$.

3421. — Démontrer que si l'équation $f(x)=0$ a toutes ses racines réelles, le nombre des racines positives est égal au nombre des variations.

3422. — L'équation $f(x)=0$ a p racines entre a et b; démontrer que la dérivée en a au moins $p-1$ dans le même intervalle.

3423. — Si $f(x)=0$ a toutes ses racines réelles, l'équation $3f(x)+5f'(x)=0$ a aussi toutes ses racines réelles.

3424. — La dérivée d'ordre n de $y=(x^2-4)^n$ a toutes ses racines réelles et comprises entre -2 et $+2$.

3425. — Nature des racines de l'équation $x^4+2x-3=0$. Montrer que la somme des cubes est réelle et trouver cette somme. Même question pour

$$x^6-4x+1=0,\qquad x^4+5x-2=0,\qquad x^4+x^2-3x+5=0.$$

3426. — Nombre des racines réelles de l'équation $x^4+5x-3=0$; a, b, c, d désignant les quatre racines, $\Sigma a^2b^5c^7d^9$ est-elle réelle ? Calculer la somme des carrés de ces racines.

3427. — Limites supérieures des racines pour les équations $x^4-5x^2+3x-7=0$; $x^6+7x^4-3x^2+2x-20=0$.

3428. — Calculer les racines de l'équation $8x^3-6x^2-1=0$ par la méthode de Newton.

3429. — Nombre des racines réelles de l'équation $x^5-7x+3=0$. Calculer les racines par la méthode des parties proportionnelles. Somme des cinquièmes puissances des racines de cette équation.

3430. — Nombre des racines réelles des équations

$$x^3-5x^2+1=0,\quad x^5-3x^2+1=0,\quad 3x^5-7x+3=0,\quad x^6-3x^2-4=0,\quad 3x^5-7x-3=0,\quad x^4-5x^2+2=0.$$
$$x^4+5x^3-2x-9=0,\qquad x^4+x^3-2x+3=0,\qquad 5x^4-2x^3-1=0,\qquad x^4-2x^3+5=0,$$
$$x^4-5x^3+2=0,\qquad 3x^4-7x^3+2=0.$$

3431. — Résoudre les équations $x^3+6x^2-x-6=0$; $x^4+5x^3-2x+2=0$.

3432. — Résoudre graphiquement les équations :

$$x^3-6x+6=0,\qquad x^4-2x-3=0,\qquad x^4+x-5=0,$$
$$x^5-2x-1=0,\qquad x^4+x-4=0,\qquad x^4+x^3-3=0.$$
$$x^4+x^3-2x-2=0,$$

3433. — Résoudre l'équation $\sqrt{4-2x}=2x-3$.

3434. — Résoudre les inégalités

$$\frac{2x-1}{x+1}<\frac{x^2-1}{x+3},\qquad \frac{x-3}{x^2-4}>\frac{2x}{x+5},\qquad \frac{2x}{x-2}<\frac{x-3}{(x+1)^2},\qquad \frac{x^2-1}{x+2}<\frac{x-3}{(x-2)^2}.$$

3435. — L'équation $f(x)=0$ admettant la racine a au degré de multiplicité α, on demande la limite du quotient $\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha}$ pour $x=a$.

3436. — Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles

$$\frac{x+1}{x(x-1)^3},\qquad \frac{1}{x^3(x^2+1)},\qquad \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x+2)},\qquad \frac{x^4+1}{x^4-1},\qquad \frac{x^2-1}{(x-3)^2(x+2)},\qquad \frac{2x^3}{(x-1)^2(x-2)^2}.$$

Trouver les fonctions primitives.

Trigonométrie (M. Combette.)

3437 — Résoudre l'équation $\sin\left(3x-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

3438. — Calculer $\sin\frac{\pi}{12}$ à $\frac{1}{10\,000}$ près.

3439. — Calculer $\sin\frac{\pi}{10}$, $\sin\frac{\pi}{20}$, $\sin\frac{2\pi}{10}$, $\cos\frac{\pi}{10}$. Calculer $\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{2}}$ à $\frac{1}{1000}$ près.

3440. — On donne $\operatorname{tg} a$, calculer $\operatorname{tg}\frac{a}{4}$. On donne $\operatorname{tg} 2a$, calculer $\operatorname{tg} 3a$; on donne $\cos 2a$, calculer $\cos 3a$.

3441. — On donne $\cos\frac{a}{2}$, calculer $\cos\frac{a}{3}$; on donne $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, calculer $\operatorname{tg}\frac{a}{3}$.

3442. — Démontrer les inégalités $1-\cos x<\frac{x^2}{2}$; $x-\sin x<\frac{x^3}{6}$.

3443. — Développement de $\sin x$ et de $\cos x$ en séries.

3444. — Démontrer la relation $\cos x+i\sin x=e^{ix}$.

3445. — Calculer la somme $S=\sin a+\sin(a+r)+\sin(a+2r)+\dots+\sin[a+(n-1)r]$.

3446. — Sachant que $a+b+c=\pi$, transformer en monomes les expressions

$$\sin a+\sin b+\sin c, \qquad \operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b+\operatorname{tg} c.$$

3447. — Transformer en un monome l'expression $x = a\cos\omega t + b\sin\omega t$. Maximum et minimum de cette expression.

3448. — Exprimer $\dfrac{\sin a+\sin b}{\sin a-\sin b}$ en fonction de $\operatorname{tg}\dfrac{a\pm b}{2}$.

3449. — On donne la relation $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$, les angles A, B, C étant compris entre 0 et π. — En déduire $A+B+C=\pi$.

3450. — Résoudre l'équation $a\cos x+b\sin x=c$ au moyen des tables.

3451. — Résoudre l'équation $\operatorname{tg} x-\operatorname{cotg} x=1$.

3452. — Peut-on trouver un arc x vérifiant à la fois les deux équations $a\cos x+b\sin x=c$, $a'\cos x+b'\sin x=c'$.

3453. — Même question pour les deux équations

$$a\cos x+b\sin x=c, \qquad a'\operatorname{tg} x+b'\operatorname{cotg} x=c'.$$

3454. — Eliminer x entre les deux équations

$$\operatorname{coséc} x-\sin x=a, \qquad \operatorname{séc} x-\cos x=b.$$

3455. — On donne les relations :

$$(1) \qquad A+B+C=180^\circ, \qquad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

en déduire par le calcul le système

$$(2) \qquad \begin{aligned} a &= b\cos C+c\cos B,\\ b &= c\cos A+a\cos C,\\ c &= a\cos B+b\cos A. \end{aligned}$$

3456. — Réciproquement, déduire le système (1) du système (2).

3457. — On donne le système

$$(3) \qquad \begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A,\\ b^2 &= c^2+a^2-2ca\cos B,\\ c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos C, \end{aligned}$$

en déduire le système (2).

3458. — Du système (3) déduire le système (1).

3459. — Inversement, du système (1) déduire le système (3).

3460. — Résoudre un triangle connaissant a, b, C ; $\log a$, $\log b$, C.

3461. — Résoudre un triangle connaissant les trois côtés. — Montrer que si a, b, c, R sont commensurables, $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$ est aussi commensurable.

3462. — Résoudre un triangle connaissant a, b, A.

3463. — Résoudre un triangle connaissant a, A, $b+c=m$.

3464. — Résoudre un triangle connaissant les angles et la surface ; — les angles et le rayon R du cercle circonscrit ; — les angles et le périmètre : — les angles et le rayon r du cercle inscrit.

3465. — Résoudre un triangle connaissant deux côtés b, c et la bissectrice β de l'angle compris.

3466. — Distance de deux points inaccessibles.

3467. — Dans un quadrilatère ABCD on donne les côtés $AB=a$, $BC=b$, l'angle compris B et les angles $ADB=\alpha$, $BDC=\beta$. Calculer les angles A et C.

3468. — On donne deux axes Ox, Oy faisant entre eux l'angle θ, sur Ox deux points A et B. Le point M se déplaçant sur Oy, calculer l'angle AMB.

3469. — Résoudre les équations et inégalités suivantes :

$$\sqrt{1-3\sin^2 x}=1+\cos x, \qquad \sqrt{3-4\cos^2 x}<1-3\sin x;$$

$$\sqrt{1-4\sin^2 x}>2\cos x-1, \qquad \sqrt{1-2\sin x}<2-3\sin x.$$

(A suivre.)

QUESTIONS PROPOSÉES

1559. — Trouver la condition pour que les quatre racines de l'équation

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+f=0$$

vérifient la relation

$$\alpha + \beta = 2(\gamma + \delta)$$

et résoudre l'équation dans ce cas.

Appliquer à

$$2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 1 = 0.$$

E. H.

1560. — On donne une ellipse (E) et deux points fixes du plan P et P'. On mène par P et P' deux cordes AB, A'B' parallèles et de direction variable. 1° Montrer que l'axe radical des cercles ayant pour diamètres AB et A'B' passe par un point Q; 2° Si le point P reste fixe et si le point P' décrit une courbe, le lieu du point Q est une courbe de même degré.

E.-N. Barisien.

BIBLIOGRAPHIE

Histoire des Mathématiques, par W. W. Rouse Ball, Fellow and Tutor of Trinity College (Cambridge). — Édition française revue et augmentée, traduite sur la troisième édition anglaise par L. Freund, lieutenant de vaisseau. — Tome premier, prix : 12 fr. — Librairie A. Hermann. Paris, 1906.

Ce volume embrasse toute la période qui s'étend depuis l'antiquité jusqu'à Huygens. Malgré la concision nécessaire pour faire tenir tant de faits dans un in-octavo de dimensions moyennes, la lecture de l'ouvrage est facile et attrayante. Il permet de se rendre compte de la marche générale du développement des sciences mathématiques, et ceci très aisément, grâce à la parfaite division adoptée par l'auteur. Il est assez détaillé, en outre, pour que le lecteur se fasse une idée nette de chacune des périodes qui y sont étudiées.

E. H.

La Géométrie analytique générale, par H. Laurent. — Un volume in-octavo, prix: 6 fr. — Librairie A. Hermann. Paris, 1906.

Dans les premiers chapitres, M. Laurent étudie les éléments de la géométrie dans un espace à n dimensions. Il appelle *point* un système de n nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *variété* un ensemble de points dont les coordonnées dépendent de k paramètres variables ($k < n$). Si $k = 1$, la variété est une ligne; si $k = n - 1$, la variété est une *surface*, etc. En particulier, une surface est donnée par une équation unique entre les coordonnées d'un point.

Une *figure* est un ensemble de variétés.

Le *déplacement* est alors défini par une substitution à effectuer sur les coordonnées d'un point. Cette substitution doit être bi-univoque. M. Laurent emploie particulièrement les substitutions orthogonales à déterminant positif et il montre dans la suite de l'ouvrage que la géométrie qui leur correspond est la géométrie euclidienne.

L'auteur étudie ensuite très simplement le *plan*, la *ligne droite*; il introduit les notions de *distance*, d'*angle*, de *parallélisme*, etc.; puis, il aborde les principales doctrines de la géométrie analytique et termine par une étude rapide, quoique suffisamment complète, des surfaces du second degré.

Cet ouvrage présente une originalité et un intérêt incontestables.

Il renferme un certain nombre de démonstrations curieuses dues à l'auteur et qui exigent l'emploi d'une analyse assez délicate. Mais, dans ses parties essentielles, la lecture en est aisée et je pense qu'un bon élève de Mathématiques spéciales en comprendrait l'ensemble sans peine. Aussi est-ce avec plaisir que je signale cet intéressant volume aux lecteurs de la Revue.

E. H.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

17e Année. N° 4. Janvier 1907.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME SUR LES SÉRIES

par M. **Ch. Michel**, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Dijon.

Dans ses *Leçons sur les séries à termes positifs*, M. Borel donne une démonstration, reproduite dans la cinquième édition du *Cours d'Algèbre* de M. Niewenglowski, du théorème bien connu suivant :

Si, à partir d'un certain rang, les termes u_n d'une série positive convergente sont décroissants ou du moins non croissants, nu_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Voici une démonstration de ce théorème qui me paraît plus simple.

Nous pouvons supposer que la non-croissance du terme général ait lieu à partir du premier rang. Désignons par S la somme de la série et par S_n la somme de ses n premiers termes ; on a $S_n < S$. Puisque la série est convergente, étant donné un nombre positif quelconque ε, on peut trouver un entier p_1 tel que pour toute valeur de n plus grande que p_1 on ait

$$S - S_n < \varepsilon.$$

Comme S_{2n} est plus petit que S, on aura par suite

$$S_{2n} - S_n < \varepsilon.$$

Mais, les termes de la série étant non croissants, on a $S_{2n} - S_n \geqslant nu_{2n}$. Par suite, on a

$$nu_{2n} < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad 2nu_{2n} < 2\varepsilon.$$

Cela posé, considérons la quantité $(2n+1)u_{2n+1}$. On a $(2n+1)u_{2n+1} \leqslant (2n+1)u_{2n}$ et par suite

$$(2n+1)u_{2n+1} < 2\varepsilon + u_{2n}.$$

Mais, u_{2n} tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On peut donc trouver un entier p_2 tel que pour toute valeur de n plus grande que p_2 on ait $u_{2n} < \varepsilon$. Par conséquent, étant choisi un entier p plus grand à la fois que p_1 et que p_2, pour toute valeur de n plus grande que p, on a à la fois

$$2nu_{2n} < 2\varepsilon < 3\varepsilon \qquad \text{et} \qquad (2n+1)u_{2n+1} < 3\varepsilon.$$

Autrement dit, pour toute valeur de n plus grande que p, on a $nu_n < 3\varepsilon$. Comme 3ε est un nombre positif arbitraire, on voit bien que nu_n tend vers 0.

On peut aussi déduire le théorème en question du théorème suivant, dû à Cauchy : *La série positive u_n à termes non croissants est convergente ou divergente en même temps que la série $v_n = 2^n u_{2^n}$.* On a ainsi une démonstration plus courte que la précédente, mais qui n'en est pas essentiellement distincte comme on le reconnaît en se reportant à la démonstration même du théorème de Cauchy. Voici ce que l'on peut dire.

Étant donné l'entier n, il existe un entier p tel que l'on ait

$$2^p \leqslant n < 2^{p+1}.$$

Comme les termes de la série sont non croissants, on a

$$u_{2^{p+1}} \leqslant u_n \leqslant u_{2^p}$$

et par suite, *a fortiori*,

$$2^p u_2^{p+1} \leqslant n u_n < 2^{p+1} u_2^p,$$

c'est-à-dire

$$\frac{v_{p+1}}{2} \leqslant n u_n < 2 v_p.$$

Mais, d'après le théorème de Cauchy, la série v_p est convergente. Par suite, quand n tend vers l'infini, p tendant aussi vers l'infini, $\frac{v_{p+1}}{2}$ et $2v_p$ tendent vers 0, et il en est de même de nu_n.

NOTE SUR LA NOTION DE COUPURE

L'introduction de la notion de coupure dans le programme de Mathématiques spéciales permet de simplifier considérablement un grand nombre de démonstrations et de les présenter d'une manière uniforme avec une entière rigueur.

Ayant défini les coupures de première et de seconde espèce, comme le fait M. Tannery dans le premier volume de son *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable* (nouvelle édition), il est facile de définir avec précision la borne supérieure et la borne inférieure d'un ensemble limité.

On montre ensuite que si l'on considère deux ensembles infinis (e) et (e'), tels que tout nombre de (e) soit moindre que tout nombre de (e'), tels, en outre, qu'il n'y ait pas dans (e) de nombre supérieur à tous les autres, ni dans (e') de nombre inférieur à tous les autres, et que la différence $e' - e$ de deux nombres appartenant respectivement aux deux ensembles soit aussi petite que l'on veut, ces deux ensembles définissent une coupure de première ou de seconde espèce.

Rien n'est plus simple que d'exposer ensuite la théorie des opérations sur les incommensurables.

La définition des bornes d'une fonction finie dans un intervalle (a, b) en découle immédiatement.

Toute suite infinie croissante dont les termes sont moindres qu'un nombre donné a une limite. De même, toute suite infinie décroissante dont les termes sont supérieurs à un nombre donné, etc.

Je me propose, comme application et comme exemple, d'étudier la notion d'intégrale définie.

Soit $f(x)$ une fonction bien définie et finie dans un intervalle (a, b). Partageons cet intervalle en n intervalles partiels par des nombres intermédiaires $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$,

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b,$$

et représentons, pour généraliser la notation, a par x_0, b par x_n. Multiplions l'étendue de chaque intervalle, $x_k - x_{k-1}$, par la borne inférieure m_k ou par la borne supérieure M_k de la fonction dans cet intervalle et considérons les deux sommes correspondantes

$$s = (x_1 - x_0)m_1 + (x_2 - x_1)m_2 + \cdots + (x_n - x_{n-1})m_n,$$

$$S = (x_1 - x_0)M_1 + (x_2 - x_1)M_2 + \cdots + (x_n - x_{n-1})M_n;$$

nous aurons évidemment $s < S$.

Si nous insérons maintenant entre deux des nombres x, x_{k-1} et x_k par exemple, un nouveau nombre x', les sommes correspondantes, s' et S', satisferont aux relations

$$s' \geqslant s, \qquad S' \leqslant S.$$

En effet, les deux sommes s et s' ont toutes leurs parties communes, sauf la partie $(x_k - x_{k-1})m_k$ de s, qui est remplacée par $(x' - x_{k-1})m'_k + (x_k - x')m''_k$, dans s'; or, nous avons évidemment $m'_k \geqslant m_k$, $m''_k \geqslant m_k$, et, par suite, $s' \geqslant s$. Un raisonnement semblable s'applique aux sommes S et S'.

Cela posé, plaçons tous les nombres s dans un premier ensemble (s) et tous les nombres S dans un second ensemble (S). Nous aurons toujours $s < S$; car si nous considérons les sommes s_1 et S_1 qui correspondent à une première division de l'intervalle (a, b), celles s_2 et S_2, qui correspondent à une autre division, nous pouvons former une troisième division en réunissant les bornes de tous les intervalles en un seul groupe ; soient s_3 et S_3 les sommes correspondantes. Nous aurons alors $s_3 < S_3$, $s_1 \leqslant s_3$. $S_3 \leqslant S_2$; par suite, $s_1 < S_2$.

L'ensemble (s) admet une borne supérieure σ; l'ensemble (S), une borne inférieure Σ; et l'on a sûrement $\sigma \leqslant \Sigma$.

Je me propose maintenant d'étudier le cas où l'on a $\sigma = \Sigma$. D'après ce qui précède, il est clair qu'il faut pour cela que la différence

$$S - s = \Sigma(x_k - x_{k-1})(M_k - m_k)$$

puisse être rendue aussi petite que l'on veut. Cela exige d'abord que chacune des parties tende vers 0, c'est-à-dire, si la fonction n'est constante dans aucune partie de l'intervalle (a, b), que le nombre n grandisse indéfiniment et que chaque intervalle partiel tende vers 0. Si l'oscillation de la fonction peut être rendue plus petite que n'importe quel nombre positif ε, dans chaque intervalle, en les prenant tous assez petits, c'est-à-dire si la fonction est continue dans l'intervalle (a, b), on a évidemment

$$S - s < \varepsilon(b - a),$$

et le fait signalé est établi. Mais si la fonction n'est pas continue, il y aura toujours des intervalles où l'oscillation sera plus grande que ε, si ε est assez petit et la différence $S - s$ se partagera en deux parties : l'une moindre que $(b - a)\varepsilon$, et l'autre, que $2A.l$, en appelant A un nombre supérieur à $|f(x)|$ dans l'intervalle (a, b) et l la somme des étendues des intervalles où l'oscillation est plus grande que ε. La première partie tend vers 0 ; il faudra donc que la seconde tende aussi vers 0, c'est-à-dire que l tende vers 0.

Plaçons-nous dans ce cas, et appelons α_1 une valeur quelconque de x dans le premier intervalle, α_2 une valeur quelconque dans le second, ..., α_n une valeur quelconque de x dans le dernier intervalle, la somme

$$T = (x_1 - x_0)f(\alpha_1) + (x_2 - x_1)f(\alpha_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(\alpha_n),$$

est comprise entre s et S et a pour limite $\sigma = \Sigma$, quand n grandit indéfiniment de façon que tous les intervalles partiels tendent vers 0.

Cette limite se nomme une intégrale définie et se représente par

$$\sigma = \int_a^b f(x)dx.$$

Il est inutile de poursuivre.

E. H.

Remarque. — Les idées que j'expose au début sur l'utilisation de la notion de coupure ne me sont pas personnelles : plusieurs de mes collègues (*), à qui j'en ai parlé, pensent de même et suivent la même marche dans leur enseignement.

Il est bien entendu que j'ai été aussi bref que possible et que tout ce qui précède n'est qu'une indication.

Pour les élèves, à qui on ne développe plus la notion de continuité dans un intervalle, on pourra se borner à l'étude d'une fonction qui varie toujours dans le même sens dans un intervalle donné (α, β), et supposer que tout intervalle fini (a, b) est une somme d'un nombre fini de tels intervalles.

Supposons, par exemple, la fonction toujours croissante dans l'intervalle (a, b) ; alors les oscillations

$M_1 - m_1$, $M_2 - m_2$, ... $M_n - m_n$ sont égales à $f(x_1) - f(a)$, $f(x_2) - f(x_1)$, ... $f(b) - f(x_{n-1})$; elles sont toutes positives et leur somme est égale à $f(b) - f(a)$. Si donc on se donne arbitrairement

(*) MM. Cor, Leconte et Michel ; je dois même ajouter que ce dernier m'a annoncé tout récemment un article sur le même sujet et portant aussi sur le même point.

un nombre positif ε, le nombre de celles qui dépassent ε est fini, et, quand chaque intervalle partiel tend vers 0, la somme des étendues I des intervalles correspondants tend vers 0. Le critérium d'existence de $\int_a^b f(x)\,dx$ est donc rempli.

CERTIFICAT D'ÉTUDES SUPÉRIEURES (*Lyon, juillet 1905.*)

Mathématiques préparatoires à la physique et aux sciences industrielles.

1485. — *On considère la courbe plane représentée, en coordonnées rectangulaires, par les équations*

$$x = a(1+\cos^2 t)\sin t, \qquad y = a\sin^2 t\cos t.$$

1° *Calculer l'équation de la normale en un point de cette courbe, ainsi que les coordonnées du centre du cercle osculateur à cette courbe en ce point.*

2° *Montrer que cette courbe satisfait à l'équation différentielle*

$$x + yy' = \frac{2ay'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

dans laquelle y' désigne la dérivée $\frac{dy}{dx}$.

3° *Trouver l'intégrale générale de cette équation différentielle.*

1. L'équation de la normale au point (x, y) est

$$(X-x)\frac{dx}{dt} + (Y-y)\frac{dy}{dt} = 0.$$

En prenant les dérivées de x et de y par rapport à t, on a

$$\frac{dx}{dt} = a\cos t(3\cos^2 t - 1), \qquad \frac{dy}{dt} = a\sin t(3\cos^2 t - 1).$$

Si l'on remplace x, y, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ par leurs valeurs dans l'équation de la normale on a

$$[X - a(1+\cos^2 t)\sin t]\cos t + [Y - a\sin^2 t\cos t]\sin t = 0,$$

ou enfin

$$X\cos t + Y\sin t - 2a\sin t\cos t = 0.$$

Le centre du cercle osculateur est le point limite de la normale ; par suite, ce point sera défini par les deux équations

$$X\cos t + Y\sin t - 2a\sin t\cos t = 0, \qquad -X\sin t + Y\cos t - 2a(\cos^2 t - \sin^2 t) = 0,$$

le premier membre de la deuxième étant la dérivée par rapport à t du premier membre de la première.

En résolvant ces deux équations par rapport à X et Y, on a

$$X = 2a\sin^3 t, \qquad Y = 2a\cos^3 t.$$

On voit ainsi que la développée de la courbe proposée est une hypocycloïde à quatre rebroussements qui a pour équation

$$X^{\frac{2}{3}} + Y^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}}.$$

2. Démontrons maintenant que la courbe donnée vérifie l'équation différentielle

$$(1) \qquad x + yy' = \frac{2ay'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

où y' désigne $\frac{dy}{dx}$.

Remarquons que $\frac{dy}{dx}$ est égal au quotient de $\frac{dy}{dt}$ par $\frac{dx}{dt}$, c'est-à-dire à $\operatorname{tg} t$, donc

$$\frac{2ay'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{2a \operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = 2a \sin t.$$

D'autre part, en remplaçant x et y par leurs valeurs en fonction de t, on a

$$x + yy' = a(1+\cos^2 t)\sin t + a \sin^2 t \cos t \operatorname{tg} t = 2a \sin t;$$

on a donc bien

$$x + yy' = \frac{2ay'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

ce qui démontre la proposition.

3. Pour obtenir l'intégrale générale de l'équation (1), nous pouvons chercher à exprimer x et y en fonction d'un paramètre choisi arbitrairement. Nous poserons $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t$, ou $dy = dx \operatorname{tg} t$.

L'équation devient alors

$$x + y \operatorname{tg} t = 2a \sin t, \qquad \text{ou} \qquad y = 2a \cos t - x \operatorname{cotg} t.$$

Différentions par rapport à t, nous avons

$$dy = -2a \sin t\, dt - \operatorname{cotg} t\, dx + \frac{x\, dt}{\sin^2 t},$$

ou, en remplaçant dy par $dx.\operatorname{tg} t$,

$$\sin t \frac{dx}{dt} - x \cos t = -2a \sin^3 t \cos t. \tag{2}$$

Nous avons ainsi une équation différentielle du premier ordre linéaire, dont nous connaissons une intégrale particulière

$$x = a(1+\cos^2 t)\sin t,$$

d'après ce qui précède.

Pour avoir l'intégrale générale de l'équation (2), il suffit d'ajouter cette intégrale particulière à l'intégrale générale de l'équation sans second membre

$$\sin t \frac{dx}{dt} - x \cos t = 0,$$

qui s'écrit $\frac{dx}{x} = \frac{d \sin t}{\sin t}$, et qui nous donne $\mathrm{L}x = \mathrm{L} \sin t + \mathrm{LC}$, ou $x = \mathrm{C} \sin t$.

L'intégrale générale de l'équation (2) est donc

$$x = \mathrm{C} \sin t + a(1+\cos^2 t)\sin t.$$

Pour avoir la valeur de y, je reviens à l'équation

$$y = 2a \cos t - x \operatorname{cotg} t,$$

j'y remplace x par sa valeur et j'obtiens

$$y = -\mathrm{C} \cos t + a \sin^2 t \cos t.$$

L'intégrale générale de l'équation (1) est donc définie par les deux équations

$$x = \mathrm{C} \sin t + a(1+\cos^2 t)\sin t, \qquad y = -\mathrm{C} \cos t + a \sin^2 t \cos t,$$

C désignant une constante arbitraire.

Pour $\mathrm{C} = 0$, ces équations représentent la courbe donnée.

G. FOUCRY, à Roanne.

Solutions satisfaisantes par MM. P. Brizard, à Paris; W. Mérigot, à Paris; G. Pélissier, à Toulouse.

1486. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$(\sin x + \cos x)\frac{dy}{dx} - y\cos x + 1 + \sin x \cos x = 0.$$

On voit immédiatement que $y = \cos x$ est une intégrale particulière de cette équation. Par suite, pour avoir l'intégrale générale, il suffit d'ajouter $\cos x$ à l'intégrale générale de l'équation sans second membre

$$(1) \qquad (\sin x + \cos x)\frac{dy}{dx} - y\cos x = 0.$$

Celle-ci peut s'écrire

$$\frac{dy}{y} = \frac{\cos x\, dx}{\sin x + \cos x},$$

et nous en tirons

$$(2) \qquad \mathrm{L}Cy = \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x + \cos x}.$$

Posons

$$\mathrm{I} = \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x + \cos x}, \qquad \mathrm{J} = \int \frac{\sin x\, dx}{\sin x + \cos x};$$

nous avons

$$\mathrm{I} + \mathrm{J} = \int \frac{\cos x + \sin x}{\sin x + \cos x}\, dx = \int dx = x,$$

$$\mathrm{I} - \mathrm{J} = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\, dx = \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \mathrm{L}(\sin x + \cos x),$$

et en ajoutant

$$2\mathrm{I} = \mathrm{L}(\sin x + \cos x) + x, \qquad \mathrm{I} = \mathrm{L}\sqrt{\sin x + \cos x} + \frac{x}{2}.$$

En remplaçant I par sa valeur dans l'équation (2), on obtient

$$\mathrm{L}Cy = \mathrm{L}\sqrt{\sin x + \cos x} + \frac{x}{2} \qquad \text{et} \qquad Cy = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x + \cos x}.$$

ou

$$y = \mathrm{A}e^{\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x + \cos x},$$

A désignant une constante arbitraire.

Telle est l'intégrale générale de l'équation (1); par suite, celle de l'équation proposée est

$$y = \cos x + \mathrm{A}e^{\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x + \cos x}.$$

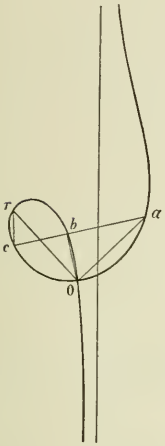
G. COTTY, élève à l'Ecole Normale supérieure.

Bonnes solutions par MM. Brizard, à Paris; Foucay, à Roanne; Louis Sire, à Belverne.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1487. — *Un angle droit aOr tourne autour du point double O d'une cubique circulaire. Par le point r où un de ses côtés rencontre la cubique, on mène une parallèle rc à l'asymptote réelle de cette cubique; soit c le point où elle rencontre à nouveau la cubique; on joint ac et on désigne par b le troisième point où cette droite rencontre la courbe.*

Cela posé, on demande : 1° *le lieu des centres des cercles passant par les trois points* O, a *et* b ; 2° *le lieu de la projection du point double* O *sur* ac ; 3° *l'enveloppe de la droite* ac.



Soient

(1) $$x(x^2+y^2)-(ax^2+2bxy+cy^2)=0$$

l'équation de la cubique ; t, θ, t_1. les paramètres angulaires des points a, b, c ; celui du point r est, par hypothèse, $-\frac{1}{t}$;

(2) $$x^2+y^2-2ux-2vy=0,$$

l'équation du cercle passant par les points O, a, b.

t et θ sont les racines de l'équation

$$2(u+vt)-(a+2bt+ct^2)=0,$$

ou (3) $$ct^2-2(v-b)t+a-2u=0.$$

Cherchons la relation qui lie t, θ et t_1. Pour cela, soit $mx+ny-1=0$ l'équation de la droite abc. Ces trois paramètres sont les racines de l'équation :

$$1+t^2-(a+2bt+ct^2)(m+nt)=0,$$

ou (4) $$cnt^3-(1-2bn-cm)t^2+(an+2bm)t+am-1=0.$$

On a donc, en désignant par S_1, S_2, S_3 les trois fonctions symétriques des racines :

$$cnS_1=1-2bn-cm,$$
$$cnS_2=an+2bm,$$
$$cnS_3=1-am,$$

ou

$$cm+(cS_1+2b)n-1=0,$$
$$2bm+(a-cS_2)n=0,$$
$$am+cS_3n-1=0.$$

D'où, en éliminant m et n,

$$\begin{vmatrix} c & cS_1+2b & 1 \\ 2b & a-cS_2 & 0 \\ a & cS_3 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

ou, en développant,

$$2bcS_3-a(a-cS_2)+c(a-cS_2)-2b(cS_1+2b)=0,$$

ou

(5) $$2bcS_1+c(c-a)S_2-2bcS_3+a(a-c)+4b^2=0.$$

Or, d'après (3)

$$S_1=\frac{2(v-b)}{c}+t_1,\qquad S_2=\frac{2t_1(v-b)}{c}+\frac{a-2u}{c},\qquad S_3=\frac{a-2u}{c}t_1.$$

Portant ces valeurs dans (5), nous avons l'équation qui donne t_1 en fonction de u et v,

$$abc\left[\frac{2(v-b)}{c}+t_1\right]+c(c-a)\left[\frac{2(v-b)t_1}{c}+\frac{a-2u}{c}\right]-2b(a-2u)t_1+a(a-c)+4b^2=0.$$

ou, en développant et ordonnant,

(6) $$[v(c-a)+2bu]t_1+2bv-u(c-a)=0.$$

Cherchons maintenant la relation qui lie t_1 et $\frac{1}{t}$.

Soit $x=h$ l'équation de cr : ces deux paramètres sont les racines de l'équation

$$h(1+t^2)-(a+2bt+ct^2)=0,$$

ou

$$(h-c)t^2-2bt+h-a=0.$$

On a donc

$$\frac{2b}{h-c} = t_1 - \frac{1}{t} = \frac{tt_1 - 1}{t},$$

$$\frac{h-a}{h-c} = -\frac{t_1}{t}.$$

D'où, en éliminant h,

(7) $$2b(t+t_1) + (c-a)(tt_1 - 1) = 0.$$

L'équation du lieu s'obtiendra en éliminant t et t_1 entre les équations (3), (6) et (7).

Or de (7) on tire

$$t = \frac{c-a-2bt_1}{2b+(c-a)t_1}$$

ou, en remplaçant t_1 par sa valeur tirée de (6) et mettant à la place de u et v les coordonnées courantes x et y,

$$t = \frac{c-a+2b\dfrac{2by-(c-a)x}{2bx+(c-a)y}}{2b-(c-a)\dfrac{2by-(c-a)x}{2bx+(c-a)y}} = \frac{y}{x}.$$

Donc le centre du cercle est sur Oa, par suite au milieu de cette droite et abc est perpendiculaire sur Ob. En substituant la valeur de t dans (3), on obtient le lieu du centre

$$2x(x^2+y^2) - (ax^2+2bxy+cy^2) = 0.$$

C'est une cubique homothétique de la proposée par rapport au point double, le rapport de similitude étant $\frac{1}{2}$.

2° Le lieu de la projection de O sur ac est la cubique elle-même.

3° Soit $ux+vy-1=0$ l'équation de la droite ab. L'équation du faisceau de droites Oa, Ob, Oc est

$$x(x^2+y^2) - (ax^2+2bxy+cy^2)(ux+vy) = 0.$$

Puisque Ob est perpendiculaire sur ab, cette équation doit être satisfaite pour $\frac{x}{u} = \frac{y}{v}$. On en déduit l'équation tangentielle de l'enveloppe

$$u(u^2+v^2) - (au^2+2buv+cv^2)(u^2+v^2) = 0,$$

ou

$$au^2+2buv+cv^2-u = 0.$$

C'est une parabole dont l'équation cartésienne s'obtient en éliminant u et v entre cette équation, celle de la tangente et la relation

$$\frac{x}{2au+2bv-1} = \frac{y}{2bu+2cv}.$$

La valeur commune de ces deux derniers rapports est $\frac{1}{u}$. On aura donc l'équation du lieu en éliminant u et v entre

$$(2b-y)u+2cv = 0, \qquad (2a-x)u+2bv = 1, \qquad ux+vy = 1,$$

ce qui donne

$$\begin{vmatrix} 2b-y & 2c & 0 \\ 2a-x & 2b & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$y(2b-y) - 2cx = 2b(2b-y) - 2c(2a-x).$$

ou enfin

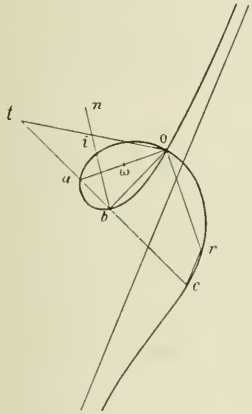
$$(y-2b)^2+4c(x-a)=0.$$

C'est une parabole dont le sommet est au point $x=a$, $y=2b$

G. DULIMBERT.

Solution analogue : M. P. Brizard, à Paris.

Solution géométrique. — 1° On connaît la proposition suivante qui est d'ailleurs démontrée dans la *Revue* (n° d'avril 1906) :



Si, par deux points fixes, a et b d'une cubique circulaire, on fait passer un cercle variable ε, la droite qui joint les deux autres points d'intersection de la cubique et de ε passe par un point fixe, r, situé sur la cubique ;

Ce point est d'ailleurs sur la parallèle à l'asymptote de la cubique menée par le point c où ab rencontre la courbe.

D'après cela, on voit que si le cercle ε passe par le point O, la droite Or est tangente au cercle passant par les points O, a, b. La droite Oa est alors un diamètre de ce cercle, dont le centre, ω, est le milieu de Oa. Le lieu du point ω est donc la cubique homothétique de la cubique donnée par rapport au point double et dans le rapport $\frac{1}{2}$.

2° Oa étant un diamètre du cercle Oab, b est la projection de O sur ac et le lieu de cette projection est la cubique elle-même.

3° L'enveloppe de la droite ac est l'antipodaire de la cubique donnée par rapport au point O ; c'est une parabole dont l'axe est perpendiculaire à l'asymptote de la cubique. Cette parabole est tangente aux normales à la cubique en son point double, et à la cubique elle-même aux pieds des normales qu'on peut lui mener par O.

On a d'ailleurs une construction par points de cette parabole en appliquant la construction connue des tangentes aux podaires. Si t est le point de contact de ac et de son enveloppe, on sait que la normale bn à la cubique en b passe par le milieu i de Ot. On a donc le point t par l'intersection de ac et de la droite Oi telle que $\widehat{cOb}=\widehat{ibO}$.

G. PELISSIER, à Toulouse.

Même solution : MM. P. Brizard, à Paris ; Dulimbert, à Dijon ; G. Buesse, à Belfort ; G. Cotty, élève à l'Ecole normale supérieure ; Audibert, élève au lycée de Marseille ; M. Constandaki.
Très bonne solution de M. Louis Sire, avec généralisation.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE (*Concours de 1906.*)

Groupe I. — *Épure.*

1526. — *Représenter le solide commun à un hyperboloïde de révolution à une nappe et à un tore.*
L'origine est au centre de la feuille, l'axe des x étant le petit axe de la feuille.
L'hyperboloïde a pour centre o, o' : $x=0$, $y=8$, $z=18^{cm}$.
Son axe est de front, les génératrices font avec l'axe un angle de 45°.
La méridienne principale a pour sommet a' : $x=-3$, $z=15$.
Le tore a son axe vertical o : $x=0$, $y=8$.
Sa méridienne principale a pour centre ω' : $x=\pm 6$, $z=12$; *elle passe de plus par le point* a'.
On calculera les angles des tangentes à la projection verticale de la courbe en a' *avec la ligne de terre.*

On donne le centre de l'hyperboloïde, qui est le centre de l'hyperbole méridienne et le sommet a' de cette méridienne, ce qui détermine l'axe transverse $o'a'$. Donc l'autre axe, qui est l'axe de la surface de révolution, est déterminé ; c'est la perpendiculaire en o' sur $o'a'$. D'ailleurs on dit que les génératrices de la surface font avec l'axe un angle de 45° ; il en est de même des génératrices de son cône asymptote qui est équilatère et par suite la méridienne de front est l'hyperbole équilatère déterminée par ses deux axes et son sommet a'. On

peut donc la construire par points en se servant des asymptotes dont l'une est verticale (o', o) et l'autre horizontale.

L'hyperboloïde ayant une direction de génératrices verticale, son contour apparent horizontal se réduit à deux points.

La méridienne du tore se compose des deux cercles dont les centres sont à la cote donnée sur les axes mêmes de l'hyperbole qu'on vient de construire.

Son contour apparent horizontal se compose des deux parallèles engendrés par les extrémités du diamètre horizontal.

Nous avons à déterminer l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes sont dans le même plan de front, se coupent en $(o, o'$ et dont les méridiennes se touchent au point a'. Ces deux surfaces admettent pour plan de symétrie commun le plan de front des méridiennes données et par suite leur intersection sera une courbe symétrique par rapport à ce plan ; comme elle est du huitième degré sa projection verticale sera une courbe du quatrième degré présentant un point double au point a' où les deux surfaces ont un plan tangent commun de bout.

Point courant et tangente. — Pour déterminer la courbe d'intersection, nous couperons les deux surfaces par des sphères ayant leur centre au point d'intersection (o, o') des axes ; elles donneront sur chaque surface des parallèles se projetant verticalement suivant des droites perpendiculaires à l'axe de révolution correspondant, et les points d'intersection de ces droites feront connaître les projections verticales d'autant de points de la courbe que l'on voudra. On passera ensuite à la projection horizontale en prenant la projection horizontale des parallèles horizontaux et menant des lignes de rappel. Nous avons représenté cette construction pour un point courant (m, m') situé sur la sphère de rayon $o'\mu'$. Nous avons obtenu la tangente au point m' à la courbe d'intersection en déterminant le plan des normales à chaque surface au point M et en menant la perpendiculaire MT à ce plan. A cet effet, nous avons mené les normales à chaque méridienne aux points μ' et μ_1 situés sur les parallèles passant par M et nous avons pris les points b' et c' où elles coupent l'axe de la surface correspondante ; on sait que BM et CM sont les normales cherchées ; la droite BC est une ligne de front du plan des normales, en sorte qu'il suffit de mener $m't'$ perpendiculaire à $b'c'$ pour avoir la tangente à la projection verticale. On obtient la tangente mt à la projection horizontale en menant la perpendiculaire à l'horizontale hd du plan des normales.

Sphères limites. — Les sphères limites ont pour rayons les longueurs des normales menées du point o' aux méridiennes : deux sont confondues, de rayon OA, et l'autre a pour rayon OF. Les premières donnent le point double a' ; il convient de remarquer qu'en ce point le parallèle de celle des surfaces, pour laquelle on ne regarde pas la sphère comme une sphère limite, a sa tangente de bout, et par suite on n'en peut déduire la tangente en ce point à la branche de courbe correspondante en projection verticale, et cela se présente pour les deux surfaces ; nous déterminerons ultérieurement par le calcul, comme l'indique l'énoncé, les coefficients angulaires de ces tangentes. En projection horizontale on peut voir que l'une des branches de courbe a sa tangente au point a perpendiculaire à la ligne de terre ; c'est la branche obtenue en prenant les points sur les parallèles définis par les points de l'arc $o'p'$ de la méridienne du tore, puisque ces points se projettent tous à droite de la ligne de rappel du point a et sont extérieurs au parallèle $o\alpha$.

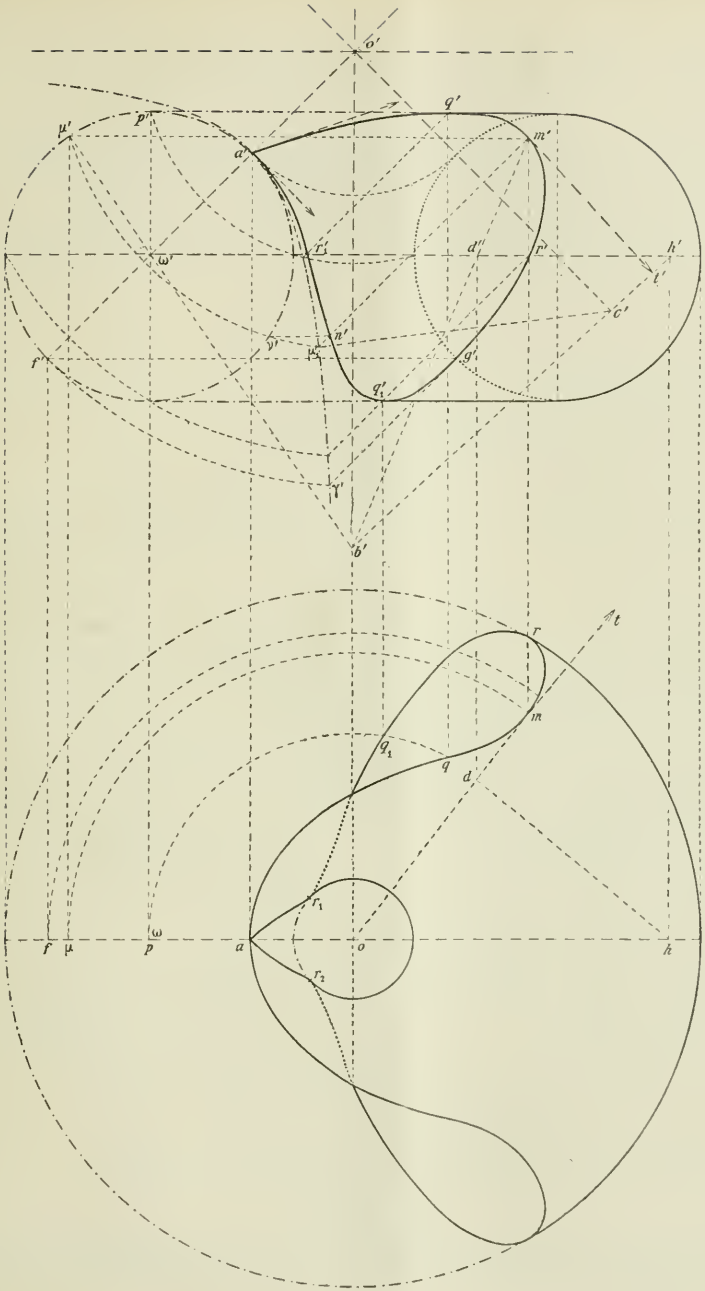
La sphère limite OF donne le point G et en même temps la tangente à sa projection verticale g' qui est la tangente $\gamma'g'$ à la projection verticale du parallèle de l'hyperboloïde en ce point, laquelle se confond avec la projection du parallèle lui-même.

Nous avons déterminé directement les points sur les contours apparents du tore, q' en projection verticale, r en projection horizontale, en prenant les sphères passant par les parallèles correspondants. Il n'y a aucun autre point sur le contour apparent vertical de l'hyperboloïde que le point a'.

La projection horizontale de la courbe d'intersection présente deux points doubles sur la ligne de rappel du point o qui est ici la projection de l'intersection des plans diamétraux des deux surfaces conjugués des cordes verticales, l'un le plan horizontal du centre du tore, l'autre le plan de profil passant par l'asymptote verticale de l'hyperbole méridienne.

Solide commun. — Le solide commun est la portion du tore intérieure à l'hyperboloïde. On voit immédiatement que sa projection verticale est limitée par la portion de contour apparent du tore comprise entre le demi-méridien qui se projette entre les branches de l'hyperbole méridienne et la courbe d'intersection cette courbe étant entièrement vue puisqu'on peut la regarder comme placée en avant du plan méridien de front, commun aux deux surfaces. Le demi-cercle méridien le plus rapproché de l'axe du tore est la seule partie cachée du contour apparent vertical du solide commun.

En projection horizontale, l'arc rq et son symétrique sont seuls placés sur la partie inférieure du tore et



Echelle : $\frac{3}{5}$.

pourraient être cachés, mais comme on enlève tout ce qui est à gauche de la courbe de section en la décrivant dans le sens aqm, l'arc rq_1 est découvert jusqu'au point double pour disparaître jusqu'à ce qu'il touche en r_1 le petit cercle de contour apparent intérieur du tore. On voit, en même temps, que l'arc de ce petit cercle situé à gauche du même observateur qui parcourt l'arc r_1a en remontant sur le tore, et compris entre r_1 et son symétrique r_2, est enlevé comme appartenant à la partie du tore extérieure à l'hyperboloïde.

Calcul des angles des tangentes en a' avec la ligne de terre. — Désignons par a l'ordonnée du centre de l'hyperboloïde ; le centre du cercle méridien du tore a pour abscisse a et si nous prenons pour plan des xy le plan horizontal de ce centre, ce cercle a pour équation

$$(x-a)^2+z^2=\frac{a^2}{2},$$

d'où le tore

$$x^2+y^2+z^2+\frac{a^2}{2}=\pm 2a\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (1)$$

L'hyperbole méridienne est $\qquad x(z-a)=\frac{a^2}{4}.$

Les équations d'un parallèle de l'hyperboloïde sont

$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-a)^2=\rho^2, \\ z-x=\lambda. \end{cases}$$

Il doit rencontrer la méridienne. On doit donc éliminer z et x entre

$$\begin{cases} x^2+(z-a)^2=\rho^2, \\ z-x=\lambda, \\ x(z-a)=\frac{a^2}{4}. \end{cases}$$

ce qui donne $\rho^2-\frac{a^2}{2}=(\lambda-a)^2$, et en y remplaçant ρ^2 par $x^2+y^2+(z-a)^2$ et λ par $z-x$, on a

$$y^2+2x(z-a)=\frac{a^2}{2}. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) définissent la courbe d'intersection.

La projection verticale s'obtient en éliminant y entre les deux, ce qui donne

$$[x^2+z^2-2x(z-a)+a^2]^2=4a^2\left[x^2-2x(z-a)+\frac{a^2}{2}\right].$$

Pour la simplifier, posons $\qquad x^2-2x(z-a)=X,$

d'où $\qquad X^2+2(z^2-a^2)X+(z^2+a^2)^2-2a^4=0, \qquad$ qui donne $\qquad X=a^2-z^2\pm a\sqrt{2a^2-4z^2}.$

L'équation de la courbe est donc

$$(x-z)^2+2ax-a^2=\pm a\sqrt{2a^2-4z^2}.$$

Si nous posons $\qquad f(x,z)=[(x-z)^2+2ax-a^2]^2-a^2(2a^2-4z^2),$

on a

$$\frac{1}{4}f'_x=[(x-z)^2+2ax-a^2][x-z+a],$$

$$\frac{1}{4}f'_z=[(x-z)^2+2ax-a^2](z-x)+2a^2z,$$

et l'on reconnaît que pour le point A de coordonnées $x=-\frac{a}{2}$, $z=\frac{a}{2}$, ces deux dérivées s'annulent comme la fonction elle-même.

Ce point est donc bien un point double de la courbe. Portons-y l'origine l'équation devient

$$[(x-z)^2+2az]^2+2a^2[2z^2-(x-z)^2]=0.$$

L'ensemble des termes du second degré est

$$8a^2z^2-2a^2(x-z)^2,$$

ce qui donne les deux tangentes demandées

$$\begin{cases} x+z=0, \\ x-3z=0. \end{cases}$$

La première est parallèle à l'axe de l'hyperboloïde, c'est-à-dire coïncide avec la tangente en a' à la méridienne du tore, comme pouvait le faire prévoir un raisonnement analogue à celui qui a été fait pour la projection horizontale de la courbe.

Note. — Si on fait tourner l'axe Az dans le plan des zx d'un angle égal à $-\frac{\pi}{4}$ en Az' et qu'on prenne comme nouveaux axes de coordonnées $z'Ax$, les formules de transformation sont

$$x = x' + z'\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad z = z'\frac{\sqrt{2}}{2},$$

et l'équation de la courbe devient

$$(x'^2 + az'\sqrt{2})^2 + 2a^2(z'^2 - x'^2) = 0.$$

Supprimons les indices et posons

$$x^2 + az\sqrt{2} = a\sqrt{2}(x + z)t\,;$$

l'équation nous donne

$$2a^2t^2(x + z)^2 = 2a^2(x + z)(x - z),$$

d'où

$$t^2(x + z) = x - z,$$

$$z = x\frac{1 - t^2}{1 + t^2}. \qquad (1)$$

On en déduit, en portant cette valeur dans la relation précédente,

$$x^2 + a\sqrt{2}\,\frac{1 - t^2}{1 + t^2}x = a\sqrt{2}t\frac{2x}{1 + t^2},$$

ou

$$x = a\sqrt{2}\,\frac{2t - 1 + t^2}{1 + t^2}. \qquad (2)$$

Les formules (1) et (2) montrent que la courbe est unicursale.

Si on pose

$$t = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

on a

$$x = a\sqrt{2}(\sin\varphi - \cos\varphi) = 2a\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$z = 2a\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\cos\varphi.$$

On peut donner une expression plus simple de z en transformant ce produit, à savoir

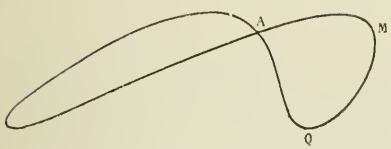
$$z = a\left[\sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\frac{\pi}{4}\right],$$

ou

$$z = -\frac{a\sqrt{2}}{2} + a\sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right).$$

Si donc on prend comme origine des angles φ la direction Az' elle-même, ce qui revient à poser $\varphi = \frac{\pi}{4} + \theta$, la courbe est définie par les formules

$$\begin{cases} x = 2a\sin\theta, \\ z = x\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right), \end{cases}$$



qui permettent de la construire par points.

Nous laissons au lecteur le soin d'en achever la construction, qui donne la forme ci-contre. Il va sans dire que la branche AMQ est la seule partie réelle de la projection de l'intersection des deux surfaces.

EXAMENS DE 1906 (*Suite*).

CERTIFICAT D'ÉTUDES SUPÉRIEURES (*Paris, octobre 1906*)

Mathématiques préparatoires.

Épreuve écrite.

1561. — 1° Calculer l'intégrale définie

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x)(1 + x^2)}.$$

2° Intégrer les équations différentielles simultanées

$$\frac{dy}{dx} = 3z - y, \qquad \frac{dz}{dx} = z + y + e^{ax},$$

où y et z sont des fonctions inconnues de x et a une constante.

3° On considère une fonction $f(x)$ admettant la période 2π

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

et coïncidant dans l'intervalle $-\pi$, $+\pi$ avec la fonction

$$e^x + e^{-x}, \qquad (-\pi < x < +\pi).$$

Calculer les coefficients du développement de cette fonction par la série de Fourier

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots$$

Épreuve pratique.

1562. — Un point mobile non pesant, de masse $m = 4$ grammes, est attiré par un centre fixe O proportionnellement à la distance, l'intensité de l'attraction à un centimètre de distance étant une dyne. A l'instant $t = 0$ le mobile est placé en un point A à une distance $OA = 5$ centimètres de O et lancé, perpendiculairement à OA avec une vitesse v_0 de 2 centimètres à la seconde.

1° Calculer les coordonnées du mobile à l'instant t.

2° Déterminer la trajectoire du mobile.

3° Calculer, à 1 seconde près, le temps que met le mobile à faire une révolution autour du point O.

4° Calculer, à l'instant t, l'énergie cinétique, l'énergie potentielle, l'énergie totale du mobile dans le champ créé par l'attraction du point O; déterminer le maximum et le minimum de la force vive et les positions correspondantes du mobile.

2° La position initiale A et la direction de la vitesse initiale restant les mêmes, quelle devrait être la grandeur de cette vitesse pour que la trajectoire soit un cercle.

QUESTIONS PROPOSÉES

1563. — On considère un hémisphère solide homogène de centre O et de rayon r et le rayon OA perpendiculaire au plan de base.

On coupe l'hémisphère par un plan parallèle au plan de base. A quelle distance du plan de base doit-on mener le plan sécant pour que le cylindre ayant pour base le cercle de section de l'hémisphère par le plan sécant et pour hauteur la distance du plan sécant au plan de base ait même moment d'inertie par rapport à l'axe OA que le segment sphérique déterminé dans l'hémisphère par le plan sécant extérieurement au cylindre?

Calculer cette distance à 1^{cm} près, sachant que r est égal à $8^m,15$.

CH. MICHEL.

1564. — Un point pesant M se déplace sans frottement sur un cercle vertical de centre O, il est de plus attiré proportionnellement à la distance par le point le plus élevé du cercle. Soit α l'angle de OM avec la verticale.

1° Déterminer en fonction de α l'accélération angulaire $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$. Interpréter l'équation obtenue.

2° Vitesse du mobile.

3° Réaction du cercle.

4° Mouvement dans le cas des petites oscillations.

J. DEMEUNYNCK.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE (*Concours de 1905*).

1500. — *A. Une pile de force électromotrice égale à 3 volts alimente un appareil à électrolyse à azotate cuivrique et à électrodes en platine, d'une force contre-électromotrice de* $1^{\text{volt}},6$. *La résistance de la pile est de* $0^{\text{ohm}},1$, *celle de l'appareil à électrolyse de* $0^{\text{ohm}},3$.

On demande : 1° l'intensité du courant ; 2° la quantité de cuivre déposée en une heure.

B. La même pile alimente en parallèle l'appareil à cuivre précédent et un appareil à électrolyse à sulfate de zinc et à électrodes en platine. Sur l'un des deux circuits, on place un rhéostat et on règle sa résistance de telle manière que le poids du cuivre soit le double du poids du zinc déposé dans le même temps. La force contre-électromotrice de l'appareil à sulfate de zinc est de $2^{\text{volts}},7$, *sa résistance de* $0^{\text{ohm}},2$.

On demande : 1° la résistance du rhéostat, l'intensité des courants passant par les deux dérivations, le poids de chacun des deux métaux déposé en une heure ; 2° la quantité de chaleur (en petites calories) dégagée dans le rhéostat en une heure.

N. B. La résistance des fils sera considérée comme négligeable.

Rappel de certaines constantes numériques :

Poids d'argent libéré par le passage d'un coulomb : $1^{\text{mg}},118$.

Poids atomiques : argent, 108 ; *cuivre,* 63 ; *zinc,* 65.

La petite calorie équivaut à 4,17 *joules.*

A. Dans le premier cas, la force électromotrice totale est $3 - 1,6 = 1,4$ et la résistance $0,1 + 0,3 = 0,4$. L'intensité du courant est donc $\frac{1,4}{0,4} = 3,5$ ampères.

La quantité d'électricité débitée en une heure est $3,5 \times 3600$ coulombs.

Le cuivre étant divalent, à 108 d'argent équivalent 31,5 de cuivre, et le poids de cuivre déposé est

$$3,5 \times 3600 \times \frac{31,5 \times 1,118}{108} = 4108^{\text{mg}},65.$$

B. La force contre-électromotrice de l'appareil à cuivre étant beaucoup plus petite que celle de l'appareil à zinc, il est vraisemblable *a priori* que le rhéostat devra être placé sur le circuit où se trouve l'appareil à cuivre. Si on le supposait placé sur l'autre, le calcul donnerait une résistance négative.

Appelons R, r, r' et x les résistances respectives de la pile, de l'appareil à cuivre, de l'appareil à zinc et du rhéostat, E, e et e' les trois forces électromotrices, I, i et i' les intensités du courant dans la pile et dans chacun des circuits dérivés.

L'application des théorèmes de Kirchhoff nous donne d'abord les équations

$$\text{(1)} \qquad \text{IR} + i(r + x) = \text{E} - e,$$

$$\text{(2)} \qquad \text{IR} + i'r' = \text{E} - e',$$

$$\text{(3)} \qquad \text{I} = i + i'.$$

La condition imposée aux poids des métaux libérés par le courant détermine le rapport des intensités par l'équation

$$\text{(4)} \qquad 63i = 2 \times 65i'.$$

Éliminons d'abord I et i' ; (1) et (2) deviennent, après introduction des valeurs numériques,

$$i(0,448 + x) = 1,4,$$
$$i \times 0,245 = 0,3.$$

On en déduit

$$x = 0{,}697,$$
$$i = 1{,}22,$$
$$i' = 0{,}59.$$

En une heure, il passe dans le voltamètre à sulfate de zinc $0{,}59 \times 3600$ coulombs qui déposent un poids de zinc

$$0{,}59 \times 3600 \times \frac{32{,}5 \times 1{,}118}{108} = 715^{mg}.$$

Le poids de cuivre est double, soit 1 430 milligrammes.

Enfin la chaleur dégagée dans le rhéostat en une heure est, d'après la loi de Joule,

$$\frac{\overline{1{,}22}^2 \times 0{,}697}{4{,}17} \times 3600 = 900 \text{ calories}.$$

(Dans les solutions qui nous ont été envoyées, la première partie était, en général traitée exactement, mais les théorèmes de Kirchhoff étaient appliqués, dans la seconde, d'une manière incorrecte.)

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1504. — *On donne une strophoïde S et on considère les cercles variables Γ tangents au point double O à une droite donnée Δ et rencontrant S en des points A et B.*

1° *Trouver le lieu du pôle P de la droite AB par rapport à Γ.*

2° *Montrer que le cercle Σ de centre P et de rayon PA passe par deux points fixes C et D.*

3° *Montrer que si la direction Δ varie, le cercle circonscrit au triangle OCD passe par un point fixe ω.*

4° *On suppose que la strophoïde S varie en conservant mêmes tangentes au point double, et en passant en outre par un point fixe α. Montrer que le lieu de ω est alors un cercle. — Cas où le point α est à l'infini.*

1° Prenons pour axes les tangentes au point double ; l'équation de la strophoïde sera

$$(y - mx)(x^2 + y^2) - axy = 0.$$

L'équation des cercles Γ est

$$x^2 + y^2 - \lambda(y - \alpha x) = 0,$$

α étant un nombre constant ; en remplaçant $x^2 + y^2$ par $\lambda(y - \alpha x)$ dans l'équation de la strophoïde, nous obtenons les deux droites qui joignent l'origine aux points A et B :

$$\lambda(y - \alpha x)(y - mx) - axy = 0.$$

Le cercle Γ, en dehors des points cycliques, rencontre la cubique en quatre points : deux confondus avec le point O et deux autres, A et B. Nous avons deux coniques qui passent en ces quatre points : le cercle Γ et le couple de droites déjà trouvé. La droite AB, jointe à la tangente au cercle Γ à l'origine, constitue un des systèmes de sécantes communes à ces deux coniques, et, en désignant par $ux + vy + w$ le premier membre de l'équation de la droite AB, nous pouvons écrire l'identité

$$\mu(x^2 + y^2 - \lambda(y - \alpha x)) + \lambda(y - \alpha x)(y - mx) - axy = (y - \alpha x)(ux + vy + w).$$

Le second membre étant nul pour $y = \alpha x$, il en est de même du premier, et ceci donne

$$\mu = \frac{a\alpha}{1 + \alpha^2}.$$

Remplaçons alors μ pour cette valeur et supprimons le facteur $y - \alpha x$, nous aurons

$$\frac{a(\alpha y - x)}{1 + \alpha^2} + \lambda(y - mx) - \frac{a\alpha\lambda}{1 + \alpha^2} = ux + vy + w.$$

L'équation de la droite AB est donc

$$a[\alpha y - x - \lambda\alpha] + \lambda(1+\alpha^2)(y - mx) = 0;$$

elle tourne autour d'un point fixe, quand λ varie.

Cela posé, appelons X, Y, les coordonnées du pôle de AB par rapport au cercle; l'équation de cette droite pourra s'écrire

$$X(2x + \lambda\alpha) + Y(2y - \lambda) - \lambda(y - \alpha x) = 0,$$

et, en identifiant cette deuxième forme avec la première, on trouve

$$\frac{2X + \lambda\alpha}{a + \lambda m(1+\alpha^2)} = \frac{2Y - \lambda}{-a\alpha - \lambda(1+\alpha^2)} = \frac{\lambda(\alpha X - Y)}{+a\lambda\alpha},$$

puis, il n'y a plus qu'à éliminer λ entre ces deux équations. Or, en égalant les deux premiers rapports au dernier, on trouve deux valeurs de λ qu'il suffit d'égaler entre elles. Ce calcul nous donne

$$\frac{a(\alpha x + y)}{a\alpha^2 - m(1+\alpha^2)(\alpha x - y)} = \frac{a\alpha(\alpha x + y)}{(1+\alpha^2)(\alpha x - y) - a\alpha}.$$

Nous apercevons déjà la droite $\alpha x + y = 0$, puis la droite

$$(1 + m\alpha)(\alpha x - y) - a\alpha = 0.$$

Le premier lieu est un lieu exceptionnel qui correspond à la valeur $\lambda = 0$, pour laquelle le cercle Γ est un cercle de rayon nul. Le second est le vrai lieu : c'est une droite parallèle à Δ.

2° Le cercle Σ est un cercle orthogonal au cercle Γ et qui fait partie du faisceau linéaire déterminé par le cercle Γ et la droite AB. Il se déterminera donc aisément en prenant le cercle général du faisceau et exprimant que la puissance du centre du cercle Γ par rapport à ce nouveau cercle est égale au carré du rayon de Γ. Le centre de Γ a pour coordonnées $\frac{-\alpha\lambda}{2}$, $\frac{\lambda}{2}$ et le carré de son rayon est $\rho^2 = \frac{\lambda^2}{4}(1+\alpha^2)$; si donc nous prenons pour cercle du faisceau le cercle dont l'équation est

$$x^2 + y^2 - \lambda(y - \alpha x) + \mu[a(\alpha y - x - \lambda\alpha) + \lambda(1+\alpha^2)(y - mx)] = 0,$$

nous aurons

$$\frac{\lambda^2}{2}(1+\alpha^2) = \mu\left[\lambda(1+\alpha^2)\left(\frac{m\alpha\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2}\right)\right],$$

puis

$$\mu = \frac{1}{1 + m\alpha}.$$

Le cercle Σ a donc pour équation

$$(1 + m\alpha)[x^2 + y^2 - \lambda(y - \alpha x)] + a(\alpha y - x - \lambda\alpha) + \lambda(1+\alpha^2)(y - mx) = 0;$$

il est visible qu'il passe par deux points fixes quand λ varie, les points C et D déterminés par les deux équations

$$(1 + m\alpha)(x^2 + y^2) + a(\alpha y - x) = 0,$$
$$(1 + m\alpha)(y - \alpha x) + a\alpha - (1+\alpha^2)(y - mx) = 0.$$

3°. Le cercle circonscrit au triangle OCD est visiblement le cercle représenté par la première équation; son équation contient α au premier degré ; par conséquent le cercle en question passe par deux points fixes ; l'un est le point O ; l'autre est le point demandé ω.

4°. Les coordonnées du point ω vérifient les deux équations

$$x^2 + y^2 - ax = 0, \qquad m(x^2 + y^2) + ay = 0.$$

D'autre part, quand la strophoïde varie dans les conditions indiquées, il existe une relation linéaire entre m et a; on en déduit immédiatement que le lieu du point ω est un cercle.

Si le point α donné est à l'infini, m est fixe, et le lieu du point ω est une droite, la droite $y + mx = 0$, symétrique de la direction asymptotique par rapport aux tangentes au point double.

G. FOUGRY, à Roanne.

Solution géométrique. — Transformons la figure par inversion par rapport au point double O de la strophoïde. Celle-ci devient une hyperbole équilatère H passant par le point O, les cercles Γ deviennent des droites D se déplaçant parallèlement à elles-mêmes.

1 et **2.** — Le cercle Σ de centre P et de rayon PA est orthogonal à Γ en A et B ; il devient dans la transformation le cercle de diamètre ab qui rencontre H aux points c et d : le triangle abc est rectangle en c, donc H est tangente à la perpendiculaire menée de c à ab Le point c est donc un des points de H où la tangente est parallèle à la perpendiculaire à D, le point d est l'autre point : ces points c et d, sont donc fixes. Le cercle de diamètre ab passe donc par deux points fixes situés sur H : par suite le cercle Γ passe par deux points fixes C et D situés sur S et le lieu de P est la droite perpendiculaire à CD en son milieu.

3. — Le cercle circonscrit au triangle OCD se transforme par inversion en la droite cd qui passe, lorsque la direction de D varie, par le centre γ de H : ce cercle passe donc lui-même par un point fixe ω transformé de γ.

4. — Pour trouver le lieu du point ω lorsque la strophoïde varie en conservant mêmes tangentes au point double et en passant en outre par un autre point fixe α, on est ramené à déterminer le lieu du centre γ d'une hyperbole équilatère de directions asymptotiques données et qui passe par deux points fixes O et α'. Si l'on considère la droite γI joignant le centre γ au milieu I de Oα', cette droite qui est symétrique en direction de Oα' par rapport aux asymptotes de H est fixe; c'est donc le lieu du point γ : le lieu de ω est donc un cercle passant par le point O. Si α est à l'infini, γI passe par O et le lieu de ω est une droite issue de O.

G. PÉLISSIER à Toulouse.

Bonne solution de M. Audibert, élève au lycée de Marseille.

ÉCOLE CENTRALE (1906)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Suite*).

Géométrie analytique (M. Lebesgue.)

Géométrie analytique à deux dimensions.

3470. — Construire la longueur $$x = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + bc}}.$$

3471. Etablir l'équation de la ligne droite. On considère les distances X, Y d'un point M à deux axes quelconques Ox, Oy. Quelle relation y a-t-il entre X et Y quand le point M décrit une droite ?

3472. — On prend deux points O, O' et un point M défini par ses distances α, β à O et O'. Trouver l'équation d'une droite dans ce système de coordonnées.

3473. — Les médianes d'un triangle sont concourantes.

3474. — Lieu des points dont la somme des distances à deux droites fixes est constante.

3475. — Équation de l'ensemble des bissectrices des angles des deux droites $x^2 + 2y^2 + 6xy = 0$.

3476. — Déterminer λ de façon que l'équation $x^2 + \lambda xy - 2y^2 + 3y - \lambda = 0$ représente un système de deux droites.

3477. — Positions respectives des deux circonférences
$$x^2 + y^2 - 3x + 2 = 0, \qquad x^2 + y^2 + 5y - 4 = 0.$$

3478. — On considère le triangle ayant pour sommets les trois points : A(1, 0), B(0, 1), C(— 2, 0). Équation du cercle des neuf points relatif à ce triangle.

3479. — Équation du cercle passant par les deux points A(1, 0), B(2, 0) et tangent à la droite $x = y$.

3480. — Équation d'une circonférence tangente à l'axe des x et à la première bissectrice des angles des axes de coordonnées; lieu des points de contact des tangentes parallèles à oy.

3481. — Transformation par inversion. Figure inverse d'un cercle.

3482. — Équation d'une circonférence rapportée à des axes obliques situés dans son plan. Conditions pour qu'une équation du second degré représente une circonférence dans un système d'axes obliques.

3483. — Centre radical des trois cercles :
$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \qquad x^2 + y^2 - 6x - 1 = 0, \qquad x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0.$$
Puissance de ce point par rapport aux trois circonférences. — Quelle est l'équation la plus générale des circonférences passant par un point commun à trois circonférences.

3384. — Angle des deux cercles $x^2 + y^2 + 2x + y = 0$, $x^2 + y^2 - x + 3y = 0$.

3485. — Condition d'orthogonalité de deux circonférences. Équation d'une circonférence passant par l'origine et orthogonale à $x^2 + y^2 - 5x + 6y - 1 = 0$.

3486. — On a un point A(1, 0) et un point B(0, 1). — Par le point A et son symétrique A′ par rapport à l'origine des coordonnées, on fait passer une première circonférence; par le point B on en fait passer une autre orthogonale à la première et de plus tangente à l'axe des x. Lieu des points de rencontre de ces deux circonférences.

3487. — Concavité et convexité d'une courbe en axes rectangulaires. Appliquer aux courbes suivantes :

$$y^2 + x^3 = 1, \qquad \sin y = \operatorname{tg} x,$$
$$y = x + (x-1)\sqrt{x^2-1}, \qquad L(xy) = \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

3488. — Équation de la normale d'une courbe plane. Trouver les courbes dont les normales passent par un point fixe; dont les normales passent à une distance a de l'origine.

3489. — Définition du centre de courbure. Chercher le centre de courbure en un point de la courbe $y = \sin x$.

3490 — Rayon de courbure en un point de la courbe $x^2 - y^2 = 1$. — Rayon de courbure de l'ellipse $x^2 + 2y^2 = 1$ en un sommet du grand axe.

3491. — Construire les courbes

$$y = x - 1 + \sqrt{x}, \qquad y = x + \frac{1}{x^2}, \qquad y = x + \sqrt{\frac{1}{x}}, \qquad y = \frac{x}{1+x^2}, \qquad y = \frac{x+1}{x^2+1};$$
$$y = \frac{x^2+1}{x^2-1}, \qquad y = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x}.$$

3492. — Construire la courbe $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$; lieu des milieux des cordes parallèles à $x + y = 0$.

3493. — Construire les courbes

$$\left|\begin{array}{l} x = \dfrac{t-1}{(t+1)^2}, \\ y = \dfrac{t}{t^2-1}; \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} x = \cos t, \\ y = \sin 2t; \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} x = \cos^2 t, \\ y = \sin(t+1). \end{array}\right.$$

3494. — Étudier dans le voisinage de l'origine la courbe $x^3 + x^2 - y^2 + xy = 0$.

3495. — Construire les courbes $3x^3 + y^2 - y = x$; $x^4 + y^4 + x^2 - y^2 = 0$.

3496. — Directions asymptotiques de la courbe $x(x-y)(x+y)^2 + 4x^2 - 5y = 0$. Trouver d'abord l'asymptote parallèle à $x = 0$, puis les asymptotes parallèles à la direction $x + y = 0$.

3497. — Distance de deux points en coordonnées polaires. Équation d'une circonférence quelconque en coordonnées polaires. Distance de deux points dans un système de coordonnées bipolaires.

3498. — Qu'est-ce qu'on représente en coordonnées polaires par V ? Calculer tg V. — Quelle est la courbe dans laquelle $V = \omega$? — Même question pour $V = 2\omega$.

3499. — Construire les courbes : $\rho = \omega + 3$; $\omega = \rho + 1$; $\rho = \omega^2 - \omega$ chercher s'il y a un axe de symétrie,

$$\rho = \frac{\omega+1}{\omega-1}, \qquad \rho = \frac{\omega-3}{\omega+2}.$$

3500. — Directions asymptotiques de la courbe $\rho = \dfrac{\omega^2 + 2\omega - 1}{\omega^2 - 1}$. Trouver l'asymptote qui correspond à la direction $\omega = 1$.

3501. — Construire les courbes

$$\left|\begin{array}{l} \rho = \dfrac{1}{t+1}, \\ \omega = \dfrac{1}{t-1}; \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} \rho = \dfrac{t}{t^2+1}, \\ \omega = \dfrac{t}{t+1}. \end{array}\right.$$

3502 — Transformation d'une figure par inversion. Équation d'une droite en coordonnées polaires. Figure inverse.

3503. — Construire la courbe $\rho = \operatorname{tg}\dfrac{\omega}{2}$: montrer que cette courbe est égale à sa propre inverse (en prenant pour pôle l'origine et pour puissance d'inversion $K = 1$).

3504. — Construire

$$\omega = \sin\rho, \qquad \rho = \frac{\cos\omega}{1+\sin\omega}, \qquad \rho = \frac{3\cos\omega}{1-\sin\omega},$$
$$\rho = \frac{\sin\omega}{2\cos\omega + 1}, \qquad \rho = \frac{1}{\cos^2\omega} \quad \text{(Points d'inflexion).}$$

3505. — Que représente l'équation $\rho = \dfrac{1}{1 - e\cos\omega}$? — Directrice correspondant au pôle.

3506. — Que représente l'équation $\rho = \dfrac{1}{\cos(\omega - 3) + 5}$?

3507. — Construire la courbe $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{a \sin 2\omega + b \cos 2\omega + c}}$.

3508. — Lieu des points dont la somme des distances à un point fixe et à une droite fixe est constante.

3509. — On considère une ellipse rapportée à ses axes ; on joint un point M de l'ellipse aux sommets A et A' du grand axe. — En A on élève la perpendiculaire à AM. Soit D le point de rencontre avec A'M ; lieu du point D.

3510. — Un triangle a un sommet A qui décrit la droite $x + 1 = 0$, un sommet C qui décrit la droite $y + 1 = 0$; les côtés AB, BC, CA passent respectivement par les points de coordonnées $(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$. Lieu du troisième sommet.

3511. — On considère deux droites $x + y + 1 = 0$, $3x - y + 2 = 0$. Par l'origine on mène une sécante qui les rencontre respectivement en A et B et on porte sur la sécante $\overline{OC} = \overline{AB}$. Lieu du point C.

3512. — De l'origine des coordonnées, on abaisse des perpendiculaires sur des tangentes à la circonférence $(x - 1)^2 + y^2 - 1 = 0$. Lieu des pieds de ces perpendiculaires. — Équation du lieu en coordonnées polaires.

3513. — Lieu d'un point invariablement lié à un segment de droite de longueur constante dont les extrémités se déplacent sur deux droites rectangulaires.

3514. — Que représentent les équations

$$x^2 + xy + y^2 - 3x + 5y + 2 = 0, \qquad x^2 + xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0\ ?$$

Construire les courbes.

3515. — Rapporter à ses axes la conique $x^2 + xy + y^2 - 2x + 3y + 1 = 0$.

3516. — Même question pour $x^2 - 3xy - 2y^2 + 7x - 1 = 0$.

3517. — Équation de l'ensemble des asymptotes de la conique $x^2 - y^2 + 2x - 2y + 5 = 0$.

3518. — Position de l'origine par rapport à la conique $x^2 + 3xy - 2y^2 + 5x - 7 = 0$.

3519. — Position du point $x = 1$, $y = 2$ par rapport à la conique $x^2 - xy + y^2 - 3x + 5y + 2 = 0$.

3520. — Placer le point $x = 2$, $y = 5$ par rapport à la courbe $x^2 + xy - y^2 + 3x - 6y + 3 = 0$.

3521. — Que représente l'équation $(\lambda + 1)x + \lambda y - 3 = 0$? Étudier la position de cette droite par rapport à la conique $3x^2 - xy + y^2 - 12x + y = 0$.

3522. — Intersection de la droite $x + 3y + \lambda = 0$ avec la conique $x^2 + xy - y^2 + 3y = 0$.

3523. — Discuter l'équation $y^2 = 2px + qx^2$.

3524. — Étudier la nature de la conique $x^2 + 2\lambda xy - \lambda^2 x + \lambda = 0$.

3525. — Discuter suivant la valeur de λ la conique d'équation

$$x^2 + 2\lambda xy + (\lambda^2 - 1)y^2 - 2x + 2\lambda y - 1 = 0.$$

Montrer que cette conique passe par des points fixes.

3526. — Définition des foyers. Chercher les foyers de la courbe $x^2 - 2y^2 = 1$.

3527. — Démontrer par le calcul que l'ellipse est la projection orthogonale d'un cercle. En déduire les théorèmes d'Apollonius.

3528. — On trace une ellipse et son cercle principal ; on mène une parallèle au petit axe qui donne un point M sur le cercle et un point m sur l'ellipse. Trouver une relation entre les angles que font OM et Fm avec le grand axe de l'ellipse, O étant le centre de l'ellipse et F le foyer situé par rapport au petit axe du même côté que M et m.

3529. — Déterminer R de façon que le cercle $(x - 1)^2 + y^2 - R^2 = 0$ soit bitangent à l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

3530. — On considère une hyperbole rapportée à ses axes. Exprimer les coordonnées d'un point de cette courbe en fonction rationnelle d'un paramètre.

3531. — On donne l'hyperbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$; on considère la tangente en un point M de la courbe. Montrer par le calcul que cette tangente est bissectrice de l'angle des droites qui joignent le point M aux deux foyers.

3532. — Soit $xy = k$ l'équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes. θ étant l'angle des asymptotes, a la longueur du demi-axe transverse, calculer k en fonction de θ et de a.

3533. — Tangente à la parabole $y^2 - 2px = 0$ au point d'ordonnée y_0. Équation de la circonférence circonscrite au triangle formé par trois tangentes. Calculer les coordonnées du point de rencontre des hauteurs de ce triangle.

3534. — Établir l'équation d'une parabole tangente aux axes de coordonnées.

3535. — Lieu des centres des coniques ayant pour équation $C + \lambda C_1 = 0$.

3536. — Équation générale des coniques passant par quatre points. Écrire que l'une de ces coniques est une circonférence. Trouver la condition pour que quatre points d'un plan soient les quatre sommets d'un quadrilatère inscriptible.

3537. — On considère la conique $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Tangente en un point $(x = a\cos\varphi,\ y = b\sin\varphi)$. Équation générale des coniques tangentes à l'ellipse en ce point. Considérant l'une d'elles, quelle sera la direction de la droite joignant les deux autres points d'intersection ? Écrire que cette circonférence a pour rayon le rayon de courbure au point considéré.

3538. — Déterminer une conique passant par les trois points (1, 1), (2, 3), (5, 4) et tangente à Ox.

3539. — On considère la circonférence $x^2 + y^2 - 3x + 4 = 0$. Équation des coniques ayant Oc pour axe de symétrie et bitangentes à la circonférence.

3540. — Équation générale des hyperboles équilatères passant par les trois points (1, 0), (0, 1), (— 2, 0).

3541. — Démontrer que les hauteurs d'un triangle concourent au même point. Équation générale des coniques passant par les sommets du triangle et l'orthocentre.

Géométrie analytique à trois dimensions.

3542. — Nouvelles coordonnées du point (3, — 5, 7) quand on prend pour axe des x la bissectrice de l'angle xoy et pour axes des y et des z deux perpendiculaires à ce nouvel axe des x, faisant avec le plan xoy des angles de 45°.

3543. — Centre des moyennes distances.

3544. — Mettre la droite d'équations $2x + y - z = 5$, $6x - y + 5z = 2$, sous la forme $x = az + h$, $y = bz + k$.

3545. — On considère la droite $x = \frac{t}{\lambda - t} z + 1$, $y = \frac{\lambda + t}{\lambda - t} z + \frac{1}{\lambda - t}$; démontrer que si λ et t sont variables, il passe une telle droite et une seule par tout point de l'espace.

3546. — Un triangle a deux sommets fixes ; le troisième décrit une droite A ; lieu de son centre de gravité.

3547. — Angle des deux droites

$$\left| \begin{array}{l} x = 3z + 5, \\ y = 5z - 3 ; \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} x + y - 3z = 1, \\ 3x - 2y + z = 5. \end{array} \right.$$

3548. — Équation du plan mené par la droite $x + y - z - 1 = 0$, $x + 2y = 0$ et le point d'intersection des trois plans

$$3x + y - z = 2, \qquad x + y + z = 1 \qquad x - 2y + 2z = 3.$$

3549. — Condition pour que deux droites de l'espace se rencontrent. — Déterminer λ pour que les deux droites

$$(1) \qquad x - 1 = \frac{y - 2}{3} = \frac{z + \lambda}{5} \qquad \text{e} \qquad (2) \left| \begin{array}{l} 2x + y + 2z = \lambda, \\ x + 2y + 3z = 2 \end{array} \right.$$

se rencontrent.

3550. — Distance d'un point à un plan. — Équation des plans situés à des distances données de deux points donnés.

3551. — Démontrer que les six plans bissecteurs intérieurs dans un tétraèdre concourent en un même point.

3552. — Trouver l'angle des deux plans $3x + 6y - 7 = 0$, $3x + y - 2z + 18 = 0$.

3553. — Distance du point (3, 4, 2) à la droite d'équations

$$3x + 2y = 1, \qquad x + 3z = 4.$$

3554. — Distance d'un point de Oz à la droite $x = 3z + 5$, $y = z - 7$. Trouver le minimum de cette distance.

3555. — Lieu des points équidistants d'un point et d'un plan. — Projection sur le plan des xy de la section de la surface par un plan quelconque.

3556. — Lieu des points équidistants d'un point et d'une droite dans l'espace.

3557. — Perpendiculaire commune aux deux droites

$$\left| \begin{array}{l} x = 0, \\ y = 3z ; \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} x = z + 1, \\ y = -2z + 3. \end{array} \right.$$

3558. — Même question pour les deux droites

$$\left| \begin{array}{l} x = y, \\ y = 1 ; \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} x + 2y - z + 3 = 0, \\ 3x - y = 0. \end{array} \right.$$

3559. — Volume du tétraèdre ABCD, A(0, 0, 0), B(0, 2, 3), C(0, 3, 1), D(4, 5, 6).

3560. — On considère le plan $3x - 2y + 3z - 1 = 0$ rapporté à un système d'axes rectangulaires dans lequel Oz est vertical. Équation d'une ligne de plus grande pente du plan. Équation des droites du plan faisant un angle de 30° avec le plan horizontal

3561. — Établir l'équation de la sphère en coordonnées semi-polaires, cas où l'équation obtenue se simplifie.

3562. — On considère la sphère $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 - 1 = 0$; on la coupe par le plan $y = x \operatorname{tg} \theta$ et on fait tourner la section de l'angle θ autour de Oz. Trouver les équations de la section dans cette seconde position.

3563. — Positions respectives des deux sphères

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - z = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 + x - 3y + z = 0.$$

Plans tangents communs à ces deux sphères.

3564. — Équation générale des sphères qui interceptent sur les trois axes de coordonnées des longueurs données. Lieu des centres de ces sphères.

3565. — Puissance d'un point par rapport à une sphère.

3566. — Équation de la sphère passant par les trois points A(1, 0, 0), B(2, 3, 0), C(3, 2, 0) et tangente à Oz.

3567. — Quel est l'axe radical des trois sphères

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y + 5 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - 7 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + y - 1 = 0 ?$$

Quel est le lieu des centres des sphères orthogonales aux trois sphères données ?
Trouver celle de ces sphères dont le rayon est minimum.

3568. — Équations d'une circonférence de l'espace rencontrant les trois axes de coordonnées.

3569. — Lieu des centres des sphères tangentes aux deux droites

$$(x = y,\quad z = 1)\ ;\qquad (x = -y,\quad z = -1).$$

Le lieu étant un paraboloïde hyperbolique, trouver ses génératrices rectilignes.

3570. — Équation générale des sphères tangentes à l'axe des x et à l'axe des y. Chercher celles de ces sphères qui sont tangentes à la droite $x = z$, $y + z = 1$. Lieu de leurs centres.

3571. — Équations des droites rencontrant l'axe des z et tangentes à la sphère $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 1 = 0$.

3572. — Lieu des points de contact des tangentes à la sphère $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1$ qui sont parallèles au plan xOy et rencontrent Oz.

3573. — Droites parallèles au plan xoy et tangentes à la fois aux deux sphères

$$(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1,\qquad (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1.$$

3574. — Tangente à la courbe $x = t$, $y = \sin t$, $z = \operatorname{tg} t$. Équation du plan normal.

3575. — Tangente à la courbe $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$. Normale principale.

3576. — Plan osculateur à la courbe : 1° $x = t^3$, $y = 1 - t$, $z = t^2$; 2° $x = t^2 + 1$, $y = \sin t$, $z = \cos t$.

3577. — Équation du plan tangent à une surface. — Équation des surfaces dont tous les plans tangents sont parallèles à Oz.

3578. — Centre de la surface $x^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2zx + y = 0$. Cette surface étant un cylindre, mettre son équation sous la forme $\varphi(P, Q) = 0$.

3579. — Équation générale des cylindres. — Montrer que l'équation $y - z + 3 = \sin(x + y + z)$ représente un cylindre.

3580. — Équation générale des cônes — Que représente l'équation

$$(x-1)^2 + x + y - z - 1^2 = (y - z)(y + z)\ ?$$

3581. — Équation du cône de sommet $(0, 0, 1)$ ayant pour base la circonférence $z = 0$, $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

3582. — Équation du cône ayant pour sommet le point $(1, 2, 3)$ et pour base la circonférence

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,\qquad 3x - y + 2z = 17.$$

3583. — On considère la droite, variable avec λ, μ, ν,

$$x = \lambda z + \mu,\qquad y = \mu z + \nu.$$

Combien passe-t-il de ces droites par un point de l'espace ? — Équation du cône formé par les droites qui passent par le point considéré.

3584. — On donne la sphère $x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 5y + 4 = 0$? — Équation du cône circonscrit ayant pour sommet l'origine.

3585. — Que représente l'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$? — Équation de la surface formée par les normales en O aux différents plans tangents. — Même problème pour $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$.

3586. — Que représente l'équation $(x + 3z - 2)^2 + (y + z)^2 = (z + 1)^2$? — Section par le plan $z = 0$. Équation générale des sphères passant par cette intersection. — Équations de l'autre circonférence d'intersection d'une pareille sphère avec le cône.

3587. — Équation générale des surfaces de révolution. — La surface

$$x^2 + y^2 + z^2 + yz + zx + xy = 1$$

est-elle de révolution ?

3588. — Équation des surfaces de révolution dont les plans tangents font un angle de 45° avec Oz.

3589. — On considère une droite $x = az + h$, $y = bz + k$. — Équation de la surface engendrée par cette droite en tournant autour de Oz. Trouver les génératrices de cette surface.

3590. — Équation de la surface de révolution engendrée par la conique $y = 0$, $x^2 + 3z^2 - 2z + x = 0$ en tournant autour de Oz ; — autour de Ox.

3591. — Équation de la surface engendrée par une droite s'appuyant sur Ox et sur les deux droites $(z = 1,\ x = y)$; $(z = 2,\ x = -y)$.

3592. — Équation de la surface engendrée par une parallèle au plan xOy s'appuyant sur Oz et sur la droite $x + y = 1$, $z = x$. Génératrices rectilignes de la surface.

3593. — Surface engendrée par une droite s'appuyant sur Oz, sur la droite $x = z + 1$, $y = z + x$ et restant parallèle au plan xoy.

3594. — Que représente l'équation $\dfrac{y}{3} = \operatorname{tg}\dfrac{x + y}{z}$? Étudier la section par le plan $z = 1$.

3595. — Intersection d'une surface du second degré par son plan tangent.

3596. — Plan tangent à la surface $x^3 + z^3 - 6z^2 + 3x - z = 0$. Section de la surface par son plan tangent à l'origine.

3597. — Mener par l'origine les plans tangents à la surface $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 1$.

3598. — Plans tangents à la surface $x^2 - y^2 = 2z$ par le point $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$.

3599. — Tangentes à l'ellipsoïde $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$, parallèles à la droite $x = y = z$.

3600. — Sections planes de la surface $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
3601. — Quelles sont les quadriques contenant des cercles ?
3602 — Diamètres conjugués dans l'ellipsoïde.
3603. — Équation d'un hyperboloïde. Qu'est-ce que le cône asymptote ? Propriétés des plans tangents à ce cône.
3604. — Génératrices rectilignes de la surface $x^2 - 2y^2 + z^2 = 2$.
3605 — Que représente l'équation $x^2 - 3y^2 = z$? Génératrices rectilignes.
3606. — Même question pour $x^2 - 4z^2 = y$.
3607. — On considère la surface $x^3 - z^3 = 3x^2 - y$. Reconnaître si cette surface a des génératrices rectilignes.

(*A suivre.*)

CONCOURS DE 1906 (*Suite.*)

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE.

Physique et Chimie.

I. — Définir la dilatation apparente et la dilatation absolue pour les liquides. Mesure de la dilatation absolue du mercure.

II. — **1565**. On fait détoner dans un appareil résistant, de volume intérieur égal à 21 litres et plongé dans une enceinte à température constante et à 0°, un mélange d'oxygène, d'hydrogène et de méthane dont la pression est de $4^{kg},200$ avant l'explosion. On suppose que les gaz suivent rigoureusement les lois de Mariotte et de Gay-Lussac et qu'en fin d'explosion, il ne reste que de l'acide carbonique et de la vapeur d'eau.

Déterminer :

1° Les quantités des trois gaz entrant en réaction sachant qu'il y a 3 fois plus d'oxygène que d'hydrogène en volume dans le mélange ;

2° La pression finale à l'intérieur de l'appareil quand la température intérieure est redevenue 0°, en admettant qu'à cette température la tension de la vapeur de la glace est nulle, qu'elle n'a dissous aucun gaz et que sa densité est 0,900 à cette température.

On fait ensuite passer dans un tube à ponce sulfurique l'acide carbonique provenant de la réaction précédente et les gaz provenant de la décomposition par de l'acide sulfurique concentré de 252 grammes d'acide oxalique pur à deux molécules d'eau. Après passage dans ce tube, les gaz sont reçus dans un ballon de 27 litres de capacité intérieure à la température de 27° et maintenus à cette température. On ajoute dans ce ballon de la potasse caustique en quantité suffisante pour absorber tout ce qui est absorbable et on fait passer le résidu final sur du chlorure cuivreux ammoniacal.

Déterminer l'augmentation de poids des tubes à ponce et à chlorure cuivreux et la pression à 27° des gaz dans le ballon avant et après addition à cette température de la potasse caustique, le volume de cette potasse en morceaux ajoutés est de 300^{cm^3}. Elle est supposée ne pas varier de volume du fait de l'absorption.

On s'appuiera sur la propriété qu'une molécule de gaz occupe $22^l,32$ à 0° sous 760 m/m de pression.

C = 12, O = 16, H = 1, densité du mercure à 0° = 13,6.

Mathématiques.

Question préliminaire (utile pour la suite).

Etudier la forme de la courbe $u = x\mathrm{L}x$, x et u étant les coordonnées rectangulaires d'un point.

1566. — *Problème.* On considère la surface dont l'équation en coordonnées trirectangulaires est $z = x^{yz^x}$.

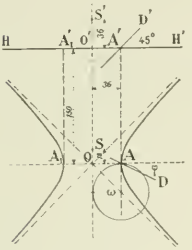
Etudier les sections planes de cette surface :

1° Par des plans parallèles au plan des xy ;

2° Par des plans parallèles au plan xz et situés du côté des y positifs.

Epure de Géométrie descriptive.

1567. — Un cylindre a pour directrice dans le plan horizontal HH′ une hyperbole équilatère dont l'axe transverse A_1A, A'_1, A' est de front et a 72^{mm} de longueur.



Ses génératrices sont parallèles à D, D′, D′ étant incliné à 45° sur les horizontales de front et D faisant avec ces mêmes droites un angle φ tel que $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}$.

Un cône a pour sommet un point S, S′ situé à 18^{mm} en arrière et à 36^{mm} au-dessus du centre O, O′ de l'hyperbole. Sa base est une ellipse du plan tangent au cylindre en A, A′ admettant pour projection horizontale un cercle passant par A et tangent aux axes de l'hyperbole.

Représenter à l'encre de Chine, en distinguant les parties vues et cachées, la partie du cône solide comprise entre les deux nappes du cylindre.

Reproduire à l'encre (traits continus de couleur) les constructions d'un point courant avec sa tangente et des points et tangentes remarquables pour l'hyperbole de la base et l'intersection.

Les parallèles A_1A, HH′ seront prises à un écartement de 150^{mm}. Le point O pourra être placé à 1 ou 2 centimètres à gauche et 6 à 9 au-dessous du centre de la feuille.

Ni cadre ni titre. L'emploi du pistolet pour le tracé des courbes est interdit.

Calcul trigonométrique.

Dans un triangle ABC on donne le côté a (opposé à l'angle A), $a = 382^m,275$; la somme des deux autres côtés, $b + c = 411^m,119$; la somme des angles B et C, $B + C = 138° 32' 9''$ ou 153 grades 9287.

On demande de calculer :

1° Les angles B et C, exprimés en degrés, minutes et secondes ou en grades ; 2° les côtés b et c ; 3° l'aire du cercle inscrit ; 4° l'aire du cercle exinscrit tangent au plus grand b des côtés b, c et aux prolongements des côtés c et a.

On poussera les calculs jusqu'à l'approximation que permettent les tables à sept décimales.

QUESTIONS PROPOSÉES

1568. — Les pieds des normales à une parabole $y^2 - 2px = 0$, abaissées d'un point M du plan ont pour ordonnées y_1, y_2, y_3. Montrer que la somme des six rapports de ces ordonnées est indépendante de la position du point M et du paramètre de la parabole.

E.-N. Barisien.

1569. — 1° Trouver les nombres p et q pour lesquels il existe une primitive $F(x)$ de la fonction

$$(x^2 + px + q)e^{-x},$$

qui soit nulle pour $x = +\infty$ et qui admette le nombre 1 pour racine double.

2° Etudier les variations de $F(x)$, et aussi la série dont le terme général est $u_n = F(n)$.

3° Etudier pour toutes les valeurs réelles de x la série dont le terme général est

$$u_n = \frac{n^{2x}}{x^n + 1.n}.$$

E. H.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

17e Année. N° 5. Février 1907.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

POINTS D'INFLEXION DANS LE DÉVELOPPEMENT DES CONES ET DES CYLINDRES

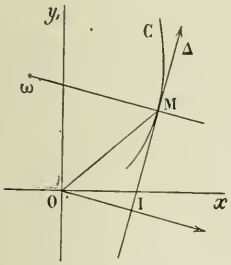
par M. **Ch. Michel**, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Dijon.

Je me propose d'exposer une nouvelle méthode, simple et rigoureuse, pour la détermination des points d'inflexion de la transformée par développement d'une courbe tracée sur une surface conique ou cylindrique. Le point de départ est une formule bien connue de géométrie infinitésimale dont je vais tout d'abord donner une démonstration qui ne me paraît pas avoir encore été signalée.

1. Soit dans un plan orienté une courbe C rapportée à deux axes de coordonnées directement rectangulaires, Ox et Oy, et définie comme l'enveloppe d'une droite variable Δ ayant pour équation

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

où p est une fonction donnée de α. Désignons par M le point de contact de la droite Δ avec la courbe C et par I le pied de la perpendiculaire menée de O à la droite Δ; p est la mesure algébrique du segment OI sur l'axe d'angle polaire α. Sur la droite Δ, il existe un axe d'angle polaire $\alpha + \frac{\pi}{2}$; prenons alors pour sens des arcs croissants sur la courbe C le sens de l'axe d'angle polaire $\alpha + \frac{\pi}{2}$ porté par la tangente. En désignant par s la mesure algébrique de l'arc décrit par le point M sur la courbe C et par x et y les coordonnées du point M, on a



$$\frac{dx}{ds} = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha.$$

Or, les coordonnées x et y de M satisfont à l'équation qu'on obtient en dérivant l'équation de la droite Δ par rapport au paramètre α :

$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha = \frac{dp}{d\alpha}.$$

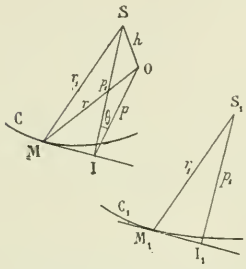
Donc, $x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} = \frac{dp}{d\alpha}$, c'est-à-dire, $xdx + ydy = dp.\frac{ds}{d\alpha}$.

Si r est la mesure algébrique du segment OM sur un axe choisi sur la droite OM, on a $x^2 + y^2 = r^2$ et par suite $xdx + ydy = rdr$. D'autre part, ω étant le centre de courbure de C en M, la mesure algébrique ρ du rayon de courbure ωM comptée sur l'axe d'angle polaire α est égale à $-\frac{ds}{d\alpha}$. On a finalement la formule fondamentale

$$-\rho dp = rdr.$$

2. Soient d'abord une courbe *plane* C tracée sur un cône de sommet S et sa transformée C_1 par développement du cône sur un plan. S_1 étant dans le plan le transformé de S, M_1 étant sur C_1 le transformé du point M de la courbe C, abaissons de S la perpendiculaire SI sur la tangente en M à

C et de S_1 la perpendiculaire S_1I_1 sur la tangente en M_1 à C_1. De la définition du développement, il résulte que les longueurs SM et S_1M_1 sont égales et que les angles IMS et $I_1M_1S_1$ sont égaux. Il s'en suit que les triangles SMI et $S_1M_1I_1$ sont égaux et que les longueurs SI et S_1I_1 sont égales. Posons dès lors $SM = S_1M_1 = r_1$, $SI = S_1I_1 = p_1$. Projetons d'autre part S en O sur le plan de la courbe C ; OI est perpendiculaire à la tangente en M à la courbe C. Posons $OM = r$ et $OI = p$. Désignons enfin par ρ la mesure algébrique du rayon de courbure en M à la courbe C, comptée sur l'axe qui va positivement de O vers I et par ρ_1 la mesure algébrique du rayon de courbure en M_1 à la courbe C_1, comptée sur l'axe qui va positivement de S_1 vers I_1.



Cela posé, on a, en vertu de la formule fondamentale,

$$-\rho dp = rdr, \qquad -\rho_1 dp_1 = r_1 dr_1.$$

Mais, h désignant la distance du point S au plan de la courbe C, on a

$$r_1^2 = r^2 + h^2, \qquad p_1^2 = p^2 + h^2.$$

Par suite, $rdr = r_1 dr_1$ et $pdp = p_1 dp_1$. On en déduit immédiatement

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{p_1}{p}.$$

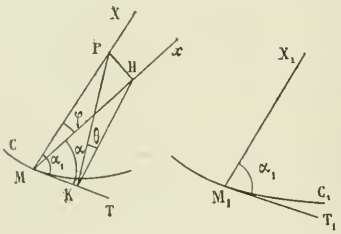
Désignons alors par θ l'angle aigu que fait le plan tangent en M au cône avec le plan de la courbe C. Dans le triangle SIO, on a

$$\frac{p_1}{p} = \frac{1}{\cos\theta}.$$

Finalement, on a la formule

$$\rho_1 = \frac{\rho}{\cos\theta}.$$

3. Soit en second lieu une courbe *plane* C tracée sur un cylindre. Je dis que la formule précédente est encore vraie. Pour le voir, il suffirait de raisonner par continuité. Pourtant une démonstration directe est préférable.



Désignons encore par C_1 la transformée de C par développement du cylindre sur un plan et par M_1 le transformé sur C_1 du point M de la courbe C. Choisissons sur la courbe C un sens des arcs s croissants et désignons par MT la demi-droite portée par la tangente en M à la courbe C et dirigée dans le sens des s croissants. Choisissons sur la courbe C_1 comme sens des arcs s_1 croissants le sens dans lequel se déplace le point M_1 quand le point M se déplace sur la courbe C dans le sens des s croissants et désignons par M_1T_1 la demi-droite portée par la tangente en M_1 à la courbe C_1 et dirigée dans le sens des s_1 croissants. D'autre part, prenons sur la génératrice du cylindre qui passe par M une demi-droite MX de sens déterminé, laquelle se projette sur le plan de la courbe C suivant une demi-droite Mx de direction invariable et prenons en même temps dans le plan de la courbe C_1 la demi-droite M_1X_1, transformée par développement de la demi-droite MX. De la définition du développement, il résulte que l'on a $ds = ds_1$ et que l'on a $\widehat{XMT} = \widehat{X_1M_1T_1}$. Posons

$$\widehat{XMT} = \widehat{X_1M_1T_1} = \alpha_1 \qquad \text{et} \qquad \widehat{xMT} = \alpha.$$

Si ρ est la mesure algébrique du rayon de courbure en M à la courbe C, comptée positivement si la courbe est convexe en M vers Mx, négativement si la courbe est concave en M vers Mx, on a

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha}.$$

De même, si ρ_1 est la mesure algébrique du rayon de courbure en M_1 à la courbe C_1, comptée positivement si la courbe est convexe en M_1 vers M_1X_1, négativement si la courbe est concave en M_1 vers M_1X_1, on a

$$\rho_1 = \frac{ds_1}{d\alpha_1}.$$

On en déduit la relation $\rho d\alpha = \rho_1 d\alpha_1$.

Cela posé, soit P le point de MX tel que $MP = +1$; projetons-le en H sur Mx et en K sur la tangente en M à la courbe C. On a $MK = MH \cos\alpha$ et par suite, si φ désigne l'angle xMX, on a

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha \cos\varphi,$$

d'où l'on déduit, en différentiant, $\sin\alpha_1 d\alpha_1 = \sin\alpha \cos\varphi d\alpha$.

Par suite, on a

$$\frac{\rho}{\sin\alpha \cos\varphi} = \frac{\rho_1}{\sin\alpha_1}.$$

Mais, en désignant par θ l'angle HKP du plan tangent en M au cylindre avec le plan de la courbe C, on a, dans les deux triangles rectangles KHM et PHK,

$$KH = \cos\varphi \sin\alpha = \sin\alpha_1 \cos\theta.$$

Finalement, il vient encore

$$\rho_1 = \frac{\rho}{\cos\theta}.$$

4. La formule précédente s'étend aux courbes *gauches* C tracées sur un cône ou sur un cylindre. Il suffit en effet de remarquer qu'une courbe quelconque C tracée sur un cône ou sur un cylindre a même rayon de courbure en un point M quelconque que la section C' du cône ou du cylindre par le plan osculateur en M à la courbe et de remarquer, en outre, que deux courbes tracées sur un cône ou sur un cylindre ayant trois points d'intersection confondus en un point M ont pour transformées par développement deux courbes ayant trois points d'intersection confondus au point M_1, transformé de M. Donc, en définitive, si ρ est le rayon de courbure de la courbe C en M, si θ est l'angle du plan osculateur à la courbe avec le plan tangent à la surface, enfin si ρ_1 est le rayon de courbure de la transformée C_1 par développement en M_1, transformé de M, on a la relation

$$\rho_1 = \frac{\rho}{\cos\theta}.$$

Le théorème que j'obtiens ainsi, en toute rigueur, par des considérations si élémentaires est le cas particulier d'un théorème général concernant un élément qu'on appelle la *courbure géodésique* d'une courbe tracée sur une surface. Si θ est l'angle du plan osculateur à la courbe en un point M avec le plan tangent en M à la surface, on appelle *courbure géodésique* en M la quantité $\frac{\cos\theta}{\rho}$. Le théorème général que j'ai en vue est le suivant : *Dans une déformation quelconque d'une surface, la courbure géodésique d'une courbe tracée sur la surface reste la même, pour un point déterminé de la courbe.* Nous venons d'établir ce théorème dans le cas où la surface est un cône ou un cylindre.

5. La détermination des points d'inflexion de la transformée C_1 par développement d'une courbe C tracée sur un cône ou sur un cylindre résulte de la relation que nous venons de démontrer. Dire qu'un point M_1 de C_1 est d'inflexion, c'est dire qu'en ce point ρ_1 est infini. D'après la relation considérée, dire que ρ_1 est infini, c'est dire que, ou bien ρ est infini et alors le point M de la courbe C est un point d'inflexion, ou bien $\cos\theta$ est nul et alors le plan osculateur en M est perpendiculaire au plan tangent en M à la surface. Donc, on a le théorème suivant :

Les points d'inflexion de la transformée par développement d'une courbe tracée sur un cône ou sur un cylindre sont les transformés des points d'inflexion de la courbe et des points de cette courbe où le plan osculateur est perpendiculaire au plan tangent au cône ou au cylindre.

CERTIFICAT D'ÉTUDES SUPÉRIEURES (*Lyon, novembre 1905.*)

Mathématiques préparatoires à la physique et aux sciences industrielles.

1491. — *Soit* (C) *la courbe représentée, en coordonnées rectangulaires, par l'équation* $y = f(x)$. *Soit* M *un point quelconque de* (C), N *le point où la normale menée à* (C) *au point* M *rencontre l'axe* Ox *et soit* P *le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine* O *sur la normale* MN.

1° *Former l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire la fonction* $y = f(x)$ *pour que l'on ait constamment* OP = MN, *lorsque* M *décrit la courbe* (C).

2° *Intégrer cette équation différentielle.*

La normale au point $M(x, y)$ a pour équation

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x), \qquad \text{ou} \qquad X - x + y'(Y - y) = 0;$$

elle rencontre Ox au point N qui a pour abscisse $x + yy'$. On a donc

$$MN = \pm y\sqrt{1 + y'^2}.$$

D'autre part, la distance OP de l'origine à cette normale est

$$OP = \frac{x + yy'}{\pm\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Il en résulte que l'équation différentielle de la courbe considérée est

$$y\sqrt{y'^2 + 1} = \pm\frac{x + yy'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \qquad \text{ou} \qquad y(y'^2 + 1) = \pm(x + yy').$$

Prenons d'abord le signe $+$; l'équation peut s'écrire

$$y = \frac{x}{y'^2 - y' + 1},$$

ou, en posant $y' = p$,

$$y = \frac{x}{p^2 - p + 1}.$$

Différentions par rapport à x; nous avons

$$p = \frac{(p^2 - p + 1) - x(2p - 1)\dfrac{dp}{dx}}{(p^2 - p + 1)^2},$$

ou

$$(p^2 - p + 1)[p(p^2 - p + 1) - 1] = -x(2p - 1)\frac{dp}{dx},$$

ou enfin

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dp} = \frac{-(2p - 1)}{(p^2 - p + 1)(p^2 + 1)(p - 1)}.$$

Décomposons le second membre en éléments simples, nous obtenons

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dp} = -\frac{1}{2(p - 1)} - \frac{3p + 1}{2(p^2 + 1)} + \frac{(2p - 1)}{p^2 - p + 1},$$

ou

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dp}{2(p - 1)} - \frac{(3p + 1)dp}{2(p^2 + 1)} + \frac{(2p - 1)dp}{p^2 - p + 1}.$$

Il est alors facile d'intégrer, ce qui nous donne

$$L\frac{x}{a} = -\frac{1}{2}L(p - 1) - \frac{3}{4}L(p^2 + 1) - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} p + L(p^2 - p + 1),$$

ou

$$\frac{x}{a} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} p}(p^2 - p + 1)}{(p-1)^{\frac{1}{2}}(p^2+1)^{\frac{3}{4}}},$$

ou enfin

$$(1) \qquad x = \frac{a(p^2 - p + 1)e^{-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} p}}{\sqrt[4]{(p-1)^2(p^2+1)^3}};$$

et comme on a $y = \dfrac{x}{p^2 - p + 1}$, la valeur de y est

$$(2) \qquad y = \frac{ae^{-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} p}}{\sqrt[4]{(p-1)^2(p^2+1)^3}}.$$

La courbe est définie par les équations (1) et (2) qui donnent x et y en fonction du paramètre p.

Si l'on prend le signe $-$, et qu'on refasse les mêmes calculs on obtient les équations (1) et (2) où p est changé en $-p$. Comme ce paramètre peut recevoir toutes les valeurs, on peut dire que les équations (1) et (2) sont les équations paramétriques de toutes les courbes qui satisfont à la condition $OP = MN$.

En posant $p = \operatorname{tg} u$, les équations peuvent s'écrire

$$x = \frac{a(1 - \sin u \cos u)}{\sqrt{e^u(\sin u - \cos u)}}, \qquad y = \frac{a\cos^2 u}{\sqrt{e^u(\sin u - \cos u)}}.$$

W. MÉRIGOT, à Paris.

Bonnes solutions par MM. H. Janois, à Nantes; M. Laurence.

ALGÈBRE ET ANALYSE

1488. — 1° *Calculer à* $\frac{1}{10^4}$ *près la racine positive de l'équation* $x^3 - x^2 - 7x - 1 = 0$ *et à* $\frac{1}{10}$ *près les racines négatives.*

2° *Montrer que les intégrales de l'équation différentielle*

$$y(3x+1) - y'(x^2-1) + (x^2+1)[x^3 - x^2 - 7x - 1] = 0$$

qui contiennent un paramètre arbitraire λ *sont des polynomes de la forme* $f + \lambda\varphi$.

3° *Discuter, quand* λ *varie, le nombre de racines réelles de l'équation* $f + \lambda\varphi = 0$.

4° *Dans quels cas particuliers l'équation différentielle* $yA'(x) + y'B(x) + C(x) = 0$ *n'admet-elle pour intégrales que des polynomes ? D'une manière plus précise, on démontrera que si l'équation différentielle est de la forme* $yA'(x) - y'A(x) + C(x) = 0$, A *et* C *désignant deux polynomes,* A *ayant toutes ses racines distinctes, la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les intégrales soient des polynomes est que le polynome* $A'C' - A''C$ *soit divisible par le polynome* A.

1° Posons $$g(x) = x^3 - x^2 - 7x - 1.$$

Il y a une racine positive d'après le théorème de Descartes.

Elle est comprise entre 3 et 4 puisque

$$g(3) = -4, \qquad g(4) = 19.$$

Il y a deux racines négatives. On le voit rapidement en remarquant que

$$g(0) = -1, \qquad g(-1) = 4, \qquad g(-2) = 1, \qquad g(-3) = -16.$$

Calcul des racines négatives. — Quelques substitutions suffiront. La plus petite racine en valeur absolue est plus voisine de 0 que de -1, surtout si l'on a égard à ce que $g''(x)$ est négatif de 0 à -1. On trouve

$$g(-0,1) = -0,311, \qquad g(-0,2) = 0,352.$$

La plus grande racine en valeur absolue est plus voisine de -2 que de -3. On trouve

$$g(-2,1) = 0,029, \qquad g(-2,2) = -1,088.$$

Calcul de la Racine positive. — Resserrons d'abord l'intervalle (3,4)

$$g(3,2) = -0,872, \qquad g(3,3) = 0,947.$$

Substituons maintenant 3,25 $\qquad g(3,25) = 0,015625.$

Comme on a $\qquad g(3,24) = -0,165376,$

la racine est donc obtenue sans effort avec deux chiffres décimaux exacts.

Nous allons appliquer la méthode de Newton à l'intervalle (3,24, 3,25).

$g''(x)$ étant positif dans l'intervalle considéré, c'est la limite 3,25 qu'il convient de choisir.

$$g'(x) = 3x^2 - 2x - 7,$$
$$g'(3,25) = 18,1875.$$

La nouvelle valeur approchée sera donc

$$3,25 - \frac{156,25}{181875} = 3,25 - 0,0008591\ldots\ldots$$

C'est une valeur par excès.

Une limite supérieure de l'erreur commise est

$$\frac{1}{2.10^4}\frac{g''(3,25)}{18,1875} = \frac{17,5}{2.10^4.18,1875}.$$

On voit facilement et sans calcul que cette limite ne permet pas de trouver les quatre premiers chiffres décimaux de la racine.

Appliquons donc à l'intervalle (3,24, 3,25) la méthode des parties proportionnelles. On obtient pour la racine la valeur approchée

$$3,24 + \frac{0,165376 \times 0,01}{0,181001} = 3,24 + 0,00913\ldots\ldots$$

C'est une valeur par défaut.

La racine cherchée est donc comprise entre

$$3,24913 \qquad \text{et} \qquad 3,24915.$$

2° L'équation différentielle à intégrer est linéaire et du premier ordre. On pourrait lui appliquer la méthode générale. Les calculs sont un peu longs.

Nous préférons remarquer que si l'on trouve un polynome $f + \lambda\varphi$, λ étant arbitraire, satisfaisant à cette équation différentielle, la fonction $f + \lambda\varphi$ comprendra toutes les intégrales d'après la théorie de l'équation différentielle linéaire du premier ordre.

D'autre part, il est naturel d'après les degrés des polynomes qui entrent dans l'équation différentielle de chercher une intégrale qui soit un polynome du quatrième degré.

Écrivons donc que le polynome

$$y = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + F$$

satisfait à l'équation différentielle. Nous aurons l'identité

$$(3x+1)(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + F) - (x^2 - 1)(4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D) + (x^2+1)(x^3 - x^2 - 7x - 1) \equiv 0,$$

d'où $\quad A = 1, \qquad B + C = 2, \qquad 3B + C + 2D = 2, \qquad 2C + D + 3F = 7, \qquad D + F = 1\,;$

cinq équations en A, B, C, D, F, mais les quatre dernières se réduisent à trois comme on le voit en

ajoutant membre à membre la seconde et la cinquième, puis la troisième et la quatrième ; laissons B arbitraire ; posons $B = \lambda$, nous aurons $C = 2 - \lambda$, $D = -\lambda$, $F = 1 + \lambda$, et par suite

$$y = x^4 + \lambda x^3 + (2 - \lambda)x^2 - \lambda x + 1 + \lambda,$$
$$y = (x^2 + 1)^2 + \lambda(x^3 - x^2 - x + 1) = (x^2 + 1)^2 + \lambda(x - 1)^2(x + 1).$$

3° Pour discuter, quand λ varie, le nombre de racines réelles de l'équation

$$(x^2 + 1)^2 + \lambda(x - 1)^2(x + 1) = 0,$$

construisons la courbe

$$z = \frac{(x^2 + 1)^2}{(x - 1)^2(x + 1)}.$$

Nous aurons à chercher son intersection avec la droite $z + \lambda = 0$.

Cherchons les variations de la fonction z considérée ; elle a pour dérivée

$$z' = \frac{(x^2 + 1)(x^3 - x^2 - 7x - 1)}{(x - 1)^3(x + 1)^2}.$$

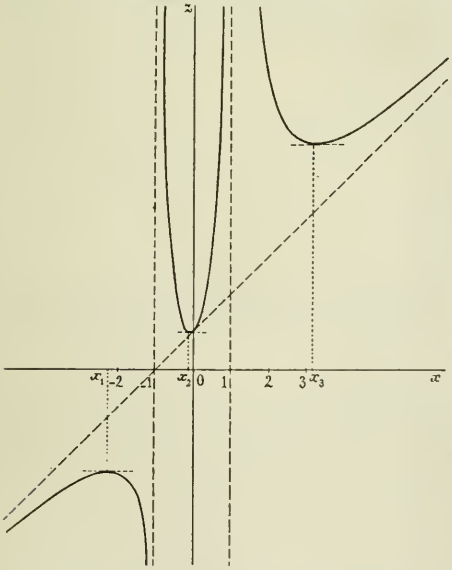
On pouvait prévoir que le polynome $(x^3 - x^2 - 7x - 1)(x^2 + 1)$ serait en facteur dans la dérivée de z, car le premier membre de l'équation différentielle considérée au paragraphe précédent montre que le polynome

$$(x^2 + 1)^2 + \lambda(x - 1)^2(x + 1)$$

ne peut avoir d'autre racine double que les racines du polynome

$$(x^3 - x^2 - 7x - 1)(x^2 + 1).$$

La courbe représentant les variations de la fonction $z(x)$ peut donc être tracée. Appelons x_1, x_2, x_3 les racines, rangées par ordre de grandeur croissante, de l'équation $x^3 - x^2 - 7x - 1 = 0$. Appelons z_1, z_2, z_3 les valeurs correspondantes de z.



z_1 est voisin de $z(-2) = -\frac{25}{9}$,

z_2 est voisin de $z(0) = 1$,

z_3 est voisin de $z(3) = \frac{25}{4}$.

La discussion du nombre de racines réelles de l'équation proposée est immédiate sur la figure :

Si $-\lambda > z_3$ 4 racines réelles et distinctes, 3 positives, une négative ;

$-\lambda = z_3$, 2 racines distinctes de signes contraires, x_3 racine double ;

$z_3 > -\lambda > z_2$, 2 racines réelles de signes contraires ;

$-\lambda = z_2$, une racine double x_2 ;

$z_2 > -\lambda > z_1$, aucune racine réelle ;

$-\lambda = z_1$, une racine double x_1 ;

$-\lambda < z_1$. 2 racines réelles et distinctes, négatives.

Il était inutile, pour la discussion précédente, d'étudier le point à l'infini de la courbe précédente obtenu pour x et z infinis. Mais il est intéressant de faire la remarque que l'identité

$$z = x + 1 + \frac{4x^2}{(x - 1)^2(x + 1)},$$

obtenue par la division du numérateur par le dénominateur, donne l'asymptote $z = x + 1$, montre qu'elle est tangente à la courbe au point situé sur Oz, et donne la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

4° Considérons le polynome $y = f + \lambda\varphi$, f et φ étant deux polynomes à coefficients constants, λ étant un paramètre variable. Ce polynome donne toutes les intégrales de l'équation différentielle

$$\frac{y-f}{y'-f'} = \frac{\varphi}{\varphi'} \qquad \text{ou} \qquad y\varphi' - y'\varphi - (f\varphi' - f'\varphi) = 0.$$

Nous ne chercherons donc les conditions pour que l'équation différentielle

$$(1) \qquad yA(x) + y'B(x) + C(x) = 0$$

n'admette pour intégrales que des polynomes qu'en supposant, condition nécessaire, que A, B, C soient des polynomes.

Remarquons encore, d'après la théorie de l'équation différentielle linéaire du premier ordre, que si l'équation (1) a pour intégrales les fonctions $f + \lambda\varphi$, $\lambda\varphi$ représente toutes les intégrales de l'équation sans second membre

$$(2) \qquad yA(x) + y'B(x) = 0.$$

Une autre condition nécessaire est donc que l'équation (2) n'admette pour intégrales que des polynomes. Il suffit pour cela qu'elle en admette un, soit φ. On aura donc

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{-A(x)}{B(x)}.$$

Il faut donc : ou bien que le polynome $A(x)$ soit la dérivée changée de signe du polynome $B(x)$ ou bien que cette condition soit remplie après multiplication ou division des deux polynomes A et B par un même troisième.

En tous cas, nous avons montré que l'équation différentielle (1) doit être de la forme suivante, ou s'y ramener

$$yA'(x) - y'A(x) + C(x) = 0,$$

A et C étant deux polynomes.

Posons $y = uA(x)$, u étant la nouvelle fonction à déterminer.

L'équation différentielle en u sera

$$uA(x)A'(x) - [uA'(x) + u'A(x)]A(x) + C(x) = 0, \qquad \text{ou} \qquad u'[A(x)]^2 - C(x) = 0,$$

ou enfin

$$u = \int \frac{C(x)dx}{[A(x)]^2} + \lambda.$$

Donc,

$$y = A(x)\int \frac{C(x)dx}{[A(x)]^2} + \lambda A(x).$$

Nous arrivons donc à la condition suivante qui jointe aux précédentes donne les conditions nécessaires et suffisantes : que la fonction $\int \frac{C(x)dx}{[A(x)]^2}$ soit une fraction rationnelle dont le dénominateur soit un diviseur de A.

Cette dernière condition est facile à expliciter quand le polynome A n'a que des racines simples. Elle prend alors la forme suivante : il faut que dans la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\int \frac{C(x)dx}{[A(x)]^2}$, les éléments simples contenant les facteurs primaires au premier degré disparaissent. Et cette condition est suffisante si l'équation différentielle est de la forme

$$yA'(x) - y'A(x) + C(x) = 0,$$

A n'ayant que des racines simples.

Posons

$$A \equiv (x-a)(x-b)\ldots(x-l).$$

On a

$$\frac{C(x)}{[A(x)]^2} = P(x) + \frac{\alpha_1}{(x-a)^2} + \frac{\alpha_2}{(x-a)} + \cdots,$$

$P(x)$ étant un polynome, α_1 et α_2 des constantes.

Cette identité peut s'écrire, en posant

$$A_1(x) = (x-b)\dots(x-l),$$
$$\frac{C(x)}{[A_1(x)]^2} = P(x)(x-a)^2 + \alpha_1 + \alpha_2(x-a) + \cdots.$$

Donc α_2 est la valeur prise par la dérivée du premier membre pour $x = a$. Il en résulte que α_2 est nul si l'on a

$$A_1(a)C'(a) - 2C(a)A'_1(a) = 0.$$

Or
$$A(x) = (x-a)A_1(x),$$
$$A'(x) = A_1(x) + (x-a)A'_1(x),$$
$$A''(x) = 2A'_1(x) + (x-a)A''_1(x).$$

Donc
$$A_1(a) = A'(a), \qquad 2A'_1(a) = A''(a)$$

et la condition pour que α_2 soit nul s'écrit encore

$$A'(a)C'(a) - A''(a)C(a) = 0.$$

Tous les nombres tels que α_2 correspondant à toutes les racines $a, b, \dots, l$ sont donc nuls si le polynome $A'C' - A''C$ est divisible par le polynome A.

Pour terminer, faisons la remarque suivante. Montrons qu'une condition nécessaire pour que l'équation différentielle

$$yA'(x) - y'A(x) + C(x) = 0 \quad (A \text{ et } C \text{ polynomes})$$

n'admette pour intégrales que des polynomes est que le polynome $A'C' - A''C$ soit divisible par A, que A n'ait ou non que des racines simples.

Exprimons en effet que le polynome y est intégrale. On a

$$C(x) = y'A(x) - yA'(x)$$

et, en différentiant,
$$C'(x) = y''A(x) - yA''(x)$$

et, par suite,
$$A'(x)C'(x) - A''(x)C(x) = A(x)[y''A'(x) - y'A''(x)].$$

MÉCANIQUE

1492. — *Soit dans un plan vertical la parabole*

$$\begin{cases} x = p\,\mathrm{sh}\,\varphi, \\ y = \dfrac{p}{2}\,\mathrm{sh}^2\,\varphi; \end{cases} \qquad p > 0,$$

l'axe des y étant vertical et dirigé vers le bas. On suppose qu'un point matériel uniquement soumis à son poids soit astreint à se mouvoir sans frottement sur cette parabole.

1° *Montrer que dans deux cas particuliers on peut exprimer t en fonction de φ à l'aide des fonctions introduites dans le cours.*

2° *Montrer que la réaction normale de la parabole sur le point matériel est, en chaque point, inversement proportionnelle au rayon de courbure.*

Interpréter le cas où la réaction est constamment nulle.

3° *Application numérique. — On suppose que le point matériel soit lancé en un point d'ordonnée $10p$ vers le sommet, la vitesse initiale étant telle que la vitesse s'annulerait au sommet. Calculer à $\frac{1}{100}$ près*

$\sqrt{\frac{g}{p}}t$, *t étant le temps mis par le point matériel pour passer du point d'ordonnée* $10p$ *au point d'ordonnée* $\frac{p}{2}$.

Nous prendrons comme sens positif, sur la parabole, celui des φ croissants.

On a
$$dx = p\,\mathrm{ch}\,\varphi d\varphi, \qquad dy = p\,\mathrm{sh}\,\varphi\,\mathrm{ch}\,\varphi d\varphi,$$
d'où
$$ds = +\sqrt{p^2\,\mathrm{ch}^2\,\varphi(1+\mathrm{sh}^2\,\varphi)}\,d\varphi = p\,\mathrm{ch}^2\varphi d\varphi.$$

Les cosinus directeurs de la demi-tangente positive sont donc
$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,\varphi}, \qquad \frac{dy}{ds} = \mathrm{tgh}\,\varphi.$$

Par suite, les cosinus directeurs de la demi-normale dirigée vers le centre de courbure sont
$$-\mathrm{tgh}\,\varphi, \qquad \frac{1}{\mathrm{ch}\,\varphi}.$$

Enfin, calculons le rayon de courbure ρ au point de paramètre φ. Nous prendrons la valeur absolue de $\frac{ds}{d\alpha}$, α étant l'un des angles de Ox avec la tangente.

α est donc donné par l'égalité
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{dy}{dx} = \mathrm{sh}\,\varphi.$$

On en tire
$$(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha)d\alpha = \mathrm{ch}\,\varphi d\varphi \qquad \text{ou} \qquad (1+\mathrm{sh}^2\,\varphi)d\alpha = \mathrm{ch}\,\varphi d\varphi$$
ou
$$d\alpha = \frac{d\varphi}{\mathrm{ch}\,\varphi}.$$

Par suite,
$$\frac{ds}{d\alpha} = p\,\mathrm{ch}^3\,\varphi,$$
expression qui est toujours positive.

1. Les deux équations intrinsèques du mouvement d'un point matériel de masse m uniquement soumis à son poids de composantes 0, mg, astreint à se mouvoir sans frottement sur la parabole donnée sont, en appelant F la réaction normale de la parabole sur le point matériel (comptée positivement vers le centre de courbure),
$$m\frac{dv}{dt} = mg\,\mathrm{tgh}\,\varphi, \qquad m\frac{v^2}{\rho} = \frac{mg}{\mathrm{ch}\,\varphi} + \mathrm{F}.$$

La seconde donnera la réaction.

La première est une équation différentielle du second ordre qui, intégrée, donnera la relation entre φ et t. Elle s'intègre une première fois en multipliant les deux membres par
$$v = \frac{ds}{dt} = p\,\mathrm{ch}^2\,\varphi\,\frac{d\varphi}{dt}.$$

L'intégrale première ainsi obtenue est l'intégrale des forces vives, qui ne contient pas la réaction normale dont le travail est nul, et qu'on peut écrire immédiatement
$$\frac{mv^2}{2} = mgy + \frac{mh}{2},$$
ou
$$(1) \qquad v^2 = 2gy + h,$$
ce qui montre que la constante h est, en fonction des conditions initiales, $h = v_0^2 - 2gy_0$.

L'égalité (1) est une équation différentielle du premier ordre qui s'écrit
$$p^2\,\mathrm{ch}^4\,\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = gp\,\mathrm{sh}^2\,\varphi + h.$$

Elle est à variables séparées et s'écrit encore

$$(2) \qquad p\frac{\operatorname{ch}^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{gp\operatorname{sh}^2\varphi + h}} = dt.$$

Le signe à prendre devant le radical est ainsi déterminé par le sens de la vitesse initiale, et, si elle était nulle, grâce à cette remarque que le point matériel descendra sous l'action de son poids. Il faut toutefois supposer que la position initiale (la vitesse initiale étant nulle) n'est pas le sommet, qui est une position d'équilibre. Le signe ainsi déterminé ne pourra se modifier qu'aux changements de sens du déplacement du point matériel sur la trajectoire. Ces changements de sens ne pourront se produire (les conditions initiales étant bien déterminées) qu'en un seul point donné par

$$gp\operatorname{sh}^2\varphi + h = 0, \qquad \text{ce qui exige} \qquad h < 0.$$

Le signe de $\operatorname{sh}\varphi$ sera déterminé par le signe de φ_0.

Ces quelques remarques mèneraient facilement à la discussion du mouvement quand les conditions initiales varient.

Faisons la remarque que l'intégration de l'équation (2) se ramène au calcul de la primitive

$$\int \frac{\operatorname{ch}^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{gp\operatorname{sh}^2\varphi + h}}.$$

Posons $\operatorname{sh}\varphi = \lambda$ il vient

$$\int \frac{\sqrt{\lambda^2+1}\, d\lambda}{\sqrt{gp\lambda^2 + h}} = \int \frac{(\lambda^2+1)d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2+1)(gp\lambda^2+h)}} = \int \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2+1)(gp\lambda^2+h)}} + \int \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2+1)(gp\lambda^2+h)}}.$$

Nous nous trouvons ramenés à des intégrales appelées elliptiques qui introduisent des fonctions ne se ramenant pas à celles étudiées dans les cours de mathématiques spéciales.

Nous nous bornerons à constater que dans deux cas particuliers l'équation différentielle (2) se simplifie :

1° Si $h = 0$; 2° si $h = gp$.

1° $h = 0$. On a

$$dt = \pm\sqrt{\frac{p}{g}}\,\frac{\operatorname{ch}^2\varphi}{\operatorname{sh}\varphi}\,d\varphi \qquad \text{ou} \qquad \pm\sqrt{\frac{g}{p}}\,dt = \left(\operatorname{sh}\varphi + \frac{1}{\operatorname{sh}\varphi}\right)d\varphi,$$

ou enfin

$$\pm\sqrt{\frac{g}{p}}\,t = \operatorname{ch}\varphi + \operatorname{L}\operatorname{tg}\operatorname{h}\frac{\varphi}{2} - \left(\operatorname{ch}\varphi_0 + \operatorname{L}\operatorname{tg}\operatorname{h}\frac{\varphi_0}{2}\right).$$

φ_0 donne la position initiale du point matériel. Nous avons supposé φ_0 positif, ce qu'on a toujours le droit de faire.

Le signe $+$ correspond au cas où φ_0' est positif. Le point matériel descend alors indéfiniment.

Le signe $-$ correspond au cas où φ_0' est négatif. Le point matériel remonte vers le sommet et l'on a

$$\sqrt{\frac{g}{p}}\,t = \operatorname{ch}\varphi_0 - \operatorname{ch}\varphi + \operatorname{L}\operatorname{tg}\operatorname{h}\frac{\varphi_0}{2} - \operatorname{L}\operatorname{tg}\operatorname{h}\frac{\varphi}{2}.$$

φ diminue et tend vers zéro quand t croît indéfiniment. Le point matériel tend donc vers le sommet de la parabole sans jamais y parvenir.

2° $h = gp$, on a

$$dt = \pm\sqrt{\frac{p}{g}}\operatorname{ch}\varphi\, d\varphi.$$

On peut encore supposer φ_0 positif ; il y a encore deux cas à examiner, ceux où le radical doit être pris avec le signe $+$ ou le signe $-$, et l'on a

$$t = \pm\sqrt{\frac{p}{g}}\,(\operatorname{sh}\varphi - \operatorname{sh}\varphi_0).$$

Le point matériel s'éloigne indéfiniment sur la parabole en décrivant l'une ou l'autre des deux portions limitées à la position initiale.

2. Pour calculer la réaction, reprenons l'équation

$$F = \frac{mv^2}{\varphi} - \frac{mg}{\operatorname{ch}\varphi}.$$

On a

$$v^2 = 2gy + h = gp\operatorname{sh}^2\varphi + h.$$

Donc

$$F = \frac{m(gp\operatorname{sh}^2\varphi + h)}{p\operatorname{ch}^3\varphi} - \frac{mg}{\operatorname{ch}\varphi} = \frac{mgp\operatorname{sh}^2\varphi + mh - mgp\operatorname{ch}^2\varphi}{p\operatorname{ch}^3\varphi}$$

ou

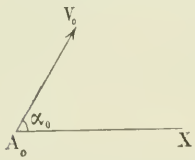
$$F = \frac{m(h - gp)}{p\operatorname{ch}^3\varphi}.$$

La réaction normale de la parabole sur le point matériel conserve toujours le même sens, dirigée vers la normale intérieure si $h > gp$, vers la normale extérieure si $h < gp$.

Elle est inversement proportionnelle au rayon de courbure. Enfin, elle est constamment nulle lorsque $h = gp$.

C'est un cas particulier qui a été rencontré dans la première partie. Il signifie que les conditions initiales sont telles que la parabole est la trajectoire du point matériel *supposé libre* et soumis uniquement à son poids.

Il était facile de prévoir qu'on rencontrerait ce cas particulier. La parabole donnée est à axe vertical; elle est concave par rapport à une verticale descendante, conditions nécessaires. Rappelons que si un point matériel libre uniquement pesant est lancé en A_0 avec une vitesse V_0 faisant l'angle α_0 avec l'horizontale, le paramètre de sa trajectoire est $\frac{V_0^2\cos^2\alpha_0}{g}$.



Or, c'est un problème de géométrie très élémentaire que de montrer qu'il existe dans un plan donné une parabole et une seule d'axe vertical, concave vers la verticale descendante, de paramètre donné et tangente à une droite donnée en un point donné. Donc si l'on a

$$V_0^2 = \frac{pg}{\cos^2\alpha_0} = pg\operatorname{ch}^2\varphi_0,$$

c'est-à-dire

$$2gpy_0 + h = gp\operatorname{sh}^2\varphi_0 + h = gp\operatorname{ch}^2\varphi_0, \qquad \text{ou enfin} \qquad h = gp,$$

la parabole donnée sera la trajectoire du point matériel uniquement pesant et *libre*.

3° *Application numérique.* — On se trouve dans le cas où t est exprimé au moyen de φ par la formule

$$\sqrt{\frac{g}{p}}\,t = \operatorname{ch}\varphi_0 - \operatorname{ch}\varphi + \operatorname{L}\operatorname{tgh}\frac{\varphi_0}{2} - \operatorname{L}\operatorname{tgh}\frac{\varphi}{2},$$

avec les valeurs numériques suivantes :

$$\operatorname{sh}^2\varphi_0 = 20, \qquad \operatorname{ch}^2\varphi_0 = 21,$$
$$\operatorname{sh}\varphi_0 = \sqrt{20}, \qquad \operatorname{ch}\varphi_0 = \sqrt{21}.$$
$$\operatorname{sh}\varphi = 1, \qquad \operatorname{ch}\varphi = \sqrt{2},$$

Calculons $\operatorname{tgh}\frac{\varphi_0}{2}$ et $\operatorname{tgh}\frac{\varphi}{2}$.

On a les formules

$$\left\{\begin{aligned} &2\operatorname{sh}\frac{\varphi}{2}\operatorname{ch}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{sh}\varphi,\\ &\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2} + \operatorname{sh}^2\frac{\varphi}{2} = \operatorname{ch}\varphi.\end{aligned}\right.$$

D'où

$$\frac{2\,\mathrm{tgh}\,\frac{\varphi}{2}}{1+\mathrm{tgh}^2\frac{\varphi}{2}} = \mathrm{tgh}\,\varphi, \qquad \text{ou enfin} \qquad \mathrm{tgh}^2\varphi - \frac{2\,\mathrm{tgh}\,\frac{\varphi}{2}}{\mathrm{tgh}\,\varphi} + 1 = 0,$$

$\mathrm{tgh}\,\varphi$ étant donnée inférieure à 1 en valeur absolue, cette équation a deux racines réelles, de même signe, dont le produit est 1.

La plus petite seule (en valeur absolue) est acceptable, et si $\mathrm{tgh}\,\varphi$ est positif on a

$$\mathrm{tgh}\,\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\mathrm{tgh}\,\varphi} - \sqrt{\frac{1}{\mathrm{tgh}^2\varphi} - 1} = \frac{\mathrm{ch}\,\varphi - 1}{\mathrm{sh}\,\varphi}.$$

Appliquons aux valeurs numériques données; nous aurons

$$\mathrm{tgh}\,\frac{\varphi_0}{2} = \frac{\sqrt{21}-1}{\sqrt{20}}, \qquad \mathrm{tgh}\,\frac{\varphi}{2} = \sqrt{2}-1.$$

Par suite

$$\sqrt{\frac{g}{p}}\,t = \sqrt{21} - \sqrt{2} + \mathrm{L}\frac{\sqrt{21}-1}{\sqrt{20}} - \mathrm{L}(\sqrt{2}-1) = \sqrt{21} - \sqrt{2} + \mathrm{L}\frac{\sqrt{21}-1}{\sqrt{20}(\sqrt{2}-1)},$$

$$= \sqrt{21} - \sqrt{2} + \mathrm{L}\frac{\sqrt{20}(\sqrt{21}-1)(\sqrt{2}+1)}{20} = \sqrt{21} - \sqrt{2} + \mathrm{L}\frac{\sqrt{840}+\sqrt{420}-\sqrt{40}-\sqrt{20}}{20}.$$

Or

$$\sqrt{840} = 28{,}98275\ldots \qquad \sqrt{420} = 20{,}49390\ldots$$
$$\sqrt{40} = 6{,}32455\ldots \qquad \sqrt{20} = 4{,}47213\ldots$$
$$\sqrt{21} = 4{,}5825\ldots \qquad \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$$

Donc

$$a = \frac{\sqrt{840}+\sqrt{420}-\sqrt{40}-\sqrt{20}}{20} = 1{,}93399\ldots$$

$$\mathrm{L}a = \frac{\log a}{\log e},$$

$$\log a = 0{,}28646, \qquad \log\log a = \bar{1}{,}45706,$$
$$\log e = 0{,}43429, \qquad \log\log e = \bar{1}{,}63778,$$
$$\mathrm{colog}\log e = 0{,}36222,$$

Donc

$$\log \mathrm{L}a = \bar{1}{,}81928,$$
$$\mathrm{L}a = 0{,}6596$$

et, par suite, le nombre cherché à $\frac{1}{100}$ près, par excès, est 3,83.

Bonnes solutions : MM. M. Laurence; G. Cotty, élève à l'Ecole normale supérieure; E. Aubibert, élève au lycée de Marseille.

EXAMENS DE 1906 (*Suite.*)

CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES (*Grenoble, novembre 1906.*)

Composition écrite.

1570. — 1° Intégrer le système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = x - y - t - 2, \qquad \frac{dy}{dt} = y + t.$$

2° Déterminer une solution particulière telle que pour $t = 0$, on ait $x = 0$, $y = 0$. Construire, pour cette solution particulière, la courbe que décrit le point de coordonnées x et y lorsque t varie;

3° Déterminer : 1° l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des x et la droite $x = 1$; 2° l'aire comprise entre la courbe et la droite $x = 1$;

4° Montrer que par le point $x = 1$, $y = -1$, on ne peut mener qu'une tangente à la courbe.

Épreuve pratique.

I. — Calculer les coordonnées du centre de gravité de l'aire limitée par la courbe

$$y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

l'axe des x et la droite $x = t$, lorsque t est compris entre 0 et 1.

Cas particuliers où $t = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Que deviennent les formules lorsque t tend vers 1 ?

II. — Montrer que l'équation

$$\int_0^x \frac{x^2 dx}{1 + x^2} = \frac{1}{2}$$

n'a qu'une racine. Trouver deux entiers comprenant entre eux cette racine. La calculer par approximation.

QUESTIONS PROPOSÉES

1571. — On donne un polynome du troisième degré quelconque $f(x)$ et on forme l'équation

$$[f'(x)]^2 - 2 f(x) f''(x) = 0.$$

Montrer qu'elle admet deux racines réelles et deux seulement.

Ch. Michel.

1572. — Soient dans l'espace deux droites OD, OD' situées dans un plan P, un point ω pris sur la perpendiculaire en O au plan P, et une droite quelconque Δ. On considère les plans variables passant par Δ et rencontrant OD, OD' en M et M' :

1° Trouver le lieu Γ des centres des sphères S, passant par les points O, ω, M, M' ;

2° Trouver la surface enveloppe Σ des sphères S, et construire le contour apparent de Σ sur le plan P.

3° La courbe Γ est une conique : trouver le lieu du centre de cette conique, lorsque la droite OD, le point ω et la droite Δ restant fixes, la droite OD' tourne autour du point O dans le plan P.

G. Pélissier.

1573. — On peut se proposer d'établir les formules des lentilles sphériques en se basant uniquement sur la nature physique de la lumière. A cet effet, on supposera qu'un mouvement vibratoire a son origine en un certain point A d'un milieu dans lequel il se propage avec une vitesse v ; par l'intermédiaire d'une surface sphérique S de centre C, de rayon r et de faible ouverture, il se transmet dans un second milieu où il se propage avec une vitesse v' et se comporte comme s'il avait une origine, réelle ou virtuelle, située sensiblement en un point A'. On cherchera une relation entre les distances $SA = p$ et $SA' = p'$.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

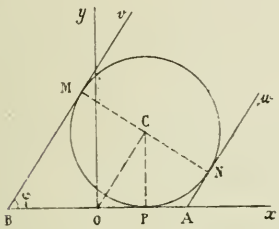
1522. — *On considère un segment de droite* AB *ayant pour longueur* $2a$, *et par les points* A *et* B *on mène deux demi-droites* Au *et* Bv *parallèles et de même sens.*

1° *Trouver l'équation du cercle tangent à* AB, Au *et* Bv, *en fonction de l'angle* φ *que fait la direction* Bv *avec la direction* AB, *et trouver le lieu du centre de ce cercle.*

2° *Trouver le lieu du point de contact* M *de la demi-droite* Bv *avec le cercle indiqué et les coordonnées de* M *en fonction de* φ.

3° *On demande de rectifier cette dernière courbe, de trouver sa longueur totale, de calculer le rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure en un point variable ayant pour paramètre* φ.

Prenons pour origine le milieu de AB, pour axe des x la demi-droite OA, et pour axe des y une perpendiculaire.



1. Il est évident que $BM = BP$, $AN = AP$; par suite,

$$AN + BM = BA = 2a,$$

et, comme $2OC = AN + BM$, nous voyons que $OC = a$. Le lieu du point C est donc un cercle décrit de O comme centre avec a comme rayon. Les coordonnées du point C sont $a \cos \varphi$, $a \sin \varphi$ et le rayon du cercle tangent aux trois droites AB, Au, Bv est égal à $a \sin \varphi$. L'équation de ce cercle est donc

$$x^2 + y^2 - 2a(x \cos \varphi + y \sin \varphi) + a^2 \cos^2 \varphi = 0.$$

2. On a visiblement

$$BM = BP, \quad BM = a + a \cos \varphi = a(1 + \cos \varphi).$$

Si donc on prend pour pôle le point B, pour axe polaire la demi-droite BA ou Bx, on voit que l'équation du lieu de M en coordonnées polaires est

$$\rho = a(1 + \cos \omega), \qquad \omega = \varphi ;$$

par suite, les coordonnées de M en fonction de φ sont

$$x = a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi, \qquad y = a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi,$$

dans le système d'axes ayant pour origine le point B. L'équation polaire du lieu nous montre que le lieu du point M est une cardioïde ayant le point B pour point de rebroussement et la droite BA pour tangente en ce point.

3. On a $ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2$, par conséquent $ds^2 = 4a^2 \cos^2 \frac{\omega}{2} d\omega^2$,

$$ds = 2a \cos \frac{\omega}{2} d\omega ; \qquad \text{donc} \qquad s = 4a \sin \frac{\omega}{2} + C^{te}.$$

Si l'on prend le point A pour origine des arcs et que l'on fasse s nul pour $\omega = 0$, on aura $s = 4a \sin \frac{\omega}{2}$, et il suffira de faire varier ω de 0 à π pour avoir la longueur de la moitié supérieure de cette courbe. On trouve ainsi $s = 4a$. La longueur totale est $8a$.

Le rayon de courbure est donné par

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''}.$$

Mais il vaut mieux dans le cas actuel former d'abord l'équation de la normale, chercher ensuite le point où elle touche son enveloppe, ce qui fournit le centre de courbure, puis prendre ensuite la distance de ce point au point M, ce qui donne le rayon de courbure. Or l'équation de la normale est

$$(X - x)x' + (Y - y)y' = 0 ;$$

ici elle se réduit à

$$(1 + \cos \varphi)[(a - x) \sin \varphi + y \cos \varphi] - \sin \varphi(x \cos \varphi + y \sin \varphi) = 0.$$

En dérivant cette équation par rapport à φ et combinant la nouvelle équation avec l'ancienne, on trouve le point caractéristique de l'enveloppe des normales, c'est-à-dire le centre de courbure. L'équation de la normale s'écrit d'abord

$$x(\sin \varphi + \sin 2\varphi) - y(\cos \varphi + \cos 2\varphi) - a \sin \varphi(1 + \cos \varphi) = 0$$

ou

$$x \sin \frac{3\varphi}{2} - y \cos \frac{3\varphi}{2} = a \sin \varphi \cos \frac{\varphi}{2}.$$

la dérivée par rapport à φ est

$$x \cos \frac{3\varphi}{2} + y \sin \frac{3\varphi}{2} = \frac{2}{3} a \left(\cos \varphi \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} \sin \varphi \sin \frac{\varphi}{2} \right),$$

et il n'y a plus qu'à résoudre ces deux équations par rapport à x et à y; en multipliant la première par $\sin \frac{3\varphi}{2}$, la seconde par $\cos \frac{3\varphi}{2}$ et ajoutant, nous avons x; puis, en multipliant la première par $-\cos \frac{3\varphi}{2}$, la seconde par $\sin \frac{3\varphi}{2}$ et ajoutant, nous avons y :

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{3}(1 + \cos \varphi + \sin^2 \varphi), \\ y = \dfrac{a}{3}(\sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi). \end{cases}$$

Quant au rayon de courbure, c'est la distance du point M au centre de courbure et nous avons ainsi

$$R^2 = \frac{4a^2}{9}[(\cos \varphi + \cos 2\varphi)^2 + (\sin \varphi + \sin 2\varphi)^2] = \frac{8a^2}{9}(1 + \cos \varphi) = \frac{16a^2}{9} \cos^2 \frac{\varphi}{2};$$

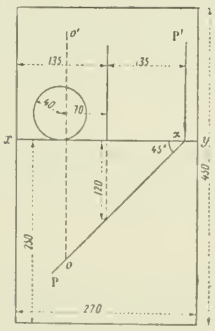
finalement

$$R = \frac{4a}{3} \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Bonnes solutions : MM. G. Cotty, élève de l'École normale supérieure; R. Manen, à Albi; J. L'Hermitte, lycée de Caen; A. Cotty, lycée de Dijon; H. Masson; E.-N. Barisien; Moret, à Paris; G. Fougry, à Roanne; J. Soudet, élève au lycée de Rouen; G. Bresse, à Vic-Exemplet.

ÉCOLE CENTRALE (*Concours de 1906.*)

1519. — *Cadre* $\frac{450^{\text{mm}}}{270}$. *Placer la ligne de terre xy parallèle aux petits côtés du cadre et à* 250^{mm} *du côté inférieur.*



Le tore, reposant sur le plan horizontal, est engendré par un cercle de 40^{mm} *de rayon, tournant autour d'un axe vertical; cet axe a sa projection verticale au milieu de la feuille; son pied est à* 120^{mm} *au-dessous de xy. La distance du centre du cercle générateur à l'axe est égale à* 70^{mm}.

La sphère bitangente au tore a 140^{mm} *de rayon, son centre o, o' (à déterminer) est au-dessus du tore, vers la gauche de la feuille et dans un plan vertical* P'αP *conduit par l'axe du tore et tel que l'angle* $x\alpha P = 45°$.

Après avoir déterminé les projections de la ligne communes aux deux surfaces, on représentera la partie solide du tore extérieure à la sphère, en supposant celle-ci enlevée.

Dans la mise à l'encre on indiquera les constructions d'un point quelconque de l'intersection, de la tangente en ce point, ainsi que les constructions des points principaux et des lignes particulières.

Les points principaux seront mis en évidence par de petites circonférences de 1^{mm} *de rayon, ayant ces points pour centres (trait rouge continu).*

Titre extérieur : Géométrie descriptive. — Titre intérieur : Sphère bitangente au tore.

Détermination des deux surfaces. — On a immédiatement le contour apparent vertical et le contour apparent horizontal du tore d'après l'énoncé. Pour déterminer la sphère, supposons d'abord que son centre est dans le plan méridien de front du tore, et à gauche de l'axe; sa section méridienne de front sera un grand cercle qui touchera extérieurement la circonférence de droite, et intérieurement la circonférence de gauche, sections du

tore par le même plan de front. Il suffit donc de décrire de chacun des centres de ces circonférences des arcs de cercle ayant respectivement pour rayon (140 + 40) ou 180^{mm} et (140 — 40) ou 100^{mm} et de prendre le point commun à ces arcs au-dessus du plan de l'équateur du tore pour obtenir le centre de la sphère (ω'_1, ω_1). En faisant tourner ce point autour de l'axe du tore d'un angle de 45° nous avons le centre (ω, ω') de la sphère définitive.

Point courant de l'intersection et tangente. — On peut obtenir la courbe d'intersection par points au moyen de plans horizontaux auxiliaires. Chacun d'eux donne sur la sphère un cercle et sur le tore deux autres cercles qui peuvent faire connaître par leur intersection quatre points de la courbe cherchée. Nous avons indiqué cette construction pour un point courant situé dans le plan horizontal $a'b'$ à l'intersection du parallèle ob du tore avec le petit cercle ωc de la sphère. La tangente en ce point est la perpendiculaire au plan des normales à chaque surface au point M. La normale à la sphère est le rayon ωm, $\omega' m'$; pour le tore il suffit de prendre le point s' où la normale $b's'$ à la méridienne de front sur le même parallèle coupe l'axe du tore, et joindre $s'm'$ qui se projette horizontalement en om. On a de suite l'horizontale $d'e'$, de du plan des normales et la perpendiculaire mt donne la tangente en m; la tangente à la projection verticale a été obtenue en prenant la trace t de la tangente sur le plan équateur du tore, en tenant compte d'une particularité qui sera signalée plus loin. — On aurait pu d'ailleurs construire simplement la perpendiculaire à une ligne de front du plan des normales.

Points remarquables. — Les points sur le contour apparent horizontal du tore s'obtiennent en coupant la sphère par le plan équateur du tore, ce qui donne le parallèle ωf passant par les quatre points g que l'on cherche. Nous avons relevé deux d'entre eux en g' sur la projection verticale. Il n'y a pas de point de l'intersection sur le contour apparent horizontal de la sphère puisque le centre de la sphère est au-dessus du parallèle le plus haut du tore.

Les points sur le contour apparent vertical du tore s'obtiennent en coupant la sphère par le plan de front méridien du tore qui donne un petit cercle de front $\omega' k'$ donnant quatre points l' sur les cercles méridiens du tore; il faut ensuite couper la sphère par les plans limites supérieur et inférieur dans le tore ce qui donne deux petits cercles ωn qui rencontrent la projection horizontale commune des deux parallèles du tore en quatre points tels que p, dont la projection verticale p' fait connaître les points cherchés; nous avons relevé un de ces points p' sur chaque parallèle en projection verticale.

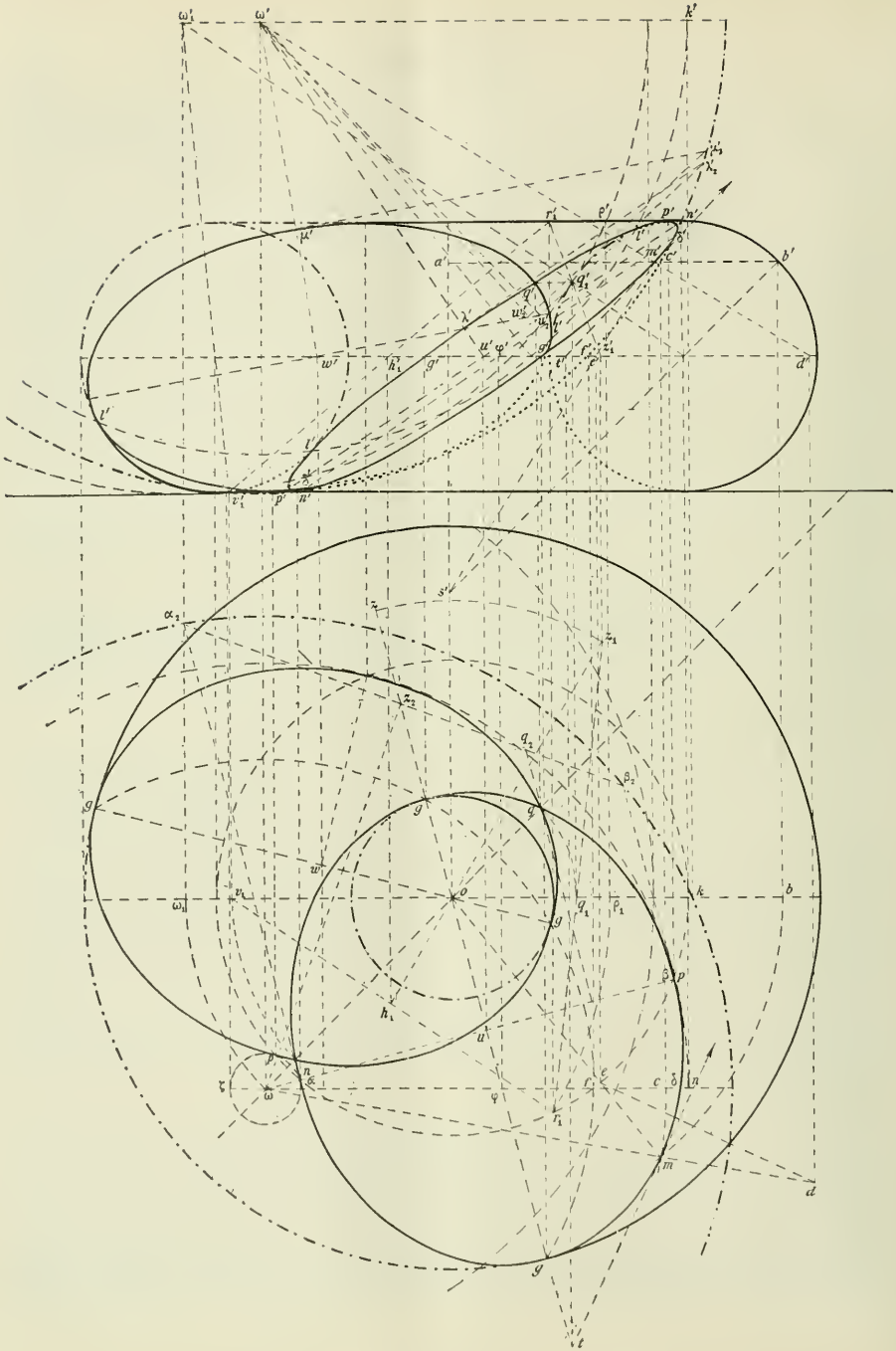
Les points sur le contour apparent vertical de la sphère seront déterminés plus loin.

Nous savons que la courbe d'intersection présente deux points doubles aux points de contact de la sphère et du tore; on les obtient en partant des points tels que q'_1, q_1 situés sur la sphère auxiliaire Ω_1 et faisant tourner ces points de 45° autour de l'axe du tore. Nous avons indiqué cette construction pour le point q, q'.

Nature de l'intersection. — Nous avons donné toutes les constructions qui précèdent parce qu'elles sont l'application des méthodes générales qu'on peut être obligé de suivre dans un cas ordinaire, et qu'elles n'offraient pas de complication spéciale. Mais ici on devait remarquer que la sphère, étant bitangente au tore, le coupe suivant deux courbes planes qui seront par conséquent deux cercles, puisque ce sont des sections planes de la sphère. Rappelons comment on établit ce résultat par la géométrie pure : si l'on prend le point où l'axe du tore perce la sphère comme pôle d'inversion, et pour puissance d'inversion la puissance de ce point par rapport au cercle qui engendre le tore, cette surface se transforme en elle-même; la sphère se transforme en un plan bitangent au tore, et l'on sait (théorème de Villarceau) que ce plan coupe le tore suivant deux cercles, dont la figure inverse se compose aussi de deux cercles.

Cela posé, comme la courbe de section est symétrique par rapport au plan méridien $o\omega$ commun aux deux surfaces, les deux plans sont symétriques par rapport à ce plan et se coupent précisément suivant la droite qui joint les points de contact tels que q. Il suffit de déterminer un seul point de la section autre que ces points pour obtenir l'un des plans. On est alors ramené à chercher la section plane d'une sphère sans s'occuper du tore, si ce n'est pour les points remarquables.

Construction directe des ellipses. — Nous avons indiqué les constructions qui permettent d'obteuir ainsi les projections des deux cercles de section. Il nous a paru plus simple de considérer d'abord la sphère dans sa première position ω_1, ω'_1. L'un des plans de section est alors défini par les points de contact $Q_1 Y_1$ et un point R_1 intersection du parallèle supérieur du tore avec la sphère. On construit une horizontale $R_1 Z_1$ de ce plan et on la fait tourner autour de l'axe du tore d'un angle de 45° en même temps que la sphère, ce qui l'amène en oz pendant que le point Q_1 vient en q, q'. Nous menons alors par le centre Ω de la sphère le plan vertical perpendiculaire au plan sécant QOZ et nous le rabattons sur le plan horizontal de ce centre. Nous prenons pour cela les deux points de la ligne de pente qui sont sur les horizontales du point Z et du point Q et donnent les points z_2 et q_2. On a ainsi la corde $z_2 q_2$ du grand cercle rabattu qui fait connaître le diamètre du cercle dont la pro-



Echelle : $\frac{3}{5}$.

jection horizontale $\alpha\beta$ est le petit axe de l'ellipse, le grand axe étant précisément sur l'horizontale uz et ayant la longueur de la corde $\alpha_2\beta_2$. L'ellipse est ainsi bien déterminée et on en déduit la seconde ellipse symétrique de celle-ci par rapport à ωq.

Nous avons employé une construction analogue pour obtenir directement les axes des deux ellipses projections verticales — ce qui d'ailleurs n'est pas indispensable puisque les projections verticales des axes de la projection horizontale donnent deux diamètres conjugués de l'autre projection et permettent de la tracer presque aussi simplement. Nous avons donc mené par Ω le plan de bout perpendiculaire à une frontale du plan sécant et qui n'est autre que $\omega' u'$ puisque ce plan de bout contient le centre de la section, puis nous avons rabattu ce plan sur le plan de front du centre de la sphère ; il a suffi de déterminer la position u'_2 du centre de la section dont nous avons l'éloignement relatif, et de mener par u'_2 la corde perpendiculaire à $\omega' u'_2$, puis relever les extrémités de cette corde, soit λ'_2, pour avoir le petit axe $u\lambda'$ de la projection verticale cherchée. On obtient l'autre ellipse de la même manière par le rabattement de son centre w' en w'_2.

Il est facile maintenant de trouver les points sur le contour apparent vertical de la sphère, puisqu'il suffit de prendre l'intersection de ce contour apparent avec la ligne de front de chaque plan sécant menée dans le plan de front du centre. Une seule des ellipses touche le contour apparent sur la ligne de front $\varrho'\delta'$, le second cercle étant entièrement situé en arrière du plan de contour apparent de la sphère.

Pour la distinction des parties vues et cachées sur le solide qui reste quand on a enlevé la sphère, il suffira de suivre la méthode déjà expliquée dans les épures précédentes (à l'occasion de l'épure du concours de l'Ecole polytechnique, 1906), et qui consiste à imaginer un mobile partant d'un point manifestement vu sur le contour apparent du tore, b, b' par exemple, et suivant ce contour, puis parcourant la courbe de section dans un sens déterminé. On obtient ainsi la ponctuation. Nous ferons remarquer que le petit arc du parallèle inférieur du tore compris entre les deux cercles est enlevé, mais la projection verticale se confond avec celle de l'arc symétrique par rapport au plan méridien de front du tore, qui subsiste. — On voit également dans cette région de la projection verticale un petit arc en trait mixte au-dessous de xy et qui appartient au contour apparent enlevé de la sphère — c'est la projection verticale de la partie intérieure au petit cercle $\omega\zeta$. (¹).

Note. — On peut établir par le calcul que l'intersection des deux surfaces se compose de deux cercles. Prenons le cercle

$$\begin{cases} y = 0, \\ (x-a)^2 + z^2 = R^2. \end{cases}$$

Il engendre en tournant autour de oz le tore

$$(1) \qquad (x^2+y^2+z^2+a^2-R^2)^2 = 4a^2(x^2+y^2).$$

Considérons maintenant la sphère qui a pour section méridienne

$$\begin{cases} y = 0, \\ (x+b)^2 + (z-c)^2 - \rho^2 = 0. \end{cases}$$

Exprimons que ce cercle touche intérieurement la circonférence qui a pour équation dans le plan zox

$$(x+a)^2 + z^2 = R^2$$

et touche extérieurement le cercle

$$(x-a)^2 + z^2 = R^2,$$

on a les conditions

$$(a-b)^2 + c^2 = (\rho - R)^2, \qquad (a+b)^2 + c^2 = (\rho + R)^2,$$

qui donnent

$$b = \frac{R\rho}{a}, \qquad c = \frac{1}{a}\sqrt{(a^2-R^2)(\rho^2-a^2)}.$$

La sphère a donc pour équation

$$(2) \qquad \left(x + \frac{R\rho}{a}\right)^2 + y^2 + \left[z - \frac{\sqrt{(a^2-R^2)(\rho^2-a^2)}}{a}\right]^2 = \rho^2.$$

Les équations (1) et (2) définissent la courbe d'intersection.

Il y a avantage à écrire l'équation du tore (1) sous la forme équivalente

$$(1') \qquad (x^2+y^2+z^2-a^2-R^2)^2 = 4a^2(R^2-z^2),$$

la sphère étant

$$(2') \qquad x^2+y^2+z^2+2\frac{R\rho}{a}x - 2\frac{Mz}{a} + R^2 - a^2 = 0, \qquad \text{où} \qquad M = \sqrt{(a^2-R^2)(\rho^2-a^2)}.$$

La courbe d'intersection est donc sur la surface

$$(3) \qquad \left(-2\frac{R\rho}{a}x + 2\frac{M}{a}z - 2R^2\right)^2 - 4a^2(R^2-z^2) = 0.$$

C'est un cylindre elliptique dont les génératrices sont parallèles à Oy et qui donne pour projection de la courbe sur le plan méridien commun une ellipse dont l'équation est (3).

(¹) Le lecteur pourra remarquer que certaines constructions paraissent faire double emploi, mais elles ont été effectuées autant pour servir de vérification que pour montrer qu'on pouvait les donner toutes sans charger l'épure d'une manière excessive. Il suffit d'ailleurs dans une épure d'examen, de donner celles qui sont l'application d'une seule méthode.

Si maintenant on reprend les équations (2)' et (3) et qu'on les ajoute après avoir multiplié (2)' par $-4R^2$, il vient

$$(R\sqrt{\rho^2-a^2}x+\rho\sqrt{a^2-R^2}z)^2-a^2R^2y^2=0,$$

qui représente deux plans passant par l'origine et coupant la sphère suivant les deux cercles qui constituent la courbe commune au tore et à la sphère donnée.

Très bonne solution de M. Forcay, de Roanne.

ÉCOLE CENTRALE (1906)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Suite.*)

Mécanique (M. Lebesgue).

3608. — Étudier le mouvement $x=3e^t-e^{-t}$.

3609. — Étudier le mouvement dans lequel on a : $v=3e^t$; $v=3\,\text{séc}\,x$.

3610. — Limite d'excursion d'un mobile qui décrit une courbe suivant la loi $e=\cos^3 t-\sin^2 t$.

3611. — Définition de la vitesse. — Soit $e(t)$ le vecteur OM qui va de l'origine au mobile, $e(t+\Delta t)$ le vecteur OM'. — Démontrer que le vecteur

$$\frac{e(t+\Delta t)+e(t-\Delta t)-2e(t)}{(\Delta t)^2}$$

a pour limite le vecteur accélération.

3612. — Démontrer que l'accélération se trouve dans le plan osculateur. t désignant le temps, que seront la vitesse et l'accélération dans le mouvement $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$?

3613. — Vitesse en coordonnées polaires.

3614. — Relations entre l'accélération normale, l'accélération tangentielle et la vitesse dans le mouvement circulaire.

3615. — Mouvement périodiquement uniforme.

3616. — Mouvement circulaire uniforme. Nature de la projection de ce mouvement sur une droite.

3617. — Diagrammes des espaces et des vitesses. Relations qui existent entre eux.

3618. — On donne deux points qui se déplacent d'un mouvement rectiligne uniforme respectivement sur les trajectoires

$$\left|\begin{array}{ll} x+y-z=0, & x+2y=0, \\ x+z+1=0; & x+y+2z=4. \end{array}\right.$$

Comment varie la distance de ces deux points avec le temps?

3619. — Étudier la variation de la distance de deux points animés chacun d'un mouvement circulaire uniforme, autour du même point, mais avec des vitesses angulaires différentes.

3620. — On a une courbe plane qui est la trajectoire d'un mouvement. — Soit r la distance d'un point de la courbe à l'origine. — Projection de la vitesse sur le rayon vecteur.

3621. — Soient r et r' les distances du point $M(x, y)$ aux points $A(1, 0)$, $A'(-1,0)$. Relations entre r, r', x et y. M se déplaçant et décrivant la droite $x+y+1=0$, relation entre r et r'. — On suppose que le point M décrive la droite D d'un mouvement uniforme de vitesse v_0. — Calculer $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dr'}{dt}$.

3622. — Qu'est-ce que l'hodographe d'un mouvement? — Qu'arrive-t-il quand l'hodographe est une droite et que la vitesse sur l'hodographe est constante?

3623. — Étudier un mouvement dont l'hodographe est rectiligne et décrit d'une manière uniformément variée.

3624. — Vitesse aréolaire; dans quel cas cette vitesse est-elle nulle? Dimensions de la vitesse aréolaire.

3625. — On considère un point fixe O sur une circonférence. Un mobile parcourt cette circonférence d'un mouvement uniforme. Étudier la vitesse aréolaire par rapport au point O.

3626. — Un point M décrit une circonférence; sa vitesse est constamment égale à sa distance à un diamètre fixe. Étudier le mouvement.

3627. — Mouvement d'un point dont l'accélération est proportionnelle à la distance à un point fixe.

3628. — Mouvement d'un point dont l'accélération varie en raison inverse du carré de sa distance à un point fixe.

3629. — On considère une ellipse et son cercle principal. On se donne la vitesse d'un point M mobile sur ce cercle. Trouver la vitesse au point correspondant m de l'ellipse. Même question pour l'accélération.

3630. — On considère les équations

$$x=f_1(t)+\alpha X+\beta Y+\gamma Z,\qquad y=f_1(t)+\alpha_1 X+\beta_1 Y+\gamma_1 Z,\qquad z=f_3(t)+\alpha_2 X+\beta_2 Y+\gamma_2 Z$$

définissant un mouvement dans l'espace, OX, OY, OZ étant des axes entraînés, ox, oy, oz des axes fixes, α, β, γ ... des coefficients constants indépendants du temps. Nature du mouvement.

3631. — Définition du mouvement de translation. — Démontrer qu'il suffit que trois droites restent parallèles à leurs positions initiales pour qu'on ait un mouvement de translation.

3632. — Démontrer qu'il y a translation quand quatre points non situés dans le même plan ont des vitesses constamment parallèles.

3633. — Définition du mouvement de rotation. Démontrer que pour qu'il y ait un mouvement de rotation d'un corps solide, il faut et il suffit que trois points du solide décrivent trois circonférences dont les plans sont parallèles et dont les centres sont sur une droite perpendiculaire à ces plans.

3634. — Vitesse dans un mouvement de rotation. Soient $x = 2z + 1$, $x - y - z = 7$ les équations de l'axe de rotation et (1, 2, 3) les coordonnées du point dont on cherche la vitesse; trouver les équations de la droite qui porte la vitesse. Soit $\omega = 1$ la valeur de la vitesse angulaire; trouver la grandeur de la vitesse en ce point.

3635. — Même question en prenant $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ pour équations de l'axe; ω étant la vitesse de rotation, trouver la vitesse du point de coordonnées x_1, y_1, z_1.

3636. — De combien de paramètres dépend un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe ?

3637. — On considère un mouvement de rotation; déterminer les éléments de ce mouvement connaissant la vitesse en un point et la direction de la vitesse en un autre point.

3638. — Même question connaissant une vitesse en grandeur et direction et deux autres vitesses en grandeur.

3639. — La droite $x = az + h$, $y = bz + k$ tourne autour de Oz. Quelle est l'équation du lieu engendré ? Le mouvement de rotation s'effectuant avec une vitesse angulaire constante ω, déterminer la vitesse d'un point x, y, z de la droite; lieu des extrémités des vitesses des divers points de la droite.

3640. — On considère à un certain instant un corps solide en rotation. Comment sont distribuées les vitesses, Oz étant l'axe de rotation ? Calculer l'angle sous lequel on voit la vitesse en un point M du centre du cercle décrit par ce point. En déduire le lieu des extrémités des vitesses des points d'une droite perpendiculaire à Oz.

3641. — Mouvement hélicoïdal par la composition de deux mouvements, l'un circulaire uniforme, l'autre rectiligne uniforme et perpendiculaire au premier. Calculer la vitesse, l'accélération, les accélérations tangentielle et normale.

3642. — Composition d'un mouvement circulaire uniforme, avec un mouvement de translation perpendiculaire.

3643. — Composition de deux mouvements vibratoires simples; dans quel cas la composition donne-t-elle lieu à un mouvement elliptique. Les deux mouvements composants étant supposés rectangulaires, quelle relation doit-il y avoir entre les périodes, les amplitudes et les phases pour que la trajectoire se ferme ?

3644. — Mouvement dont les projections sur trois axes de coordonnées sont des mouvements vibratoires simples. Condition pour que l'accélération totale passe par un point fixe. Loi des aires.

3645. — On considère une circonférence dont une tangente se déplace, tandis que son point de contact A décrit la circonférence d'un mouvement uniforme. Un point B décrit la tangente. On donne la vitesse de A et la vitesse de B sur la tangente à un moment donné. Trouver la vitesse absolue de B.

3646. — On considère une circonférence tangente en A à un axe Ot. Soit t l'abscisse de A, R le rayon de la circonférence. On considère sur celle-ci un point M tel que arc AM = AO. — Trouver les coordonnées de M en fonction de t et de R. Tangente en M à la courbe lieu du point M quand t varie. t étant le temps, M peut être considéré comme ayant un mouvement résultant de deux autres; trouver la vitesse de M.

3647. — On considère un point O fixe, un axe Ox fixe, une droite D perpendiculaire à Ox, fixe également. Un point A du plan se meut avec une vitesse donnée. On considère le point B de la bissectrice de l'angle AOx qui est situé sur la droite D. Déduire la vitesse de B de celle de A.

3648. — On donne les vitesses des sommets d'un triangle, trouver la vitesse du centre de gravité, le triangle étant de grandeur variable.

3649. — Soit C une courbe plane et O un point fixe. Par ce point O on mène une sécante variable OA, sur laquelle on porte AB = C^le^. Lieu du point B quand la courbe est une circonférence passant par O. Comment peut-on par des compositions de mouvements déduire la vitesse du point B de celle de A ?

3650. — On a une droite D et une circonférence fixes; une droite se meut en restant tangente en A à la circonférence. On donne la vitesse de A ; peut-on en déduire la vitesse du point B de rencontre de la tangente avec la droite D?

3651. — Lieu d'un point invariablement lié à une droite de longueur constante dont les extrémités A et B s'appuient sur deux droites rectangulaires fixes. — Étant donnée la vitesse du point A, trouver celle du point B, puis celle de M.

3652. — On a un triangle fixe ABC, un triangle équilatéral $\alpha\beta\gamma$ variable dont les sommets décrivent les côtés du triangle ABC. Etant donnée la vitesse de α, trouver celles de β et γ.

3653. — Soit un triangle ABC dont deux sommets sont fixes, le troisième décrivant une circonférence : lieu du centre de gravité. Connaissant la vitesse du sommet mobile, trouver celle du centre de gravité, celle du centre du cercle inscrit au triangle ABC, et celle du point de rencontre des hauteurs.

3654. — Propriétés d'une sécante à une hyperbole. — On se donne les vitesses des points de rencontre avec les asymptotes; trouver les vitesses des points de rencontre avec l'hyperbole.

3655. — Une droite se meut dans le plan des xy ; montrer qu'on n'a pas le droit de choisir arbitrairement les vitesses de deux de ses points. Étant donnée la vitesse en un point et la direction de la vitesse en un autre point, trouver la grandeur de cette vitesse.

3656. — Étudier le mouvement relatif de la pointe traçante dans l'appareil du général Morin, par rapport au cylindre.

3657. — Composition des accélérations. — On a sur une circonférence un point fixe A et un point mobile M ; par M on mène une parallèle à une direction donnée sur laquelle on porte MP = arc MA ; déduire l'accélération de P de celle de M.

3658. — Définition de la force, de la masse, de la vitesse, de l'accélération. Quelles sont les unités de ces grandeurs dans le système C. G. S. ?

3659. – Force, poids, masse. Dynamomètre. Unités de force. — Travail. Unités de travail. Dimensions d'un travail.

3660. — Qu'est-ce qu'une formule de dimensions ? Parler de l'homogénéité dans la formule de Newton $F = k\frac{mm'}{r^2}$.

3661. — Dimensions d'une quantité de mouvement.

3662. — Comment définit-on la vitesse ? Calculer dans le système C. G. S. la vitesse de Paris dans le mouvement diurne en supposant que la terre ne fait que tourner sur elle-même, en prenant 45° pour la latitude de Paris.

3663. — Valeur du kilogramme quand on prend pour unité de temps la minute, pour unité de longueur le kilomètre et pour unité de force la dyne.

3664. — Valeur du kilogramme dans un système d'unités tel que le mètre soit mesuré par 100, la seconde par $\frac{1}{60}$ et la dyne par 10.

3665. — Qu'est-ce que la pesanteur ? Variations de l'intensité de la pesanteur avec l'altitude.

3666. — Principe de l'inertie.

3667. — Que peut-on dire d'un mouvement dans lequel la force est constamment perpendiculaire à la trajectoire ? constamment tangente ?

3668. — Projections de l'accélération sur la normale et sur la tangente. — Un point décrit une trajectoire constamment normale à la force, laquelle est constante en grandeur. Que peut-on dire du mouvement ?

3669. — Un point décrit une circonférence sous l'action d'une force faisant un angle de 45° avec le rayon. Que peut-on dire du mouvement ?

3670. — On considère un point soumis à une force rencontrant constamment une droite donnée. Étudier le mouvement correspondant.

3671. — Construire la courbe $x = \frac{1}{t-1}$, $y = \frac{1}{t+1}$. Cette courbe étant parcourue par un mobile de masse 1, t étant le temps, trouver la force.

3672. — Construire la courbe $x = 3e^t + e^{-t}$, $y = e^t - 2e^{-t}$; t représentant le temps, cette courbe est la trajectoire d'un mobile de masse 3g. Trouver la force qui sollicite ce point.

3673. — Écrire les équations de la tangente à la courbe $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ (1). Projections de la vitesse, de l'accélération, de la force en supposant le point de masse 3g, t désignant le temps. Nature du mouvement projeté sur une droite du plan des xy. On suppose t exprimé en secondes, x, y, z en centimètres ; que deviennent les formules (1) si on exprime t en heures et x, y, z en mètres ?

3674. — Un point décrit une circonférence sous l'action d'une force passant constamment par un point A de la circonférence. On connaît la vitesse au point diamétralement opposé au point A. Étudier le mouvement.

3675. — On donne une hyperbole parcourue par un mobile sur lequel agit une force centrale. On connaît la vitesse en un sommet de l'hyperbole. Déterminer la loi de la force.

3676. — On considère l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ parcourue par un point sous l'influence d'une force parallèle au petit axe ; en une des extrémités de cet axe la vitesse est v. Calculer la valeur de la force en un point quelconque de l'ellipse.

3677. — Construire la courbe $y = \frac{x}{x^2+1}$. Concavité et convexité. Cette courbe est parcourue par un point sous l'action d'une force parallèle à Ox ; la vitesse en O est $\sqrt{2}$. Étudier le mouvement.

3678. — Construire la courbe $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 2y - 1 = 0$. On suppose que cette parabole est parcourue sous l'influence d'une force parallèle à son axe. Étudier le mouvement correspondant.

3679. — Construire la courbe $\rho = \log\omega$. Comment pourrait-on écrire que cette courbe est décrite d'un mouvement uniforme ? Que peut-on dire de la force dans ce mouvement ?

3680. — Mouvement des projectiles. Calculer la vitesse aréolaire en prenant comme rayon la droite joignant l'origine des coordonnées au mobile. En déduire l'aire comprise entre la trajectoire et un rayon allant de la position initiale du mobile à sa position au temps t.

3681. — On vise avec deux fusils identiques, placés en deux points, deux buts différents. Trouver l'intersection des trajectoires, en admettant qu'elles se rencontrent, les deux points d'où l'on vise et les deux points visés n'étant pas dans un même plan.

3682. — Mouvement vertical d'un projectile quand on tient compte de la résistance de l'air, proportionnelle au carré de la vitesse.

3683. — Un point assujetti à rester sur l'axe des x est attiré par le point A (0, 1), proportionnellement à la distance à ce point. Étudier le mouvement.

3684. — Mouvement d'un point attiré par un centre proportionnellement à la distance. Trouver le mouvement par application du théorème des forces vives et de celui de la vitesse aréolaire.

3685. — Mouvement d'un point attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance.

3686. — On donne la trajectoire d'un mouvement plan dans lequel l'accélération est centrale ; on donne la vitesse en un point, déduire la vitesse en un autre point.

3687. — On considère un point attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance; on donne la vitesse en un sommet de la trajectoire. Trouver l'hodographe.

3688. — On considère une circonférence située dans un plan vertical et on abandonne un point pesant M au point le plus haut de la circonférence et à l'extérieur. Trouver le mouvement de ce point en supposant qu'il n'y a pas frottement.

3689. — Définition du travail. Expression analytique du travail ; dimensions.

3690. — Expression du travail dans le cas d'une force centrale.

3691. — Théorème de la force vive. Application au cas d'une force centrale.

3692. — Qu'est-ce que l'énergie ? Qu'appelle-t-on champ de forces ? Définition du potentiel.

3693. — On a des forces dont la résultante a pour projections sur trois axes rectangulaires

$$X = -\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial v}{\partial z},$$

v étant une fonction de x, y, z. Quelles sont les surfaces de niveau ?

3694. — En un lieu, faut-il tenir compte d'autre chose que de l'attraction du centre de la terre pour avoir la direction de la verticale?

3695. — D'un point A on lance un mobile avec une vitesse v_0 suivant la ligne de plus grande pente d'un plan incliné dont l'inclinaison sur le plan horizontal peut varier ; lieu géométrique de la position occupée par le mobile au temps t.

3696. — Mouvement d'une bille pesante assujettie à se déplacer sur une courbe située dans un plan vertical, sans frottement.

3697. — Pendule simple. Que se passe-t-il si on coupe le fil quand le point pesant est au plus bas de sa course ?

3698. — Lois du frottement dans le cas du repos et dans le cas du mouvement.

3699. — Mouvement d'un point sur une courbe avec frottement.

3700. — Equilibre d'un point pesant sur un cercle vertical quand il y a frottement.

3701. — Mouvement d'un point pesant sur un plan incliné dans le cas où il y a frottement.

3702. — On considère un point pesant M sur un plan incliné. Quelle force horizontale F faut-il lui appliquer pour qu'il reste en équilibre, en tenant compte du frottement ?

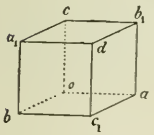
3703. — Région d'équilibre d'un point pesant situé à l'intérieur d'une sphère, en supposant qu'il y a frottement.

3704. — Soit une circonférence de rayon R. On considère un point M non pesant, mobile sur la circonférence, soumis de la part d'un point A de cette circonférence à une force $F = 1 - \frac{R}{AM}$. — Y a-t-il une position d'équilibre ? Est-elle stable ou instable ?

3705. — Établir l'expression analytique des moments.

3706. — Résultante générale et moment résultant par rapport à l'origine du système de vecteurs suivant : On construit un cube en prenant l'unité de longueur sur les trois axes de coordonnées à partir de l'origine et on considère les vecteurs

oa, ac_1, c_1b, bo ;
ca_1, a_1d, db_1, b_1c ;
oc, ab_1, c_1d, ba_1.



3707. — Condition pour qu'un système de vecteurs soit réductible à un vecteur unique ; à un couple.

3708. — Remplacer le système de vecteurs $X = 1$, $Y = 2$, $Z = 0$, $L = 0$, $M = -1$, $N = 3$ par un système de deux vecteurs dont un appliqué au point $(-2, 3, 1)$.

3709. — On considère un système de vecteurs défini par les projections X, Y, Z de la résultante générale, L, M, N du moment résultant. Remplacer ce système par deux vecteurs dont l'un est sur Oz et l'autre lui est perpendiculaire.

3710. — Réduire le système de vecteurs $X = 2$, $Y = 3$, $Z = 4$, $L = 1$, $M = 1$, $N = 1$ à deux vecteurs dont l'un porté par Ox.

3711. — Résultante générale et moment résultant en un point (1, 2, 3) d'un système de vecteurs pour lequel $X = 4$, $Y = 5$, $Z = 6$, $L = 7$, $M = 8$, $N = 9$. Réduire ce système à deux dont l'un porté par la droite

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

3712. — Définition du centre des forces parallèles. Ses propriétés.

3713. — Moment d'un système de forces parallèles par rapport à un plan. Montrer qu'il est égal au moment de la résultante.

3714. — Définition du centre de gravité. — Propriétés de ce point.

3715. — Théorèmes généraux sur les centres et les diamètres dans la recherche des centres de gravité.

3716. — Centre de gravité d'un segment de droite de longueur 1, la densité en un point du segment étant proportionnelle à la distance de ce point à une extrémité du segment.

3717. — Centre de gravité d'un arc de cercle supposé homogène. — On considère une circonférence et à partir d'un de ses points supposé fixe, tous les arcs aboutissant à un point mobile sur la circonférence : lieu du centre de gravité de chacun de ces arcs.

3718. — Centre de gravité d'un secteur circulaire homogène.

3719. — Centre de gravité de la surface d'un tétraèdre. — Soit le tétraèdre

$$OABC\,;\quad O(0,0,0);\quad A(1,0,0);\quad B(0,1,0);\quad C(0,0,1).$$

3720. — Centre de gravité d'un cône de révolution.

3721. — Soit un point O en équilibre sous l'action de forces issues de ce point. Démontrer qu'il est le centre de gravité d'un système de masses égales appliquées aux extrémités de ces forces.

3722. — Levier.

3723. — Balance romaine. Étudier sa sensibilité.

3724. — Bascule de Quintenz.

3725. — Condition d'équilibre de la poulie fixe et de la poulie mobile.

3726. — Poulie fixe en tenant compte du frottement.

3727. — Équilibre du treuil. Cas où les axes du treuil et de la manivelle ne coïncident pas exactement.

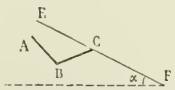
3728. — Équilibre du cabestan. On tire, au moyen d'un cabestan, un fardeau qui frotte contre le sol horizontal. Condition d'équilibre.

3729. — Treuil des carriers.

3730. — Équilibre des moufles. — Palans.

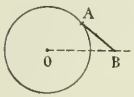
3731. — On donne un plan incliné AB; une barre AC s'appuie sur le plan et sur un point fixe O. — Position d'équilibre de la barre en supposant qu'il n'y ait pas de frottement.

3732. — On a deux plans inclinés, faisant respectivement des angles de 60° et 30° avec le plan horizontal. Équilibre d'une barre pesante reposant par ses extrémités sur les plans (en négligeant le frottement).



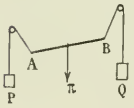
3733. — On a deux barres articulées en B, AB et BC, de même longueur ; BC est seule pesante, le point A est fixe, C peut se déplacer sur un plan incliné EF. Position d'équilibre du système.

3734. — On a un cercle dans un plan vertical et une droite horizontale fixe OB passant par le centre : une barre pesante AB, de longueur égale au rayon R, s'appuie contre le cercle et sur la droite. Position d'équilibre de la barre en tenant compte du frottement le long de la droite OB. Cas où on néglige le frottement.



3735. — On considère une barre pesante AB de poids π dont les extrémités A et B sont maintenues par deux fils qui s'enroulent autour de deux petites poulies et auxquels sont attachés des poids P et Q. Trouver la position d'équilibre de la barre.

3736. — On a une table triangulaire homogène. Calculer les pressions sur ses pieds.



3737. — Équilibre d'une échelle appuyée contre un mur et inclinée par rapport au sol, supposé horizontal.

3738. — Écrire que trois points pris respectivement dans chacun des plans de coordonnées sont les sommets d'un triangle équilatéral. On donne la vitesse d'un sommet, peut on en déduire celle de chacun des deux autres sommets. On suppose le triangle rigide et pesant, la pesanteur étant dirigée suivant la droite $x = y = z$; trouver les positions d'équilibre du triangle.

(*A suivre.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

1574. — 1° Soient $f(x) \equiv x^3 + x^2 - 2$ un polynome du troisième degré qui admet la racine 1 et deux racines imaginaires α et β. Trouver un polynome du second degré $g(x)$ qui prenne la valeur 1 pour $x = 1$ et les valeurs β et α pour $x = \alpha$ et $x = \beta$.

2° Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ en éléments simples et trouver celle de ses primitives qui est nulle pour $x = 0$.

3° Vérifier que le polynome $g[g(x)] - x$ est divisible par $f(x)$ et expliquer le résultat obtenu.

4° Montrer que le polynome $y = g(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$15xy'' + (80x + 15)y' - 160y - 73 = 0,$$

et ramener l'intégration de cette équation aux quadratures sachant en outre que l'équation privée de second membre admet pour solution particulière un trinome du second degré.

E. H.

1575. — Par chacun des points fixes P et Q du plan d'une ellipse (E) on mène les cordes AB, CD parallèles à une direction variable. Trouver le lieu du centre de l'hyperbole équilatère qui passe par A, B, C, D.

E.-N. Barisien.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

17e Année. N° 6. Mars 1907.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LA PROJECTION DE L'INTERSECTION DE DEUX QUADRIQUES

par M. **Leconte**, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand.

On trouvera à la fin de cette note des exercices graphiques ou de calcul ; nous allons montrer l'intérêt qu'ils peuvent présenter. Ils sont relatifs à la projection de l'intersection de deux quadriques, que nous supposerons être du quatrième degré, unicursale, ses trois points doubles n'étant pas distincts.

Faisons la projection orthogonalement sur un plan horizontal. En général, elle présente deux points doubles seulement qui sont des points doubles en projection.

Rappelons comment on les obtient. Soit D la droite commune aux plans diamétraux des cordes verticales dans les deux quadriques. Le plan vertical passant par D donne dans les deux quadriques deux coniques C et γ, pour lesquelles la droite D est le diamètre commun des cordes verticales. Leurs points communs sont deux à deux sur des verticales, AA′, BB′, dont les pieds sont les points doubles en projection. La discussion de leur réalité et de la réalité des branches de courbe qui s'y croisent résulte immédiatement de ce qui précède. Nous ne nous y arrêterons pas.

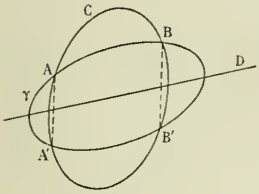


Fig. 1.

La projection de l'intersection de deux quadriques n'est donc pas unicursale en général. Elle ne le sera que si elle a un troisième point double qui sera la projection d'un point singulier de l'intersection des quadriques. Celles-ci seront alors tangentes en un point ou, ce qui revient au même, l'une sera un cône ayant son sommet sur l'autre.

Plaçons-nous dans ce cas particulier et cherchons quand les trois points doubles ne seront pas distincts.

1° Les deux points doubles en projection sont confondus si les deux coniques C et γ sont bitangentes, la corde des contacts étant verticale ; plus particulièrement, ceci se produit si les coniques C et γ sont surosculatrices en un point situé nécessairement sur D.

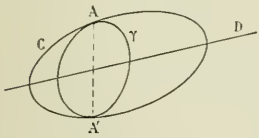


Fig. 2.

2° Un point double en projection est confondu avec la projection du point singulier si les coniques C et γ sont tangentes en un point A, A′ situé sur la droite D, ce point étant un point de contact pour les deux quadriques.

Dans ces deux cas, la projection est une quartique unicursale n'ayant que deux points doubles. La projection du point A, A′ compte pour deux points doubles ; c'est en effet un point double à tangentes confondues en lequel la tangente coupe la courbe en quatre points. Cette tangente dans le cas de la figure 2 est la trace horizontale du plan vertical D et, dans le cas de la figure 3, la trace horizontale du plan tangent commun en A, A′.

La projection n'aura qu'un seul point singulier si, dans le cas de la figure 2, le contact des deux quadriques a lieu en A ou en A′, en A par exemple. La projection des points A, A′ est un point triple, car il s'y croise les projections des deux branches de A et de la branche de A′.

Il y a encore lieu d'examiner si, comme cas particulier des figures 2 et 3, il peut se produire que les coniques C et γ soient surosculatrices en un point A situé sur D, ce point A étant en même temps un point de contact des deux surfaces. Il faut pour cela que le plan vertical D soit le plan tangent commun, le seul qui, passant par un point de contact, donne deux coniques confondues. Mais il faut encore que pour ces deux coniques formées de droites se coupant en A, les diamètres de la direction verticale soient confondus ; c'est dire que les deux couples de génératrices déterminent deux faisceaux en involution ayant un rayon double vertical.

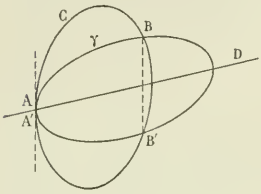


Fig. .

Si ces conditions sont réalisées, la projection du point A sera la seule singularité de la quartique unicursale.

Ce sera en général un point double.

Ce sera un point triple si tout plan vertical passant par A ne donne qu'un point différent de A dans l'intersection, c'est-à-dire si la verticale du point A est l'une des tangentes en A dans l'intersection des deux quadriques.

Ces deux tangentes font partie de l'involution déterminée par les deux couples de génératrices. La projection du point A ne sera donc un point triple que si les deux tangentes au point singulier de l'espace sont confondues, et confondues avec la verticale de A.

Les exemples suivants donnent des applications de ce qui précède. On prendra les projections sur le plan des xy. Elles sont unicursales. Leurs singularités ne sont pas distinctes. Certains exercices diffèrent soit parce que la classe de la quartique n'est pas la même, soit parce qu'un point singulier est à l'infini.

Les translations qu'on remarquera n'ont été introduites qu'en vue de l'application graphique. L'unité de longueur sera le centimètre.

Paraboloïde de révolution et cône :

Le paraboloïde a pour équation $x^2 + z^2 = 4(y + 7)$.

Le cône a pour base la courbe $\begin{cases} y = -3, \\ x^2 + z^2 - 16 - (x + 2)^2 = 0, \end{cases}$

et pour sommet le point $x = 0, \quad y = 2, \quad z = 6.$

Surface gauche et cylindre :

La surface gauche a pour équation $\dfrac{x^2 + z^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} = 1.$

Le cylindre a pour base la courbe $\begin{cases} y = 5, \\ x^2 + z^2 - 32 + (x + 4\sqrt{2})^2 = 0. \end{cases}$

La direction des génératrices a pour paramètres directeurs 0, 5, 4.

Sphère et cône :

La sphère a pour équation $x^2 + y^2 + z^2 = 100.$

Le cône a pour base la courbe $\begin{cases} y = 0, \\ \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{z^2}{25} - 1 = 0, \end{cases}$

et pour sommet le point $x = -10, \quad y = 15, \quad z = 5.$

Sphère et cône :

La sphère a pour équation $x^2 + y^2 + z^2 - 100 = 0.$

Le cône a pour base la courbe $\begin{cases} z = 0, \\ x^2 - (y - 2{,}5)^2 + \overline{2{,}5}^2 = 0, \end{cases}$

et pour sommet le point $x = 0, \quad y = 5, \quad z = 5\sqrt{3}.$

Cylindre et cône :

Le cylindre a pour équation $x^2 + z^2 = 36.$

Le cône a pour base la courbe $\begin{cases} y = 6, \\ 2x^2 + z^2 + 12x = 0, \end{cases}$

et pour sommet le point $x = -6, \quad y = 14, \quad z = 8.$

Deux cylindres paraboliques :

Leurs équations sont $z^2 = 8(x + 12),$

$(y - z)^2 = 8(x + 8).$

Deux cônes :

L'un a pour base la courbe $\begin{cases} z = 0, \\ (x + 6)^2 + y^2 - 64 = 0, \end{cases}$

et pour sommet le point $x = -14, \quad y = 0, \quad z = 22.$

L'autre a pour base la courbe $\begin{cases} y = 0, \\ (x + 3)^2 + z^2 - 121 = 0, \end{cases}$

et pour sommet le point $x = -14, \quad y = 13, \quad z = 0.$

Ellipsoïde et cône :

L'ellipsoïde a pour équation $\dfrac{x^2 + z^2}{64} + \dfrac{y^2}{121} = 1.$

Le cône a pour base la courbe $\begin{cases} x = 8, \\ (z + 2)^2 = 4(y + 1), \end{cases}$

et pour sommet le point $x = -8, \quad y = 0, \quad z = 0.$

Cylindre et hyperboloïde :

Le cylindre a pour équation $(y + 7)^2 + z(y + 7) + z^2 - 8(y + 7) = 0.$

L'hyperboloïde a pour équation $z^2 + 2x(y + 7) - 4 = 0.$

Deux cônes :

L'un a pour base la courbe $\begin{cases} z = 8, \\ (x + 14)^2 + y^2 - 16(x + 14) = 0, \end{cases}$

et pour sommet le point $x = -14, \quad y = 0, \quad z = 0.$

L'autre a pour base la courbe $\begin{cases} y = 0, \\ (x + 14)^2 + z^2 - 16(x + 14) = 0, \end{cases}$

et pour sommet le point $x = -14, \quad y = 12, \quad z = 0.$

Pour terminer, indiquons sans la développer la propriété suivante :

Étant donné deux quadriques tangentes, en faisant la projection conique de leur intersection, on peut, en choisissant convenablement le point de vue, rencontrer les cas particuliers où la projection a

seulement deux points singuliers ou un seul, le dernier cas parmi tous ceux que nous avons énumérés plus haut ne s'obtenant bien entendu que si le point singulier de l'intersection des quadriques est à tangentes confondues.

Signalons que le point de vue devra se trouver soit sur l'un des cônes du second degré passant par l'intersection des deux quadriques, soit dans le plan tangent commun au point de contact.

NOTE SUR L'HODOGRAPHE D'UN MOUVEMENT A ACCÉLÉRATION CENTRALE

par M. **Mathieu Weill.**

v étant la vitesse du point M, p la distance du centre O des accélérations à la tangente en M, on sait qu'on a

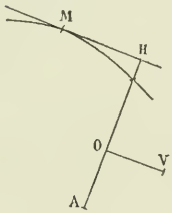
$$pv = k,$$

k étant une constante. Ceci posé, H étant la projection de O sur la tangente, prenons un point A tel que l'on ait

$$\mathrm{OH}.\mathrm{OA} = k,$$

faisons tourner OA d'un angle droit autour du point O, le point V ainsi obtenu décrit l'hodographe.

Réciproquement, l'hodographe étant donnée, on aura la trajectoire en prenant l'anti-podaire de la transformée de l'hodographe par inversion, cette hodographe ayant préalablement tourné d'un angle droit autour du centre des accélérations.



Il en résulte que :

1° Si l'hodographe est une conique, la trajectoire est une conique, et réciproquement ;

2° Si la trajectoire est une conique, le centre des accélérations étant au foyer de la conique, l'hodographe est un cercle ;

3° Si la trajectoire est un cercle, l'hodographe est une conique dont un foyer coïncide avec le centre des accélérations ;

4° Si, en prenant pour origine des coordonnées le centre des accélérations, l'équation de la trajectoire est

$$y = kx^m,$$

l'équation de l'hodographe est

$$x = k'y^m,$$

(k et k' étant des constantes), et cela, quel que soit m, entier ou fractionnaire, positif ou négatif ; de là, des résultats relatifs à la parabole et à l'hyperbole.

Cherchons l'hodographe par le calcul.

L'origine étant au centre des accélérations, les coordonnées d'un point de l'hodographe sont

$$\mathrm{Y} = \frac{dy}{dt}, \qquad \mathrm{X} = \frac{dx}{dt},$$

et l'on a

$$x\,dy - y\,dx = k\,dt,$$

d'où

$$\mathrm{Y} = \frac{y'}{xy' - y}, \qquad \mathrm{X} = \frac{1}{xy' - y}. \qquad (k = 1).$$

Pour avoir l'hodographe, il faut éliminer x et y entre ces équations et l'équation $f(x, y) = 0$ de la trajectoire.

Or, considérons la droite qui a pour équation

$$y = px + q,$$

d'où $$y' = p, \qquad xy' - y = -q.$$

Si l'on donne l'équation de l'hodographe

$$F(X, Y) = 0 \qquad \text{ou} \qquad F_1(p, q) = 0,$$

on aura l'équation de la trajectoire en considérant l'équation *tangentielle*

$$F_1(p, q) = 0,$$

et appliquant la méthode ordinaire pour en déduire l'équation *ponctuelle*.

Si l'on prend, directement, l'équation différentielle

$$F\left(\frac{1}{xy' - y}, \frac{y'}{xy' - y}\right) = 0,$$

on aura comme solution l'ensemble des tangentes à la trajectoire, et comme *solution singulière* l'enveloppe de ces tangentes, c'est-à-dire la trajectoire cherchée.

Il est facile de se rendre compte, par la géométrie, de ce résultat. En effet, prenons un point A de l'hodographe ; si l'hodographe est réduite à ce point, la trajectoire correspondante est une droite, et v et p sont tous deux constants, cette droite est la tangente correspondant à la trajectoire ; quand A décrit l'hodographe, on a toutes les tangentes, chacune correspondant à une position de A. Mais si l'on envisage l'hodographe elle-même, la trajectoire qui lui correspond est l'enveloppe de ces tangentes.

CERTIFICAT D'ÉTUDES SUPÉRIEURES (*Rennes, juin 1905.*)

Mathématiques préparatoires à la physique et aux sciences industrielles.

1497. — *Trouver l'enveloppe de la droite* $x \cos \alpha + y \sin \alpha - a\alpha = 0$, α *désignant un paramètre variable.*

Exprimer les coordonnées d'un point de l'enveloppe en fonction de α.

Trouver l'expression de l'arc, du rayon de courbure, des coordonnées du centre de courbure en fonction du même paramètre.

Reconnaître la nature de la développée.

Les coordonnées du point M où la droite

$$(1) \qquad x \cos \alpha + y \sin \alpha - a\alpha = 0$$

touche son enveloppe sont les solutions communes à l'équation (1) et à la suivante

$$(2) \qquad -x \sin \alpha + y \cos \alpha - a = 0,$$

obtenue en dérivant la première par rapport à α.

Résolvons ces équations par rapport à x et y, nous obtenons

$$(3) \qquad x = a(\alpha \cos \alpha - \sin \alpha), \qquad y = a(\alpha \sin \alpha + \cos \alpha);$$

ce sont les équations paramétriques de l'enveloppe.

Nous en tirons

$$dx = -a\alpha \sin \alpha \, d\alpha, \qquad dy = a\alpha \cos \alpha \, d\alpha,$$

et par suite

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2\alpha^2 d\alpha^2, \qquad \text{ou} \qquad ds \doteq \pm a\alpha d\alpha;$$

et en supposant que s varie dans le même sens que α, $ds = a\alpha d\alpha$, et en intégrant

$$s = a\frac{\alpha^2}{2} + C.$$

La longueur de l'arc qui unit les points M_0 et M_1 correspondant aux valeurs α_0 et α_1 du paramètre est donc, en supposant $\alpha_1 > \alpha_0$,

$$\text{arc } M_0M_1 = \frac{a}{2}(\alpha_1^2 - \alpha_0^2).$$

Pour avoir le rayon de courbure et le centre de courbure, on pourrait appliquer les formules générales, ce qui ne présente ici aucune difficulté. Il est plus simple de remarquer que la droite représentée par l'équation (2) passe par le point M et est perpendiculaire à la tangente (1); par suite cette droite est la normale au point M, et le centre de courbure à la courbe considérée au point M est le point limite de cette normale.

Les coordonnées de ce point, définies par les équations

$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha - a = 0, \qquad -x\cos\alpha - y\sin\alpha = 0,$$

sont donc

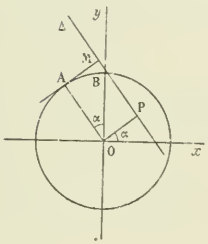
$$x = -a\sin\alpha, \qquad y = a\cos\alpha. \tag{4}$$

Ce point décrit le cercle $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, qui est ainsi la développée de la courbe donnée.

Le rayon de courbure est égal à la distance des points (3) et (4); nous trouvons ainsi

$$R = a\alpha.$$

On voit ainsi que la courbe considérée est une développante de cercle, et il est facile de le démontrer directement.



En effet, sur le cercle $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ prenons un point A, tel que l'on ait

$$(Oy, OA) = \alpha, \qquad \text{ou} \qquad (Ox, OA) = \alpha + \frac{\pi}{2};$$

puis sur la tangente en ce point, dans le sens négatif, prenons une longueur AM égale à l'arc AB. On sait que le point M décrit une développante du cercle, et que la tangente en ce point est la droite Δ, perpendiculaire à AM.

Or si du point O nous abaissons OP perpendiculaire sur cette droite, nous avons $OP = AM = \text{arc}\,AB = a\alpha$, et $(Ox, OP) = \alpha$. Par suite, l'équation de la droite Δ est

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - a\alpha = 0.$$

FREY, à Alger.

Bonnes solutions par MM. G. Cotty, élève à l'école normale supérieure; R. de Faria; R. Manen, institution Sainte-Marie, à Albi; W. Mérigot, à Paris; G. Pélissier, à Toulouse; G. Foucry, à Roanne.

MÉCANIQUE

1499. — *Soit la courbe* (C) $\rho = a(1 + \cos\omega)$.

1° *Calculer le rayon de courbure et construire la développée.*

2° *On suppose que la courbe* (C) *soit dans un plan vertical, que l'axe polaire soit horizontal et on astreint un point matériel uniquement soumis à son poids à décrire sans frottement la courbe* (C). *Montrer que dans ce mouvement, en posant* $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \lambda$, *on a*

$$dt = \frac{d\lambda}{\sqrt{(1+\lambda^2)f(\lambda)}},$$

$f(\lambda)$ *étant un polynome du quatrième degré.*

3° *Faire la discussion, d'après les conditions initiales, du mouvement du point matériel sur la courbe. En particulier, supposer la vitesse initiale nulle.*

Application numérique. — Le point matériel est abandonné au point de la courbe $\omega = \frac{\pi}{2}$. *Calculer*

à 1 minute près, en grades, l'angle polaire de l'autre extrémité de sa course, sur la courbe. Quelle approximation en résulte-t-il pour la valeur en radians si on prend $\pi = 3,14$?

(*On suppose le point initial* $\omega = \frac{\pi}{2}$ *situé en dessous de l'axe polaire.*)

4° *Calculer la réaction normale de la courbe* (C) *sur le point matériel et discuter ses changements de sens.*

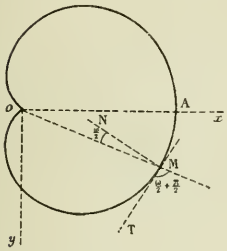
La courbe (C) est un limaçon de Pascal à rebroussement, c'est-à-dire une cardioïde.

Elle se définit comme conchoïde de cercle, le point fixe étant un point du cercle, la longueur à ajouter et à retrancher au rayon vecteur du cercle étant égale au diamètre.

Elle se définit comme épicycloïde : elle est le lieu décrit par un point d'un cercle qui roule sans glisser sur un cercle égal.

En se plaçant à ce dernier point de vue, on retrouvera la courbe C dans la solution de la question 1490. Nous ne nous y arrêterons pas dans le présent problème.

1° Calculons le rayon de courbure et construisons la développée en opérant par le calcul.



Plaçons l'axe polaire horizontal et le sens d'orientation du plan contraire du sens habituel. On a

$$\rho = a(1 + \cos\omega) = 2a\cos^2\frac{\omega}{2}.$$

D'où $$\rho'_\omega = -2a\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}.$$

Donc $$\operatorname{tg} V = -\frac{\cos\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{2}\right).$$

Donc la demi-tangente positive MT fait avec ox l'angle $\alpha = \frac{3\omega}{2} + \frac{\pi}{2}$ et la demi-normale dirigée vers le centre de courbure fait avec ox l'angle $\alpha + \frac{\pi}{2} = \pi + \frac{3\omega}{2}$.

Le rayon de courbure est $\frac{ds}{d\alpha}$.

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 = 4a^2\cos^2\frac{\omega}{2}\sin^2\frac{\omega}{2}d\omega^2 + 4a^2\cos^4\frac{\omega}{2}d\omega^2 = 4a^2\cos^2\frac{\omega}{2}d\omega^2,$$

d'où $$ds = 2a\cos\frac{\omega}{2}d\omega \qquad \text{et} \qquad d\alpha = \frac{3}{2}d\omega.$$

Donc $$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{4a}{3}\cos\frac{\omega}{2}.$$

Le centre de courbure a donc pour coordonnées cartésiennes

$$x = 2a\cos\omega\cos^2\frac{\omega}{2} - \frac{4a}{3}\cos\frac{\omega}{2}\cos\frac{3\omega}{2}, \qquad y = 2a\sin\omega\cos^2\frac{\omega}{2} - \frac{4a}{3}\cos\frac{\omega}{2}\sin\frac{3\omega}{2};$$

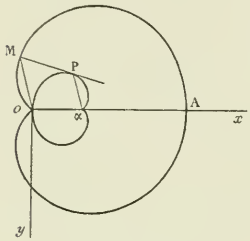
$$x = a\cos\omega(1 + \cos\omega) - \frac{2a}{3}(\cos 2\omega + \cos\omega), \qquad y = a\sin\omega(1 + \cos\omega) - \frac{2a}{3}(\sin 2\omega + \sin\omega);$$

$$x = \frac{a}{3}(1 + \cos\omega)(2 - \cos\omega), \qquad y = \frac{a}{3}(1 - \cos\omega)\sin\omega.$$

Transportons l'origine au point α $\left(x = \frac{2a}{3},\ y = 0\right)$, qui est le point de la développée correspondant au point A de la courbe.

Nous aurons $$x_1 = \frac{a}{3}\cos\omega(1 - \cos\omega), \qquad y = \frac{a}{3}\sin\omega(1 - \cos\omega),$$

et sous cette forme, cette développée représente la cardioïde dont l'équation serait, rapportée à l'axe polaire αx, $\rho_1 = \frac{a}{3}(1 - \cos\omega)$; ce qui démontre que M et P étant deux points correspondants de la cardioïde et de sa développée, oM et αP sont parallèles.



2° Supposons qu'un point matériel uniquement soumis à son poids soit astreint à décrire la cardioïde ; le théorème des forces vives donne l'égalité

$$\frac{V^2}{2} = gy + h_1$$

et puisque $V = \frac{ds}{dt} = 2a\cos\frac{\omega}{2}\frac{d\omega}{dt}$, on a

$$2a^2\cos^2\frac{\omega}{2}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = 2ag\cos^2\frac{\omega}{2}\sin\omega + h_1 \qquad \text{ou} \qquad \cos^2\frac{\omega}{2}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = \frac{g}{a}\cos^2\frac{\omega}{2}\sin\omega + h_1$$

ou enfin

$$\frac{\cos\frac{\omega}{2}\,d\omega}{\sqrt{\cos^2\frac{\omega}{2}\sin\omega + h}} = \sqrt{\frac{g}{a}}\,dt.$$

Posons $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \lambda$, nous aurons

$$\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}\right)\frac{d\omega}{2} = d\lambda, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\,\frac{2d\lambda}{1+\lambda^2}}{\sqrt{\frac{1}{1+\lambda^2}\,\frac{2\lambda}{1+\lambda^2} + h}} = \sqrt{\frac{g}{a}}\,dt$$

ou enfin

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{(1+\lambda^2)\left[\lambda + \frac{h}{2}(\lambda^2+1)^2\right]}} = \sqrt{\frac{g}{2a}}\,dt.$$

C'est la formule demandée.

Il ne faut pas songer, même dans des cas particuliers, à exprimer t au moyen de λ à l'aide des fonctions élémentaires.

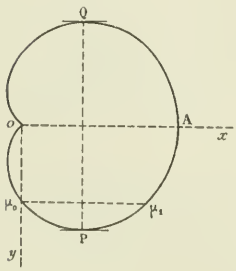
On peut cependant discuter le mouvement du point matériel sur la courbe (C) grâce à la discussion de la vitesse.

L'intégrale des forces vives donne en effet

$$V^2 = 2gy + 2h_1 = 2gy + V_0^2 - 2gy_0,$$

y_0 désignant l'ordonnée de la position initiale M_0, V_0 étant la vitesse initiale, ou

$$V^2 = 2g(y - y_1), \qquad \text{en posant} \qquad y_1 = y_0 - \frac{V_0^2}{2g}.$$



Nous ferons la convention de terminer l'étude du mouvement quand le point matériel aura atteint le rebroussement.

La vitesse s'annulera pour $y = y_1$.

Nous aurons donc à comparer y_1 aux ordonnées des points P et Q le plus bas et le plus haut sur la cardioïde. Les ordonnées sont égales et de signe contraire. Le point P est obtenu pour une valeur de ω donnée par

$$\frac{3\omega}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi, \qquad \text{d'où} \qquad \omega = \frac{\pi}{3}.$$

Donc son y est $$a\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3a\sqrt{3}}{4}.$$

Les cas à distinguer sont les suivants :

1° $|y_1| > \frac{3a\sqrt{3}}{4}$. Puisque y_1 est inférieur à y_0, ce premier cas ne se produit que quand y_1 est négatif, c'est-à-dire quand V_0^2 est suffisamment grand.

La vitesse ne s'annule jamais ; le mouvement conserve toujours le sens initial sur la cardioïde, et le point matériel, soit en remontant soit en descendant, atteint le rebroussement. Il l'atteint au bout d'un temps donné par l'intégrale définie

$$\sqrt{2g}\,t=\int_{(C)}\frac{ds}{\sqrt{y-y_1}}=\int_{(C)}\frac{\frac{ds}{dy}}{\sqrt{y-y_1}}\,dy.$$

Dans cette intégrale définie, la variable est celle qui définit la position du point sur la cardioïde et elle sera prise entre les valeurs qui donnent les points M_0 et o.

La fonction sous le signe $\int$ est discontinue quand $\frac{dy}{ds}$ est nul, c'est-à-dire pour les points P, Q et o.

Rappelons qu'en un point simple d'une courbe algébrique, à tangente parallèle à ox, $\frac{dy}{ds}$ est un infiniment petit d'ordre $\frac{1}{2}$ par rapport à dy ; (en un rebroussement ordinaire à tangente parallèle à ox, $\frac{dy}{ds}$ est un infiniment petit d'ordre $\frac{1}{3}$ par rapport à dy).

Donc les discontinuités de la fonction n'empêchent pas l'intégrale définie d'avoir une limite finie.

2° $|y_1| = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$. Il faut rejeter le cas où l'on aurait $y_1 = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$, car cela exigerait que l'on eût à la fois $y_0 = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$, $V_0 = 0$ et le point matériel resterait en équilibre en P.

Prenons donc $y_1 = -\frac{3a\sqrt{3}}{4}$

Le point matériel aura une vitesse nulle en arrivant au point Q, position d'équilibre instable.

Pour qu'il y arrive, il faut d'abord supposer que la vitesse initiale, qui ne peut être nulle dans ce cas, ait un sens tel que l'arc M_0Q ne contienne pas le rebroussement.

De plus, il faut voir si le point Q sera atteint au bout d'un temps fini.

Ce temps est donné par l'intégrale définie

$$\sqrt{2g}t=\int_{(C)}\frac{\frac{ds}{dy}}{\sqrt{y+\frac{3a\sqrt{3}}{4}}}\,dy.$$

L'intégrale est prise ici le long de l'arc M_0Q.

Pour le point Q, $\frac{ds}{dy}$ et $\frac{1}{\sqrt{y+\frac{3a\sqrt{3}}{4}}}$ sont infinis, et l'on sait, d'après ce qui précède, que

$$\frac{\frac{ds}{dy}}{\sqrt{y+\frac{3a\sqrt{3}}{4}}}\left(y+\frac{3a\sqrt{3}}{4}\right)$$ a une limite finie quand y tend vers $-\frac{3a\sqrt{3}}{4}$. L'intégrale définie croît donc indéfiniment.

Le point matériel décrira l'arc M_0Q en tendant vers le point Q (sa vitesse tendant vers zéro) sans jamais l'atteindre.

3° $|y_1| < \frac{3a\sqrt{3}}{4}$. Le mouvement du point matériel change de sens sur la courbe quand un point H d'ordonnée y_1 est atteint. Ce point H est atteint au bout d'un temps donné par l'intégrale

$$\sqrt{2g}\ t = \int_{(c)}^{\bullet} \frac{\frac{ds}{dy}}{\sqrt{y - y_1}}\, dy,$$

prise le long de l'arc M_0H, qu'on suppose ne pas contenir le rebroussement.

Cette intégrale a une valeur finie parce que $\frac{ds}{dy}$ est fini pour le point H.

Plaçons-nous maintenant dans le cas particulier où $V_0 = 0$.

L'intégrale des forces vives s'écrit alors

$$V^2 = 2g(y - y_0).$$

Si M_0 est au-dessus de ox, le point matériel arrivera au rebroussement. Il y arrivera au bout d'un temps fini parce qu'au voisinage du rebroussement $\frac{dy}{ds}$ est un infiniment petit d'ordre $\frac{1}{3}$ pa rapport à dy.

Si M_0 est au-dessous de ox, le point matériel remontera jusqu'au point M_1 de même cote et oscillera indéfiniment entre M_0 et M_1.

Enfin, plaçons M_0 en A. Le point remontera jusqu'au rebroussement. Le temps mis pour y arriver avec une vitesse nulle est donné par l'intégrale

$$\sqrt{2g}\ t = \int_{(c)}^{\bullet} \frac{\frac{ds}{dy}}{\sqrt{y}}\, dy,$$

prise le long de l'arc APo ; $\frac{dy}{ds}$ est un infiniment petit d'ordre $\frac{1}{3}$ par rapport à dy ; donc $\sqrt{y}\frac{dy}{ds}$ est un infiniment petit d'ordre $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$; donc l'intégrale définie a une valeur finie. Le point matériel atteindra donc le rebroussement, sans vitesse, au bout d'un temps fini.

Application numérique. — Si le point matériel est abandonné au point μ_0 d'angle polaire $\frac{\pi}{2}$, l'autre extrémité de sa course est le point μ_1 de même cote.

Chercher l'angle polaire du point μ_1 revient à résoudre l'équation

$$a(1 + \cos\omega)\sin\omega = a, \qquad \text{ou} \qquad 4\sin\frac{\omega}{2}\cos^3\frac{\omega}{2} = 1.$$

Elle admet pour racines en $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ et une autre inférieure, celle que nous cherchons.

Le tâtonnement par les tables va nous donner l'angle polaire cherché à 1 minute près.

Calculons $\log 4 + \log\sin\frac{\omega}{2} + 3\log\cos\frac{\omega}{2}$.

Pour 10^{gr}, cette somme est	Pour 20^{gr}, elle est
0,60206	0,60206
$\bar{1}$,19433	$\bar{1}$,48998
$\bar{1}$,98386	$\bar{1}$,93463
$\bar{1}$,78025	0,02667

Donc $\frac{\omega}{2}$ est compris entre 10^{gr} et 20^{gr}, plus voisin de 20 que de 10.

Pour $18^{gr},25$, on trouve

$$\begin{array}{r} 0,60206 \\ \bar{1},45142 \\ \bar{1},94570 \\ \hline \bar{1},99918 \end{array}$$

Pour chacune des minutes suivantes, il faut ajouter 23 au logarithme du sinus et retrancher 2 à celui du cosinus. Donc en tout ajouter 17. Donc

$$18^{gr},29' \qquad \text{donne} \qquad \bar{1},99986$$

et

$$18^{gr}30', \qquad \bar{0},00003.$$

Donc $\frac{\omega}{2}$ est plus voisin de $18^{gr},30$ que de $18^{gr},29$.

Donc ω à 1 minute près par défaut est $36^{gr},59'$.

La valeur en radians est donnée par

$$x = \frac{36,59 \times 3,14}{200} = 0,574463.$$

L'erreur commise est

$$\frac{\left(36,59 + \frac{1}{100}\right)\left(3,14 + \frac{1}{100}\right)}{200} - \frac{36,59 \times 3,14}{200} \qquad \text{ou} \qquad \frac{40}{100.200} = \frac{2}{1000}.$$

Donc, on peut affirmer que la valeur à $\frac{1}{100}$ près, par défaut, en radians est 0,57.

4° Calculons la réaction normale R de la courbe sur le point matériel. Soit ρ le rayon de courbure. On a

$$\frac{mV^2}{\rho} = R + F_n.$$

F_n est la projection du poids sur la normale dirigée vers le centre de courbure, c'est-à-dire

$$-mg \sin \frac{3\omega}{2}.$$

Donc

$$m \frac{2gy + 2h_1}{\frac{4a}{3} \cos \frac{\omega}{2}} = R - mg \sin \frac{3\omega}{2}$$

ou

$$R = \frac{4amg\left[\sin \omega \cos^2 \frac{\omega}{2} + \frac{1}{3} \cos \frac{\omega}{2} \sin \frac{3\omega}{2}\right] + 2mh_1}{\frac{4a}{3} \cos \frac{\omega}{2}} = \frac{4amg\left[3 \sin \omega \cos^2 \frac{\omega}{2} + \cos \frac{\omega}{2} \sin \frac{3\omega}{2}\right] + 6mh_1}{4a \cos \frac{\omega}{2}}.$$

$$R = \frac{4amg\left[4 \sin \omega \cos^2 \frac{\omega}{2} + \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2} \cos \omega\right] + 6mh_1}{4a \cos \frac{\omega}{2}} = \frac{2amg[4 \sin \omega (1 + \cos \omega) + \sin \omega \cos \omega] + 6mh_1}{4a \cos \frac{\omega}{2}}.$$

$$R = \frac{mg}{2 \cos \frac{\omega}{2}} [5 \sin \omega \cos \omega + 4 \sin \omega + k].$$

k désignant une constante que nous pourrions immédiatement écrire en fonction de la constante des forces vives.

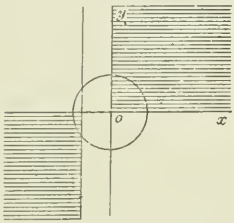
Les changements de sens de la réaction s'obtiendront par la remarque que le dénominateur change de signe quand ω passe par la valeur π et en résolvant l'équation

$$5 \sin \omega \cos \omega + 4 \sin \omega + k = 0.$$

Il suffit de supposer k positif, car si on change ω en $-\omega$ et k en $-k$, le premier membre de l'équation ne change pas. Posons $\cos \omega = x$, $\sin \omega = y$. Nous serons ramenés à l'intersection des deux courbes

$$(1) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 5xy + 4y + k = 0. \end{cases}$$

La seconde est une hyperbole d'asymptotes $y = 0$, $5x + 4 = 0$ et située dans l'angle des asymptotes ne contenant pas de hachures. On voit aussi graphiquement qu'il existe deux nombres k' et k'' positifs, tels que si $k < k'$, les deux courbes ont quatre points communs réels, deux seulement si k est compris entre k' et k'', aucun si k est supérieur à k''.



Si l'on a $k = k'$, il y a contact en un point et deux autres points réels et distincts.

Si $k = k''$, il y a contact en un point qui est le seul point de rencontre réel.

D'ailleurs, il est possible d'opérer d'une manière analytique plus précise.

Eliminons y entre les équations (1) ; nous aurons l'équation aux x des points de rencontre des deux courbes

$$x^2 + \frac{k^2}{(5x+4)^2} - 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad (x^2 - 1)(5x+4)^2 + k^2 = 0.$$

La dérivée est

$$2x(5x+4)^2 + 10(x^2-1)(5x+4) = 0 \qquad \text{ou} \qquad (5x+4)[5(x^2-1) + x(5x+4)] = 0$$

ou enfin

$$(5x+4)[10x^2 + 4x - 5] = 0.$$

Les racines de la dérivée sont donc, rangées par ordre de grandeur croissante,

$$-\frac{2+3\sqrt{6}}{10}, \qquad -\frac{4}{5}, \qquad \frac{3\sqrt{6}-2}{10}.$$

D'autre part, des substitutions faciles montrent que les résultats de substitution des racines de l'équation $10x^2 + 4x - 5 = 0$ dans le polynome $(x^2-1)(5x+4)^2$ sont les mêmes que dans le polynome du premier degré

$$-\frac{27}{20}[16x + 15].$$

La suite de Rolle est donc, avec les résultats de substitution, pour l'équation du quatrième degré en x

$-\infty$	$-\frac{2+3\sqrt{6}}{10}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3\sqrt{6}-2}{10}$	$+\infty$
$+$	$k^2 - \frac{27}{100}(59 - 24\sqrt{6})$	k^2	$k^2 - \frac{27}{100}(59 + 24\sqrt{6})$	$+$

On voit donc que

$$k'^2 = \frac{27}{100}(59 - 24\sqrt{6}), \qquad k''^2 = \frac{27}{100}(59 + 24\sqrt{6}).$$

Tout ce qui précède suffit pour montrer que dans chaque cas particulier il sera aisé de déterminer les changements de sens de la réaction. Il resterait à faire un tableau de ces changements de sens pour tous les cas rencontrés dans la discussion du mouvement ; la seule difficulté serait de chercher les valeurs annulant la réaction et comprises réellement dans la partie de la courbe décrite par le point matériel.

Bonne solution : M. G. Foucry, à Roanne.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

Remarque relative à l'Épure donnée en 1906 au concours d'admission à l'École normale supérieure et publiée dans le n° de Janvier 1907.

Nous devons faire observer que la projection horizontale de l'intersection du tore et de l'hyperboloïde ne peut présenter en a (p. 91) un point anguleux. Comme nous l'écrit M. Girod, s'il en était ainsi, les deux tangentes en a aux arcs ar_1 et ar_2 étant tangentes simples, la courbe serait réelle sur le prolongement de ces arcs à gauche du plan de profil de A, et comme la projection verticale est déjà réelle à gauche de ce plan, les deux surfaces auraient des points communs réels dans cette région, ce qui n'est pas. Mais on peut voir que les deux arcs ar_1 et ar_2 forment en a un rebroussement dont la tangente est ao, parce que la tangente à la projection verticale commune de ces arcs est précisément tangente à la méridienne au point a'. On peut encore considérer suivant la méthode indiquée par M. Caron, le cercle de Meusnier relatif aux sections planes menées par la droite de bout du point A et qui est ici la circonférence de diamètre $o'a'$. Le rayon de courbure de chaque section est la corde interceptée dans cette circonférence par la trace verticale du plan sécant qui pivote autour de a'. Quand cette trace devient la tangente en a', cette corde étant nulle, le rayon de courbure correspondant est nul ; il y a donc un rebroussement.

Ajoutons encore, à l'égard de la projection horizontale de la courbe, que, les deux points doubles se confondant avec les projections des deux génératrices verticales de l'hyperboloïde, on pouvait déterminer exactement leur position de part et d'autre du point o à une distance égale au rayon du cercle de gorge.

EXAMENS DE 1906 (*Suite.*)

CERTIFICAT D'ÉTUDES SUPÉRIEURES (*Clermont-Ferrand, juillet 1906.*)

Mathématiques générales.

Epreuves théoriques.

I. — **1576**. Trouver l'aire engendrée par un arc de la chaînette $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ en tournant : 1° autour de l'axe des x ; 2° autour de l'axe des y.

II. — **1577**. Sur la conique $y = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, on prend deux points N, N′ infiniment voisins de l'origine et ayant des abscisses égales et de signes contraires. Montrer que la différence entre l'arc NN′ et sa projection conique sur l'axe des x, le centre projectif ayant pour coordonnées $x = 0$ et $y = 3R$, R rayon du cercle osculateur en M, est un infiniment petit du 5e ordre.

III. — **1578**. Un point pesant est assujetti à rester sur une courbe placée dans un plan vertical. Déterminer cette courbe de telle sorte que la composante verticale de la vitesse du point mobile soit constante.

Épreuves pratiques

I. — **1579**. Un arc de cercle a une longueur de 3 décimètres ; sa corde une longueur de 2 décimètres, 5 ; trouver le rayon du cercle à 1^{mm} près.

II. — **1580**. Un point pesant est assujetti à rester sur le côté extérieur d'un cercle vertical de rayon R. On le place au point le plus haut avec une vitesse initiale v_0. Trouver la position du point où le mobile quitte le cercle, avec les données suivantes :

$$g = 981, \qquad R = 82, \qquad v_0 = 90.$$

(Unités C. G. S.)

QUESTIONS PROPOSÉES

1581. — On considère deux faisceaux d'hyperboles équilatères H et H′, les hyperboles de chacun des faisceaux ayant les mêmes asymptotes. On considère en outre une droite Δ qui rencontre une hyperbole H en deux points M et N et une hyperbole H′ en deux points M′ et N′, telle que les deux segments MN et M′N′ aient le même milieu ω. Prouver que l'enveloppe des droites Δ est une hypocycloïde à trois rebroussements T ayant pour cercle orthoptique le cercle Ω, lieu du point ω.

Appliquer ce résultat aux cordes communes aux hyperboles H et H′ et aux tangentes communes à celles qui se touchent en un point.

A. Sainte-Laguë, Élève de l'École Normale supérieure.

1582. — Axes rectangulaires ox, oy, oz.

Un point matériel de masse m est attiré par un centre fixe P, situé sur ox, proportionnellement à la distance à ce centre, la force à la distance r ayant pour intensité mk^2r. On lance le mobile de l'origine avec une vitesse initiale donnée en grandeur v_0.

1° Le vecteur vitesse initiale ov_0 étant dans le plan zox et faisant avec ox un angle α, former l'équation de la trajectoire du mobile ; calculer la longueur du diamètre conjugué de ox dans cette trajectoire.

2° L'angle α variant, trouver le lieu des points que le mobile atteint avec une vitesse passant par un point A de ox (en direction).

3° L'angle α variant, trouver le lieu des foyers des trajectoires.

4° Le vecteur vitesse initiale, ov_0, se déplaçant dans un plan H mené par oy, former l'équation de la surface S engendrée par les diverses trajectoires du mobile.

5° Enveloppe des surfaces S quand le plan H tourne autour de oy.

J. Demeunynck.

DEUXIÈME PARTIE

ANALYSE

1542. — *Déterminer sur une parabole de sommet* S *et de foyer* F *un point* M *tel que l'arc de courbe* SM *soit dans un rapport donné* k *avec le rayon vecteur* FM. *Discuter suivant les valeurs de* k.

Soit $x^2 - 2py = 0$, ou $y = \frac{x^2}{2p}$ l'équation de la parabole ; nous pouvons supposer que le point cherché M a des coordonnées positives. Soit s la longueur de l'arc SM ; nous avons

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}, \qquad \text{ou} \qquad ds = \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\,dx.$$

Posons $\frac{x}{p} = \operatorname{sh} t$, t étant positif, et remarquons que lorsque t varie de 0 à $+\infty$, x varie aussi de 0 à $+\infty$; par suite, le point M décrit l'arc infini de la parabole à partir du sommet S dans l'angle positif des coordonnées. Nous avons $dx = p \operatorname{ch} t\, dt$, et par suite

$$ds = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t}\, p \operatorname{ch} t\, dt = p \operatorname{ch}^2 t\, dt,$$

ou

$$ds = \frac{p}{2}(1 + \operatorname{ch} 2t)\, dt,$$

et, en intégrant,

$$s = \frac{p}{2}\left(t + \frac{\operatorname{sh} 2t}{2}\right).$$

Il n'y a pas de constante arbitraire, puisque pour $t = 0$, on doit avoir $s = 0$.

D'autre part $\quad MF = y + \frac{p}{2} = \frac{p}{2}(1 + \operatorname{sh}^2 t) = \frac{p}{2}\operatorname{ch}^2 t = \frac{p}{2} \cdot \frac{1 + \operatorname{ch} 2t}{2}.$

Le point M sera donc déterminé par l'équation

$$\frac{p}{2}\left(t + \frac{\operatorname{sh} 2t}{2}\right) = k\frac{p}{2} \cdot \frac{1 + \operatorname{ch} 2t}{2},$$

qui s'écrit, en introduisant les exponentielles,

$$f(t) = (k - 1)e^{2t} + (k + 1)e^{-2t} - 4t + 2k = 0.$$

Il s'agit de déterminer le nombre de racines positives de cette équation.

Appliquons le théorème de Rolle. L'équation dérivée est

$$\frac{1}{2}f'(t) = (k - 1)e^{2t} - (k + 1)e^{-2t} - 2 = 0,$$

ou

$$(k - 1)e^{4t} - 2e^{2t} - (k + 1) = 0.$$

Nous en tirons $e^{2t} = -1$, $e^{2t} = \frac{k + 1}{k - 1}$.

L'équation $e^{2t} = -1$ n'est vérifiée par aucune valeur réelle de t ; et l'équation $e^{2t} = \frac{k + 1}{k - 1}$ admet seulement une racine si $k > 1$.

Premier Cas. $k < 1$. La dérivée n'a pas de racines. Nous avons

$$f(0) = 4k > 0, \qquad f(+\infty) < 0;$$

l'équation admet une racine et une seule. Il existe un seul point M répondant à la question.

Deuxième Cas. $k > 1$. La dérivée a une racine : $t_0 = \frac{1}{2} \operatorname{L} \frac{k + 1}{k - 1}$.

Nous avons

$$f(0) > 0, \qquad f(t_0) = 4(k - t_0), \qquad f(+\infty) > 0.$$

Donc si $k - t_0 < 0$, ou $k < \frac{1}{2} \operatorname{L} \frac{k + 1}{k - 1}$, il y a deux solutions. Si $k > \frac{1}{2} \operatorname{L} \frac{k + 1}{k - 1}$, il n'y a aucune solution.

Si nous considérons la fonction $\varphi(k) = k - \frac{1}{2} \operatorname{L} \frac{k + 1}{k - 1}$, sa dérivée est $\varphi'(k) = \frac{k^2}{k^2 - 1}$; elle est positive pour $k > 1$.

Donc lorsque k croît de 1 à $+\infty$, $\varphi(k)$ croît de $-\infty$ à $+\infty$; par suite cette fonction s'annule pour une valeur k_1 supérieure à 1.

On voit donc que si $k < k_1$, il y a deux solutions, et si $k > k_1$, il n'y a pas de solution

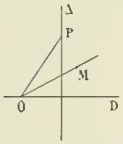
G. PÉLISSIER, à Toulouse.

Bonne solution par M. André Cotty, lycée de Dijon.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1530. — *On considère deux droites rectangulaires* D *et* Δ ; *sur la droite* D *un point fixe* O *et sur la droite* Δ *un point variable* P. *Sur la bissectrice de l'angle* DOP, *on prend une longueur* OM, *telle que* $\overline{OM}^2 = k.OP$, *k étant une longueur fixe. Trouver le lieu du point* M.

Prenons pour axe des x la droite OD et pour axe des y une perpendiculaire menée par le point O.



L'équation de la droite Δ est $x = a$; celle de OM, $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}$, en appelant α et β les coordonnées du point M ; celle de OP est

$$\frac{y}{x} = \frac{2\frac{\beta}{\alpha}}{1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}}, \qquad y = \frac{2\alpha\beta x}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

Nous voyons donc que

$$\overline{OP}^2 = a^2\left[1 + \frac{4\alpha^2\beta^2}{(\alpha^2 - \beta^2)^2}\right]; \qquad \text{par conséquent} \qquad OP = \pm a\,\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

L'équation du lieu est donc

$$\alpha^2 + \beta^2 = \pm ak\,\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2};$$

finalement

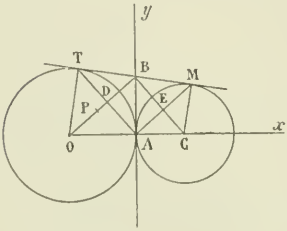
$$\alpha^2 - \beta^2 = \pm ak.$$

Il se compose de deux hyperboles équilatères, conjuguées l'une de l'autre, et rapportées à leurs axes. L'une d'elles s'obtient en considérant la bissectrice intérieure de l'angle POD et en suivant ses variations, tout en tenant compte de ce que OP doit être regardé comme changeant de signe en devenant ∞. L'autre provient d'une façon analogue de la bissectrice extérieure.

Bonnes solutions : MM. G. Cotty ; G. Foucry, à Roanne ; Moret ; E.-N. Barisien ; J. Soudet, à Rouen ; Gaunard, à Reims ; Fischmann, à Bruxelles ; R. de Faria ; Lamotte, lycée Janson ; Palansi, lycée Henri IV ; R. Manen, à Albi ; A. Cotty, à Dijon ; G. Pélissier, à Toulouse ; H. Cuir ; J. Yernaux, à Mons ; Dnamra ; Jean Maltos ; Regnauld, lycée Carnot ; Brignon, au Harcholet ; P. Sarközy, à Pannonhalma (Hongrie).

1531. — *Soient* O *un cercle fixe,* A *un de ses points. On considère un cercle* C *tangent à* O *en* A *et on mène la tangente commune extérieure aux deux cercles,* TM. *Trouver géométriquement le lieu du point* M *lorsque le cercle* C *varie.*

L'angle TAM est évidemment droit, puisque la somme des angles OAD et CAE, qui sont respectivement complémentaires des angles DOA et ECA, vaut un droit. Il en résulte que OB est parallèle à AM et CB parallèle à TA ; d'autre part, le point B est sur la tangente commune aux deux cercles au point A ; par conséquent, la droite BC, perpendiculaire à OB au point B, enveloppe une parabole ayant pour foyer le point O et pour tangente au sommet AB. Le lieu du point E est donc la podaire de cette parabole par rapport au point A ; c'est une cissoïde droite ayant le point A pour point de rebroussement et AC pour tangente en ce point. Le lieu du point M est une cissoïde homothétique par rapport au point A et dans le rapport 2.



Ceci peut se voir directement sur la figure. En effet, le lieu du point D est un cercle décrit sur OA comme diamètre ; si donc on porte OP équipollent à DB, le lieu du point P est une cissoïde de Dioclès. Comme AE est équipollent à DB, le lieu de E est cette cissoïde à laquelle on a fait subir la translation OA ; etc.

Solution analytique. — Prenons pour axe des x la ligne des centres Ax et pour axe des y l'axe radical commun à tous les cercles de l'énoncé, Ay. L'équation du cercle OA est

$$x^2 + y^2 + 2ax = 0,$$

en posant $OA = -a$, et celle du cercle mobile est $x^2 + y^2 - 2\alpha x = 0$, en posant $AC = \alpha$.

Soient x et y les coordonnées du point M ; la tangente en ce point au cercle C a pour équation

$$X(x - \alpha) + Yy - \alpha x = 0,$$

et, en écrivant qu'elle est tangente au cercle O, nous aurons

$$a^2[(x - \alpha)^2 + y^2] - [a(x - \alpha) + \alpha x]^2 = 0,$$

ou

$$a^2y^2 - \alpha^2x^2 - 2a\alpha x(x - \alpha) = 0.$$

Mais il vaut mieux conserver la première équation : l'élimination de α sera plus commode. En effet, l'équation du cercle C nous donne

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = \alpha^2,$$

et, en remplaçant cette quantité par sa valeur dans l'équation précédente, nous avons

$$a^2\alpha^2 - [a(x - \alpha) + \alpha x]^2 = 0.$$

Cette équation se décompose en deux :

$$a\alpha + a(x - \alpha) + \alpha x = 0 \qquad \text{et} \qquad a\alpha - a(x - \alpha) - \alpha x = 0.$$

La première donne $x = 0$ et correspond au point A ; elle ne convient pas pour la question en vue.

La seconde donne

$$\alpha = \frac{ax}{2a - x},$$

et, en portant cette valeur dans l'équation du cercle C, nous avons de suite l'équation du lieu

$$(x^2 + y^2)(2a - x) = 2ax^2,$$

ou, plus simplement,

$$x(x^2 + y^2) - 2ay^2 = 0.$$

Cette équation représente bien la cissoïde que nous avons indiquée.

Bonnes solutions : MM. Palansi, lycée Henri IV ; Jean Maltos ; Gaunard, lycée de Reims ; Ch. Brignon ; G. Foucry ; E.-N. Barisien ; Grand ; G. Cotty ; Lamotte ; J. Yernaux ; R. Manen ; Traus-Degové, Dnamba ; G. Pelissier ; J. Soudet ; J.-D. Dufaut, à Poitiers ; Amblard, Régnauld, lycée Carnot ; H. Janois, à Nantes.

Bonne solution par l'inversion de M. L. Sire.

PHYSIQUE

1496. — *Un pendule pesant, composé d'une boule fixée à l'extrémité inférieure d'une tige, oscille d'abord dans l'air avec un amortissement négligeable. On trouve une durée d'oscillation simple égale à* $0^s,582$. *On fait ensuite plonger dans un liquide légèrement visqueux une lame mince fixée au-dessous de la boule, de manière à introduire une résistance proportionnelle à la vitesse sans changer sensiblement le poids apparent du pendule. Il se produit alors un amortissement considérable et l'on trouve entre deux élongations consécutives un rapport sensiblement constant et égal à* 1,29. *Chercher de combien se trouve modifiée la durée d'une oscillation.*

Dans le premier cas, si l'on désigne par x l'élongation de la boule à l'époque t, l'équation du mouvement est de la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda x,$$

d'où l'on déduit, en comptant le temps à partir du passage à la position d'équilibre et désignant par a l'élongation maximum,

$$x = a \sin \sqrt{\lambda}\, t.$$

La durée d'une oscillation simple est

(1) $$T = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}.$$

Passons au cas où il y a une résistance proportionnelle à la vitesse. Si ρ désigne le facteur de proportionnalité, l'équation différentielle du mouvement est maintenant

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\rho\frac{dx}{dt} - \lambda x.$$

Intégrons-la : les racines de la caractéristique sont imaginaires puisqu'on sait *a priori* que le mouvement est périodique et l'on trouve, en posant $\frac{1}{2}\rho = \varepsilon$,

$$x = be^{-\varepsilon t}\sin\sqrt{\lambda - \varepsilon^2}\, t.$$

La nouvelle durée d'oscillation est

(2) $$T' = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda - \varepsilon^2}}$$

et le rapport de deux élongations successives

(3) $$m = e^{\varepsilon T'}.$$

T et m sont donnés. L'élimination de λ et de ε entre les équations (1), (2) et (3) donne, si l'on pose log. nép. $m = \mu$ (décrément logarithmique),

$$T' = T\sqrt{1 + \frac{\mu^2}{\pi^2}}.$$

En faisant le calcul, on trouve

$$\mu = 0{,}2546 \qquad \text{et} \qquad T' = 0^s{,}584.$$

Cette durée d'oscillation diffère très peu de la durée d'oscillation $0^s{,}582$ du premier cas, malgré un amortissement considérable.

On peut aussi calculer λ et ρ; ce dernier est égal à 0,87.

G. COTTY.

Nous avons reçu également de M. M. Laurence une solution exacte dans laquelle la masse M et le moment d'inertie I du pendule sont mis en évidence; l'équation différentielle du mouvement prend alors la forme suivante, θ désignant l'angle d'écart,

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + K\frac{d\theta}{dt} + Mga\theta = 0.$$

Dans les équations (1), (2), (3), λ représente $\frac{Mga}{I}$ et ρ le rapport $\frac{K}{I}$.

ÉCOLE CENTRALE (1906)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Suite.*)

Géométrie (M. Arnal.)

3739. — Déterminer les points d'une droite d'où on voit un segment AB extérieur à la droite sous un angle donné ; sous le plus grand angle possible.

3740. — On donne une droite et une circonférence ; déterminer les points de la droite d'où on voit la circonférence sous un angle donné ; sous l'angle maximum.

3741. — Par le point A d'intersection de deux cercles O et O', mener une sécante ABC, telle que AB = AC.

3742. — Déterminer sur la droite XY le point C de façon que le chemin ACB soit minimum.

3743. — Chemin minimum pour aller d'un point A à un point B après avoir rencontré deux droites concourantes Ox, Oy.

3744. — Joindre un point M au point de rencontre inaccessible de deux droites D et D'.

3745. — Deux triangles qui ont leurs côtés respectivement perpendiculaires sont semblables.

3746. — Construire deux longueurs connaissant leur différence et leur produit.

3747. — Tracer une circonférence de rayon donné coupant orthogonalement deux circonférences données.

3748. — Énoncer le théorème de Ménélaüs et sa réciproque.

3749. — Énoncer le théorème de Céva et le démontrer. Application aux bissectrices d'un triangle, aux médianes, aux hauteurs.

3750. — Rapport anharmonique de quatre points. Différentes manières d'écrire ce rapport ; le rapport anharmonique λ peut-il prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$?

3751. — Le rapport anharmonique de quatre points est projectif.

3752. — On a quatre points A, B, C, D en ligne droite. On désigne par λ le rapport anharmonique $\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$; trouver deux longueurs dont le rapport soit égal à λ.

3753. — Expression du côté de l'octogone régulier convexe et de l'octogone régulier étoilé.

3754. — Côté du décagone régulier convexe et étoilé ; du pentagone régulier convexe et étoilé.

3755. — On considère deux droites AB, AC, mener par un point O une sécante OBC, de façon que le triangle ABC ait un périmètre donné.

3756. — Soient a et b les côtés de deux octogones réguliers. Déterminer le côté de l'octogone régulier dont l'aire est la somme des aires des deux autres.

3757. — Inscrire dans un triangle le rectangle maximum reposant par un de ses côtés sur la base du triangle.

3758. — Transformer un polygone donné en un triangle équivalent.

3759. — Mener une parallèle à la base d'un triangle de façon à le diviser en deux surfaces équivalentes.

3760. — On donne deux verticales AB, CD, limitées en A et C au plan vertical P. Trouver sur la droite AX menée du point A dans le plan P un point d'où l'on voit les segments AB, CD sous le même angle. Même problème en remplaçant la droite AX par une droite Δ quelconque du plan P.

3761. — Démontrer que par un point on peut mener un plan perpendiculaire à une droite et un seul.

3762. — Mener par un point une droite orthogonale à deux droites données.

3763. — On donne dans l'espace une droite XY et deux points quelconques A et B ; trouver sur XY un point C tel que le chemin ACB soit minimum.

3764. — Démontrer que l'angle d'une droite d'un plan avec sa projection sur un autre plan est maximum quand la droite est perpendiculaire à l'intersection des deux plans.

3765. — Démontrer que les droites qui joignent les sommets d'un tétraèdre aux points de rencontre des médianes des faces opposées sont concourantes.

3766. — On donne un plan, un point O dans ce plan et un point A extérieur. De ce point on abaisse la perpendiculaire sur une droite variable menée par le point O dans ce plan. Lieu du pied de cette perpendiculaire.

3767. — Théorème des trois perpendiculaires.

3768. — Construire un trièdre connaissant les trois dièdres.

3769. — Étant donnés deux points A et B et un plan P, trouver dans ce plan un point C, tel que le triangle ABC soit équilatéral.

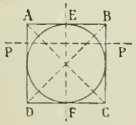
3770. — On donne deux droites dans l'espace et deux segments de longueur constante mn, pq sur ces deux droites. Démontrer que le tétraèdre $mnpq$ a un volume constant.

3771. — Le volume d'un tétraèdre est égal au tiers du produit d'une de ses arêtes SA par la surface limitée par la projection du tétraèdre sur un plan perpendiculaire à l'arête SA (se servir de l'expression du volume du tronc de prisme triangulaire).

3772. — A quelle distance du sommet d'une pyramide triangulaire faut-il mener un plan parallèle à la base pour partager la pyramide en deux volumes équivalents ?

3773. — On donne un cône de révolution. — Déterminer le rayon x du cylindre inscrit dans le cône, de façon que la surface latérale de la partie supérieure SAB soit équivalente à la surface de la couronne CE, FD déterminée par le cylindre sur la base du cône.

3774. — On donne une circonférence à laquelle on circonscrit un carré ABCD ; on joint AC, BD, EF et on fait tourner la figure autour de EF. Démontrer que la section par un plan P perpendiculaire à EF dans la sphère est équivalente à la différence des sections par ce même plan dans le cylindre engendré par BC et le cône engendré par BD.



3775. — On donne un cône quelconque par son sommet et sa base. A quelle distance du sommet faut-il mener un plan parallèle à la base pour que l'aire de la section soit la moitié de l'aire de la base ?

3776. — Volume du tronc de cône. — Si la hauteur du tronc est égale à $4(R - r)$, le volume est égal à la différence des volumes de deux sphères de rayons R et r.

3777. — Diviser une sphère par des plans parallèles en quatre parties dont les surfaces soient équivalentes.

3778. — Suite des théorèmes qui conduisent au volume de la sphère. — Volume d'un polyèdre circonscrit à une sphère.

3779. — Volume engendré par un segment de cercle AMB, en tournant autour d'un diamètre parallèle à la corde AB du segment.

3780. — Construire une parabole connaissant le foyer et deux tangentes.

Géométrie descriptive (M. Arnal.)

3781. — Une droite étant donnée par ses projections, trouver le point pour lequel le rapport de la cote à l'éloignement est égal à $\frac{m}{n}$.

3782. — Reconnaitre si deux droites dont l'une est de profil se rencontrent.

3783. — Trouver le point de rencontre de deux droites situées dans un même plan de profil par la méthode des projections obliques.

3784. — On donne deux droites dont les projections de même nom ne se coupent pas dans les limites de l'épure. — Reconnaitre si ces deux droites sont dans un même plan.

3785. — Intersection de deux plans donnés l'un par ses traces, l'autre par la ligne de terre et un point.

3786. — Mener par un point une droite s'appuyant sur deux droites données, en projections cotées.

3787. — Mener par un point donné une droite rencontrant la ligne de terre et une droite de profil.

3788. — Droite parallèle à une droite donnée s'appuyant sur deux droites données, en géométrie cotée.

3789. — Par un point d'un plan donné, mener dans ce plan une parallèle à un plan donné.

3790. — Déterminer un quadrilatère plan dont on connait trois sommets par leurs deux projections, ainsi que la projection horizontale du quatrième sommet.

3791. — Par un point, mener le plan perpendiculaire à une droite. Même problème en géométrie cotée.

3792. — Par un point donné, mener un plan perpendiculaire à deux autres.

3793. — Déterminer le point de la ligne de terre équidistant des traces d'une droite ab, $a'b'$.

3794. — Mener dans un plan, par son point de rencontre avec une droite D, une droite perpendiculaire à la droite D.

3795. — Mener un plan de pente donnée par une droite donnée.

3796. — Réduire un angle à l'horizon.

3797. — Déterminer l'angle x de deux droites de l'espace SA, SB connaissant la projection horizontale ω de cet angle et les angles α et β des droites SA, SB avec la verticale.

3798. — Par un point donné, mener un plan qui coupe trois droites dunnées sous le même angle.

3799. — Étant donnés une droite et un point extérieur, trouver sur la droite un point dont la distance au point donné soit égale à une longueur donnée.

3800. — Distance d'un point donné à un plan donné par sa ligne de pente.

3801. — Distance de deux plans parallèles en géométrie cotée.

3802. — Mener d'un point m, m' la perpendiculaire à une droite de profil. Distance du point à la droite.

3803. — Distance d'un point à une droite en géométrie cotée.

3804. — Normale commune à deux droites en géométrie cotée.

3805. — Chercher une verticale d'éloignement donné, dont la plus courte distance à une droite est donnée.

3806. — Étant données les projections horizontales de deux droites et les deux projections de leur perpendiculaire commune, trouver leurs projections verticales.

3807. — Angle d'une droite avec un plan en géométrie cotée.

3808. — Angle d'un plan $P\alpha Q'$ donné par ses traces avec la ligne de terre. Trouver dans ce plan une droite αD faisant un angle donné avec la ligne de terre.

3809. — On donne un axe vertical, un plan et un point non situé dans ce plan. Faire tourner le point autour de l'axe de manière à l'amener dans le plan donné.

3810. — Amener un point donné de cote 2 dans un plan dont on donne l'échelle de pente, par rotation autour d'une verticale donnée.

3811. — On donne dans le plan vertical un segment AB, dans le plan horizontal un segment CD de même grandeur. Déterminer un axe de rotation de manière à amener C en A, et D en B.

3812. — Soit un plan $P\alpha Q'$ et trois points (a, a'), (b, b'), (c, c'), hors du plan. Trouver le point du plan $P\alpha Q'$ à égale distance des trois points donnés.

3813. — Soit un plan donné par ses traces ; un point dans ce plan est centre d'un cercle de rayon donné situé dans le plan. Projections de ce cercle.

3814. — Trouver le sommet s, s' d'un trièdre trirectangle dont les arêtes passent par trois points a, b, c du plan horizontal.

3815. — Construire les projections d'un trièdre trirectangle, connaissant les deux projections de son sommet, les deux projections d'une arête et la projection horizontale d'une deuxième arête.

3816. — Construire un tétraèdre dont on connaît la base ABC dans le plan horizontal et dont on donne le dièdre AB, ainsi que les arêtes SA et SB.

3817. — On considère un plan $P\alpha Q'$ sur lequel repose un tétraèdre régulier. On en donne la base rabattue sur le plan horizontal ; relever cette base et déterminer le quatrième sommet.

3818. — Déterminer un cube connaissant les deux projections ab, $a'b'$ d'une arête et la direction de la projection horizontale ac d'une autre arête contiguë à la première.

3819. — Construire un parallélépipède rectangle dont on donne les projections sa, $s'a'$ d'une arête, la projection horizontale sb d'une autre arête et la longueur de l'arête SC.

3820. — Déterminer un cube dont une diagonale est verticale et dont quatre arêtes sont de front. On se donne la longueur de la diagonale.

3821. — Construire un dodécaèdre régulier reposant par sa base sur le plan horizontal.

3822. — Intersection d'une droite donnée et d'une pyramide triangulaire de sommet $s(6)$ et dont la base est le triangle $a(1)$ $b(1)$ $c(3)$.

3823. — Intersection d'un prisme quadrangulaire donné par sa base dans le plan horizontal et la direction de ses génératrices, avec le plan bissecteur du premier dièdre.

3824 — Intersection d'une pyramide triangulaire reposant par sa base sur le plan horizontal avec un prisme dont les génératrices sont de front et dont la base est un quadrilatère donné dans le plan horizontal. Ombre du solide commun sur les plans de projection.

3825. — Intersection de deux prismes dont les génératrices ont pour directions respectives δ, δ', Δ, Δ' et dont les bases sont l'une un triangle dans le plan horizontal, l'autre un quadrilatère dans le plan vertical.

3826. — On considère deux plans de bout dont les traces horizontales sont confondues. Un carré situé dans le plan $P\alpha Q'$ est défini par son centre o, o' et la longueur de ses côtés dont deux sont de front ; un triangle équilatéral situé dans le plan $P\alpha R'$ est défini par son centre ω, ω', la longueur de ses côtés et la direction de l'un d'eux qui fait un angle de 30° avec $P\alpha$. Intersection de la pyramide qui a pour base le carré et pour sommet un point s, s' avec le prisme qui a pour base le triangle équilatéral et dont la direction des génératrices est δ, δ'.

3827. — Ombre portée par un triangle donné sur une pyramide triangulaire donnée reposant sur le plan horizontal.

3828. — Ombre d'un prisme sur un cylindre.

3829. — Soit une pyramide triangulaire reposant sur le plan horizontal. Mener par un point d'une arête un plan tel que la section soit un triangle isocèle dont on donne la longueur des côtés égaux.

3830. — On considère deux plans $P\alpha Q'$, $R\beta S'$. Chercher le chemin minimum pour aller de α en β en restant sur les deux plans.

3831. — On donne un trièdre $sabc$, $s'a'b'c'$. Déterminer la section passant par un point m,m' d'une des arêtes de façon que le périmètre soit minimum. Même problème pour un point pris à l'intérieur d'une face.

3832. — On considère une pyramide triangulaire régulière SABC reposant par sa base sur le plan horizontal ; on prend un point M sur l'arête SA. Construire, sur la surface latérale de la pyramide, le chemin minimum pour aller de A en M après avoir effectué deux tours.

3833. — Construire une pyramide hexagonale régulière dont une des faces repose sur le plan horizontal. Soit M un point de l'arête SA ; déterminer les projections du chemin minimum partant de M pour y revenir, après avoir effectué un tour complet sur la surface latérale de la pyramide.

3834. — Déterminer le centre d'une sphère tangente à deux plans parallèles et qui soit à des distances données du plan vertical et du plan horizontal. Même problème pour une sphère tangente à deux plans quelconques.

3835. — Trouver les points du plan vertical dont les distances à deux points donnés sont l et l'.

3836 — On considère une pyramide triangulaire SABC reposant par sa base ABC sur le plan horizontal. SC est verticale et le plan de la face BSC est de bout. On considère le cercle passant par les trois points M, N, P des arêtes SA, SB, SC tels que SM = SN = SP. Déterminer la sphère tangente au plan horizontal et à l'arête SA, son centre se trouvant sur la droite Sω qui joint le sommet S au centre ω du cercle MNP. Intersection de la sphère avec la pyramide.

3837. — On donne l'axe et le rayon d'un cylindre de révolution. Trouver la projection verticale d'un point de la surface dont on donne la projection horizontale.

3838. — On considère un plan défini par son échelle de pente et un cercle de ce plan, donné par son rabattement autour de l'horizontale de cote 3. Ce cercle est la base d'un cône de sommet S (5). On demande de mener à ce cône un plan tangent par le point b (3).

3839. — Contours apparents d'un cône défini par son sommet sur la ligne de terre et sa base qui est un cercle de rayon et de centre donnés, dans un plan donné.

3840. — On a un tétraèdre régulier, $abcd$, reposant par sa base abc sur le plan horizontal ; b est le sommet d'un cône dont la base est le cercle inscrit dans la face opposée : déterminer le contour apparent en projection horizontale.

3841. — Mener à un cylindre un plan tangent faisant un angle donné avec le plan de base.

3842. — On définit un cône de révolution par son axe, son sommet et son angle au sommet. Déterminer les contours apparents. Déterminer en position le cylindre de révolution de rayon donné tangent au plan horizontal et au cône ; on donne en projection horizontale la direction des génératrices.

3843. — Plans tangents parallèles à un cône et à un cylindre. Normale commune.

3844. — Mener par un point un plan faisant un angle donné avec le plan horizontal et coupant une sphère donnée suivant un cercle de rayon donné.

3845. — Par une droite faire passer un plan de façon à couper une sphère suivant un cercle de rayon donné.

3846. — Mener par un point une droite rencontrant une droite donnée et faisant un angle donné avec le plan horizontal.

3847. — Par un point donné, mener un plan qui coupe deux droites données sous des angles donnés α et β.

3848. — On donne un cône par son sommet S (12^m) et sa directrice circulaire dans le plan horizontal de cote 0. On définit un plan par trois de ses points a (1^m), b (4^m) et c (7^m). Déterminer l'intersection.

3849. — Un cylindre est défini par sa base dans le plan horizontal de cote 0 et par la direction de ses génératrices ; lui mener un plan tangent parallèle à une droite donnée. Ombre de ce cylindre sur le plan de cote 0.

3850. — Déterminer l'ombre propre d'un cylindre de révolution dont l'axe est de front et dont la directrice circulaire est dans un plan de bout donné (rayons lumineux à 45°). Déterminer l'ombre portée sur les plans de projection, le cylindre étant limité à un autre plan, parallèle au plan de base.

3851. — Ombre propre d'une sphère (rayons lumineux à 45°).

3852. — Déterminer l'ombre de la niche sphérique (id.)

3853. — Ombre d'une moulure dont on donne la coupe par un mur de profil.

3854. — Ombre propre d'un tore à axe vertical. Points sur les contours apparents.

3855. — Lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée, dans un cylindre (ou un cône) du second degré. Ligne des points doubles dans l'intersection de deux cônes ou cylindres du second degré.

3856. — Construire sur un cylindre, entre deux points M et N, l'arc de courbe dont la longueur est minimum (ligne géodésique).

3857. — Même problème avec un cône de révolution d'axe vertical.

3858. — Déterminer la projection horizontale d'un point d'une surface de révolution définie par son axe, qui est de front, et la courbe génératrice, connaissant la projection verticale du point. Plan tangent en ce point. Déterminer un point du contour apparent horizontal.

3859. — On donne un cercle par son centre et son rayon dans un plan de bout PzQ' : c'est la courbe génératrice d'une surface de révolution dont l'axe est la verticale qui passe par le point le plus haut A, A' du cercle. Déterminer un point de la méridienne principale et sa tangente.

3860. — On considère un ellipsoïde de révolution à axe vertical et un plan sécant PzQ' : déterminer le sommet du cône circonscrit à l'ellipsoïde le long de la courbe de section par ce plan.

3861. — Hyperboloïde de révolution à axe vertical. Lui mener un plan tangent parallèle à un plan donné.

3862. — Hyperboloïde de révolution à axe vertical. Section par un plan passant par le centre du collier et dont l'inclinaison sur le plan horizontal est égale à l'inclinaison des génératrices de l'hyperboloïde sur ce même plan horizontal.

3863. — Points d'intersection d'une droite et d'un paraboloïde de révolution à axe vertical.

3864. — Dans quelles circonstances l'intersection de deux cylindres présente-t-elle des branches infinies ? Dans quel cas les deux cylindres ont-ils leur intersection dans un même plan ?

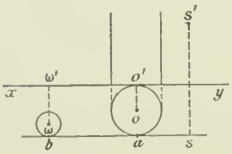
3865. — Intersection de deux cylindres dont les bases sont dans le plan horizontal. Point et tangente. Ligne des points doubles.

3866. — Intersection de deux cônes de révolution à axe vertical ; point et tangente ; points à tangente horizontale ; asymptotes.

3867. — Intersection de deux cônes ayant comme base commune un cercle dans le plan horizontal.

3868. — On considère dans le plan horizontal deux cercles concentriques et le diamètre de front qui rencontre le cercle intérieur en a, a'. Ces deux cercles sont les bases de deux cônes dont les sommets s, s', σ, σ' sont sur la verticale du point a, a', le sommet le plus haut correspondant au cône dont la base est le cercle intérieur. Intersection des deux cônes ; nature de la projection verticale de l'intersection.

3869. — Intersection d'un cylindre de révolution à axe vertical et d'un cône dont la base circulaire dans le plan horizontal est tangente à la tangente de front au cercle de base o,o' du cylindre, son centre ω, ω' étant du même côté que o,o' par rapport à cette droite ab. Le sommet du cône est s,s', s tombant sur la tangente commune ab.



3870. — Intersection d'un cylindre et d'un cône, ce dernier ayant une génératrice parallèle aux génératrices du cylindre.

3871. — Les points de rencontre s,s', t, t' d'une droite de profil avec les plans de projection sont les sommets respectifs de deux cônes à bases circulaires situées l'une dans le plan horizontal, l'autre dans le plan vertical, les projections des centres de ces cercles étant également sur la ligne de profil st, $s't'$. Intersection des deux surfaces.

3872. — Intersection de deux cônes de sommets s,s' σ,σ' dont les bases sont dans deux plans de bout $P\alpha Q'$, $P\alpha R'$ ayant même trace horizontale, ces deux bases ayant pour projections horizontales deux cercles donnés.

3873. — Intersection de deux cônes dont on donne les sommets et les directrices qui sont deux cercles dans des plans de bout.

3874. — On définit deux cylindres par les directions $\delta\delta'$, $\Delta\Delta'$ de leurs génératrices et leurs bases qui sont des cercles dans deux plans de bout. Trouver l'intersection.

3875. — Intersection d'un cylindre dont les génératrices sont horizontales et la directrice un cercle dans un plan vertical $R\alpha Q'$, avec un cône de sommet s,s' dont la directrice est un cercle situé dans le plan vertical $P\alpha Q'$, ces deux plans ayant même trace verticale $\alpha Q'$.

3876.—On donne deux plans de pente connue (60°) par leur horizontale de cote 0. Intersection de deux cônes définis par leurs sommets $s(3)$ et $\sigma(5)$, et leurs bases situées dans les deux plans, l'une d'elles se projetant horizontalement suivant un cercle tangent à la trace de son plan sur le plan horizontal de cote 0.

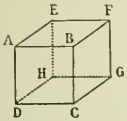
3877. — On donne un tétraèdre régulier SABC reposant par sa base ABC sur le plan horizontal. On définit deux cylindres, l'un ayant pour directrice le cercle inscrit dans la face ASB et de génératrices parallèles à SC, l'autre, pour directrice le cercle inscrit dans la face ASC et ses génératrices parallèles à SB. Intersection des deux cylindres.

3898. — Même problème en remplaçant le cercle inscrit dans la face ASC par le cercle circonscrit.

3879. — Même problème, en prenant deux cônes ayant respectivement pour sommets B et C et pour bases les cercles circonscrits aux faces ASC, ASB du tétraèdre.

3880. — Un tétraèdre trirectangle SABC repose par sa base ABC sur le plan horizontal. B et C sont les sommets de deux cônes dont les bases respectives sont les cercles inscrits dans les faces opposées. Intersection de ces deux cônes.

3881 — On considère un cube ABCDEFGH dont une face est dans le plan horizontal, une autre dans le plan vertical. Intersection d'un cône de sommet F dont la directrice est le cercle inscrit dans la face ABCD avec le cylindre de génératrices parallèles à AB dont la directrice est le cercle inscrit dans la face BCGF.



3882. — Intersection d'un cône et d'un cylindre de révolution dont les axes sont dans un même plan de front. Nature de la projection verticale.

3883. — On considère un cylindre de révolution d'axes parallèle à xy; on prend la génératrice la plus rapprochée du plan vertical. — Cette génératrice appartient à un cône de révolution défini par son sommet et son axe qui est horizontal. — Déterminer l'intersection.

3884. — Intersection d'une sphère et d'un cône de sommet s,s' qui a pour directrice la section faite dans la sphère par un plan vertical.

3885. — Intersection d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical et d'un cône qui a son sommet sur la surface.

3886. — Intersection d'un cône et d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical, les deux surfaces ayant une génératrice en commun.

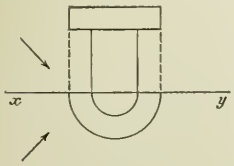
3887. — On considère un cube ABCDEFGH ayant une face horizontale et une autre de front. On considère l'hyperboloïde engendré par AC en tournant autour de l'axe vertical XX' du cube et le cylindre de révolution engendré par AC en tournant autour de sa parallèle EG. Intersection.

3888. — Déterminer les points d'intersection d'une droite et d'un tore à axe vertical.

3889. — On donne un tore à axe vertical ; on définit un cône par sa base qui est la section dans le tore par le plan de profil mené par le centre ω du cercle générateur du tore (dans le plan de front qui contient l'axe), et par son sommet situé sur l'axe du tore. Intersection des deux surfaces.

3890. — Déterminer l'intersection d'un tore à axe vertical et d'un cône de révolution dont on donne le sommet s, s' sur l'axe du tore, l'axe par ses projections et l'angle au sommet. Point et tangente.

3891. — On donne un plan de bout $P\alpha Q'$ et dans ce plan une ellipse E projetée horizontalement suivant un cercle tangent à la trace horizontale $P\alpha$, et un cercle C dont la projection horizontale est tangente à cette même trace $P\alpha$ et au même point e. On fait tourner l'ellipse E autour de la verticale menée par le point le plus haut a, a' de l'ellipse, et le cercle C autour de la verticale issue de l'un des foyers f de sa projection horizontale. Construire l'intersection.



3892. — Trouver l'ombre d'un cercle opaque situé dans un plan horizontal, sur un cône donné par son sommet et sa base dans le plan horizontal.

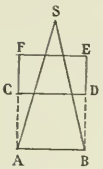
3893. — Même problème en supposant le cercle dans un plan de front.

3894. — Ombres propres de deux sphères données, et ombre de l'une d'elles sur l'autre.

3895. — Déterminer l'ombre à l'intérieur d'une demi-sphère creuse.

3896. — On donne deux cylindres de révolution concentriques, à axe vertical. Ombre portée par le cylindre supérieur sur le second, les rayons lumineux étant parallèles à une droite dont les projections font avec la ligne de terre des angles de 45°.

3897. — On donne un cône de révolution à axe vertical : on considère la section AB par le plan horizontal : c'est la directrice d'un cylindre de révolution à axe vertical également qu'on limite aux sections par deux plans horizontaux CD, FE. On demande les ombres propres, l'ombre du cylindre sur le cône, l'ombre du cône et du cylindre sur le plan horizontal, les rayons lumineux étant à 45°.



3898. — Déterminer l'intersection d'un cône de révolution a axe vertical et d'un cylindre de révolution à axe vertical également, dont la base dans le plan horizontal est tangente intérieurement à la circonférence, base du cône. Déterminer l'ombre propre du cône et du cylindre, l'ombre portée par le cylindre limité à un plan horizontal H', sur le cône et les ombres du cône et du cylindre sur les plans de projection, les rayons lumineux étant à 45°.

3899. — On donne la projection horizontale d'un cylindre de révolution d'axe horizontal, terminé par un prisme droit à base carrée dont l'une des faces est horizontale. Etant données les projections du cylindre et du prisme sur un plan vertical auxiliaire perpendiculaire à l'axe du cylindre, déterminer la projection verticale du solide dans le premier système de projections. Déterminer les ombres, les rayons lumineux étant à 45°.

QUESTIONS PROPOSÉES

1583. — Prouver que dans l'équation

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h),$$

$f(x)$ est de la forme

$$A + Bx + Ce^{ax}$$

lorsque θ est indépendant de x. (Les lettres A, B, C et a représentent des constantes).

W. Mérigot, à Paris.

1584. — On donne un cercle O et un diamètre AB.

Par un point M fixe sur la circonférence du cercle O, on mène une droite variable qui rencontre AB en P. La perpendiculaire élevée en P à PM et la perpendiculaire élevée à AB au milieu de OP se rencontrent en Q. Le lieu de Q est une parabole. Construire les courbes suivantes, lorsque M se déplace sur le cercle :

1° Enveloppe de la parabole ;

2° Lieu du point de rencontre de OM avec la parabole ;

3° Lieu du sommet et du foyer de la parabole.

E.-N. Barisien.

1585. — Un microscope de longueur $e = 200^{mm}$ est formé d'un objectif mince de diamètre $a = 4^{mm}$ et de distance focale $\varphi = 8^{mm}$, et d'un oculaire mince de distance focale $f = 40^{mm}$.

Un myope, dont les limites de vision nette sont $\delta = 150^{mm}$ et $\Delta = 300^{mm}$, regarde dans l'instrument. Quelle est la latitude de mise au point, c'est-à-dire le déplacement maximum qu'on peut donner à l'instrument sans cesser de voir nettement l'image :

1° En supposant qu'un point n'est vu nettement que si son image rétinienne est rigoureusement un point ;

2° En admettant qu'une tache lumineuse peut encore passer pour un point si son diamètre apparent est inférieur à une minute, ou 0,0003.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

17e Année. N° 7. Avril 1907.

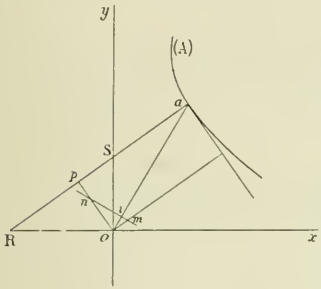
REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LA TRANSFORMATION PAR POLAIRES RÉCIPROQUES

par M. **Louis Sire**, élève de Mathématiques spéciales au lycée de Nancy.

1. Considérons une courbe plane (A), rapportée à deux axes de coordonnées rectangulaires et le cercle de rayon 1, ayant pour centre l'origine o.



Soient a un point de la courbe (A), i son inverse, m le pôle de la tangente en a par rapport au cercle considéré. La droite im est perpendiculaire en i à la droite oa et est tangente en m à la polaire réciproque de (A) par rapport au cercle o.

Menons la droite op parallèle à la tangente en a; elle rencontre la droite im au point n, tel que

$$om.op = oi.oa = 1,$$

relation qui montre que le point n est le pôle de la droite ap, normale en a à la courbe (A), par rapport au cercle o; de là, la propriété :

La droite joignant les points correspondants de la figure inverse d'une courbe et de la polaire réciproque de sa développée par rapport à un cercle, enveloppe la polaire réciproque de cette courbe par rapport à ce cercle.

2. Soient x, y les coordonnées du point a, celles du point i sont

$$X = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad Y = \frac{y}{x^2+y^2};$$

l'équation de la droite im est

$$Y - \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{x}{y}\left(X - \frac{x}{x^2+y^2}\right) = 0,$$

ou

$$Xx + Yy - 1 = 0;$$

celle de la droite op est

$$Y = y'X;$$

en résolvant ces deux dernières équations, nous obtenons pour coordonnées du point n

$$X = \frac{1}{x+yy'}, \qquad Y = \frac{y'}{x+yy'}.$$

Soient R et S les points de rencontre de la normale en a avec ox et oy; nous avons

$$oR = x + yy', \qquad oS = \frac{x+yy'}{y'},$$

par suite, les coordonnées du point n peuvent s'écrire

$$X = \frac{1}{oR}, \qquad Y = \frac{1}{oS},$$

c'est-à-dire :

La transformation $X = \frac{1}{oR}$, $Y = \frac{1}{oS}$, *suivie d'une transformation par polaires réciproques par rapport au cercle* $x^2 + y^2 - 1 = 0$, *donne la développée de la courbe* (A).

3. Il en résulte également que :

La transformation $X = \frac{1}{oR}$, $Y = \frac{1}{oS}$ *donne la polaire réciproque de l'enveloppe de la droite* RS, *par rapport au cercle* $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Cette propriété ramène la détermination des polaires réciproques à celle des enveloppes de droites.

4. Si entre oR et oS, nous considérons la relation générale du premier degré

$$\alpha . oR . oS + \beta . oR + \gamma . oS + \delta = 0,$$

les points R et S décrivent deux divisions homographiques et la droite RS enveloppe une conique tangente aux axes ; le point o est par suite sur le cercle orthoptique de cette conique.

D'autre part, la transformation $x = \frac{1}{oR}$, $y = \frac{1}{oS}$ donne l'hyperbole équilatère

$$\delta xy + \gamma x + \beta y + \alpha = 0 ;$$

par suite

La polaire réciproque d'une conique par rapport à un point de son cercle orthoptique est une hyperbole équilatère.

5. Si les segments oR et oS vérifient la relation

$$\overline{oR}^2 + \overline{oS}^2 = l^2,$$

la droite RS, de longueur constante, enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements.

La transformation considérée donne la courbe

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = l^2 ;$$

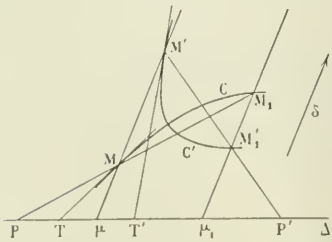
par suite

La polaire réciproque d'une hypocycloïde à quatre rebroussements par rapport à son centre est une kreuzcurve.

NOTE SUR LA CONSTRUCTION DES TANGENTES A CERTAINES COURBES

par M. **Georges Valensi**.

Parmi les diverses transformations qui permettent de passer des propriétés d'une figure à celles d'une autre figure, il y en a quelques-unes qui sont surtout intéressantes parce qu'elles permettent, connaissant la manière de construire la tangente en un point d'une courbe, de résoudre le même problème pour la transformée de cette courbe. Parmi ces transformations on peut citer, dans le plan, l'homothétie et l'inversion. Il existe une autre transformation de la même catégorie, et qui présente d'ailleurs une certaine analogie apparente avec l'inversion ; elle se définit ainsi :



Considérons une courbe quelconque C, une droite Δ et une direction δ, non parallèle à Δ. Par un point quelconque M de la courbe C, menons la parallèle à δ jusqu'à sa rencontre en μ avec la droite Δ, et portons sur cette parallèle à partir du point μ un vecteur $\overline{\mu M'}$ tel que l'on ait $\overline{\mu M} \times \overline{\mu M'} = \lambda$ (en désignant par λ une

quantité constante). Quand le point M décrit la courbe C, le point M′ décrit une certaine courbe C′ que nous appellerons simplement la *transformée* de C.

Considérons sur la courbe C un second point M_1 ; il lui correspond sur C′ un point M'_1 tel que, si l'on désigne par μ_1 le point de rencontre de Δ avec la droite $M_1M'_1$ parallèle à δ, l'on ait

$$\overline{\mu_1M_1} \times \overline{\mu_1M'_1} = \lambda = \overline{\mu M} \times \overline{\mu M'}.$$

De cette égalité, on tire la proportion

$$\frac{\overline{\mu M}}{\overline{\mu_1M_1}} = \frac{\overline{\mu_1M'_1}}{\overline{\mu M'}}.$$

Menons MM_1, qui rencontre Δ en P, et $M'M'_1$ qui rencontre Δ en P′. Nous avons

$$\frac{\overline{\mu M}}{\overline{\mu_1M_1}} = \frac{\overline{P\mu}}{\overline{P\mu_1}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\overline{\mu_1M'_1}}{\overline{\mu M'}} = \frac{\overline{P'\mu_1}}{\overline{P'\mu}}.$$

D'où l'on déduit l'égalité suivante :

$$\frac{\overline{P\mu}}{\overline{P\mu_1}} = \frac{\overline{P'\mu_1}}{\overline{P'\mu}}.$$

Or on a, en appliquant la formule de Chasles,

$$\overline{P\mu_1} = \overline{P\mu} + \overline{\mu\mu_1}, \qquad \overline{P'\mu} = \overline{P'\mu_1} + \overline{\mu_1\mu}.$$

Notre proportion devient

$$\frac{\overline{P\mu}}{\overline{P\mu} + \overline{\mu\mu_1}} = \frac{\overline{P'\mu_1}}{\overline{P'\mu_1} + \overline{\mu_1\mu}}.$$

Retranchons les numérateurs des dénominateurs ; il vient

$$\frac{\overline{P\mu}}{\overline{\mu\mu_1}} = \frac{\overline{P'\mu_1}}{\overline{\mu_1\mu}}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \overline{P\mu} = -\overline{P'\mu_1}.$$

Nous pouvons déjà résoudre le problème suivant :

Problème. — *On donne l'axe* Δ, *la direction* δ, *un point* M *d'une courbe* C *et son transformé* M′. *Construire le transformé* M'_1 *d'un autre point* M_1 *de* C.

Soit μ le point où la droite MM′ rencontre l'axe Δ. Par le point M_1 menons la parallèle à la direction δ jusqu'à sa rencontre en μ_1 avec Δ. Joignons MM_1 qui rencontre Δ en P. Prenons sur l'axe Δ un point P′ tel que l'on ait $\overline{\mu_1P'} = \overline{P\mu}$. Le point de rencontre M'_1 des droites P′M′ et $M_1\mu_1$ est le transformé de M_1, c'est-à-dire le point cherché.

La solution de ce problème permet de construire très simplement par points la transformée C′ d'une courbe donnée C, si l'on connaît déjà le transformé d'un point de C.

Supposons maintenant que, sur la courbe C, le point M_1 se rapproche indéfiniment du point M ; si nous supposons que la courbe C ait une tangente au point M, la droite MM_1, qui pivote autour du point M, tend vers une position limite MT, qui est par définition la tangente à la courbe C au point M. Or, lorsque le point M_1 se rapproche indéfiniment du point M sur la courbe C, le point μ_1 se rapproche indéfiniment du point μ sur Δ, et en même temps le point M'_1 se rapproche indéfiniment du point M′ sur C′. D'autre part, à toute position MM_1 de la corde MM_1 correspond une position $M'M'_1$ de la corde $M'M'_1$ telle que l'on ait $\overline{P\mu} = -\overline{P'\mu_1}$. Par conséquent, s'il existe une position limite MT de la corde MM_1, il existera aussi une position limite M′T′ de la corde $M'M'_1$, telle que l'on ait $\overline{T\mu} = -\overline{T'\mu}$ (T et T′ étant les points de rencontre des droites MT et M′T′ avec l'axe Δ, et μ le point de rencontre de la droite MM′ avec Δ).

Nous avons ainsi démontré que si la courbe C possède une tangente au point M, sa transformée C′ possède aussi une tangente au point M′, transformé de M ; et en outre nous avons trouvé un moyen très simple de construire cette tangente : Soit μ le point de rencontre de la parallèle à δ menée par M avec la droite Δ, et soit T le point où la tangente à C en M rencontre Δ; soit T′ le symétrique de T par rapport à μ : la droite MT′ est tangente à C′ au point M′.

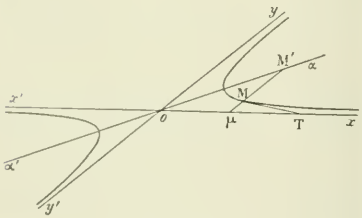
On peut donner à cette méthode de transformation une forme analytique très simple. Supposons que l'on prenne pour axe des x la droite Δ et pour direction de l'axe des y la direction δ. Soient x_0 et y_0 les coordonnées d'un point M de C par rapport aux axes ox, oy. Si $f(x, y) = 0$ est l'équation de la courbe C, on aura la relation $f(x_0, y_0) = 0$. Le transformé M′ de M a même abscisse x_0 que M. Son ordonnée y_0' est telle que l'on ait $y_0 . y_0' = \lambda$, c'est-à-dire $y_0 = \frac{\lambda}{y_0'}$; on a donc la relation $f\left(x_0, \frac{\lambda}{y_0'}\right) = 0$. C'est une relation de forme constante entre les coordonnées x_0, y_0' d'un point quelconque de C′. Par conséquent l'équation de la courbe C′ sera $f\left(x, \frac{\lambda}{y}\right) = 0$. On passe donc de l'équation de C à celle de sa transformée C′ par une transformation algébrique très simple. D'où l'on déduit une méthode de construction des tangentes à certaines courbes :

Etant donnée une courbe représentée par l'équation $f(x, y) = 0$ on cherchera à remplacer cette équation par un système de la forme

$$y_1 = \frac{\lambda}{y}, \qquad \varphi(x, y_1) = 0,$$

où l'équation $\varphi(x, y_1)$ représente une courbe pour laquelle on sait résoudre le problème de la construction des tangentes, et l'on procèdera, comme il a été dit précédemment, à la construction des tangentes à la courbe qui a pour équation $f(x, y) = 0$.

Applications. — I. Considérons une hyperbole quelconque rapportée à ses asymptotes. Son équation est



$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

On peut remplacer cette équation par le système

$$y_1 = \frac{\frac{a^2 + b^2}{4}}{y}, \qquad x = y_1.$$

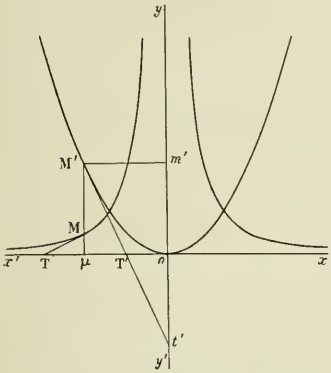
La seconde équation représente la bissectrice $\alpha x'$ de l'angle xoy. On passe de cette droite à l'hyperbole considérée par une transformation analogue à celle définie précédemment. Soit à construire la tangente en un point M(x_0, y_0) de l'hyperbole. Par M menons la parallèle à $y'y$ jusqu'à sa rencontre en μ avec $x'x$. Soit M′ le point où cette droite rencontre $\alpha x'$. Soit T le symétrique de l'origine o par rapport au point μ. MT est la tangente cherchée. D'où le théorème connu :

Dans toute hyperbole rapportée à ses asymptotes, la sous-tangente est égale, mais de sens contraire, à l'abscisse du point de contact.

II. Considérons la cubique $x^2y - 1 = 0$. Elle se compose de deux branches situées dans la région des ordonnées positives et asymptotes toutes deux aux deux axes de coordonnées. On peut remplacer son équation par le système

$$x^2 \times \frac{1}{2py_1} - 1 = 0. \qquad y_1 = \frac{1}{2py},$$

La seconde équation de ce système peut s'écrire $2py_1 = x^2$.



Sous cette forme, on voit qu'elle représente une parabole P dont l'axe coïncide avec $y'y$ et dont le sommet coïncide avec l'origine.

Soit à construire la tangente en un point M de la courbe $x^2y - 1 = 0$. Par le point M menons la parallèle à $y'y$ qui rencontre $x'x$ en μ et la parabole P en M'. Le point M' se projette sur l'axe $y'y$ en un point m' dont le symétrique par rapport à l'origine est t'. La droite M't', tangente à la parabole P au point M', rencontre l'axe $x'x$ au point T'. Si T est le symétrique du point T' par rapport au point μ, MT est la tangente cherchée. On voit que le point T' est le milieu de $o\mu$ $\left(\text{car } \frac{oT'}{o\mu} = \frac{t'o}{t'm'} = \frac{1}{2}\right)$. D'où le théorème :

Dans la courbe représentée par l'équation $x^2y - 1 = 0$ *la sous-tangente est égale à la moitié de l'abscisse du point de contact et est de sens contraire à cette abscisse.*

Remarque. — La relation $yY = k$ entraîne la suivante :

$$y'_xY + yY'_x = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{Y'_x}{Y} = -\frac{y'_x}{y},$$

ce qui prouve bien que les sous-tangentes aux deux courbes correspondantes sont égales et de signes contraires.

CERTIFICAT D'ÉTUDES SUPÉRIEURES (*Rennes, novembre 1905.*)

Mathématiques préparatoires.

1505. — *Un point mobile est assujetti à décrire une chaînette représentée par l'équation*

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

de telle façon que la projection de la vitesse sur Ox *soit égale à la constante* a. *Calculer la projection de la vitesse sur* Oy *et montrer que l'accélération totale est parallèle à* Oy *et égale à* y.

Trouver à un instant donné, en fonction de y : 1° *la vitesse absolue du mobile* ; 2° *les composantes tangentielle et normale de l'accélération totale.*

Comme la projection de la vitesse sur Ox est constante et égale à a, nous avons $\frac{dx}{dt} = a$.

La projection de la vitesse sur Oy est $\frac{dy}{dt}$; nous pouvons écrire

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = a\frac{dy}{dx}.$$

Or, la trajectoire ayant pour équation $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, nous en tirons $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$, et, par suite,

$$\frac{dy}{dt} = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}.$$

Considérons maintenant l'accélération dont les projections sur les axes sont $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$. La

première est nulle, et pour calculer la seconde, nous écrirons

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dx}{dt} = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = y.$$

On en conclut que l'accélération totale γ est parallèle à Oy et est égale à y.

Soit v la valeur absolue de la vitesse ; on a

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = a^2\left[1 + \mathrm{sh}^2\frac{x}{a}\right] = a^2\,\mathrm{ch}^2\frac{x}{a},$$

et

$$v = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a} = y.$$

Il faut maintenant calculer v en fonction de t. La relation $\frac{dx}{dt} = a$ nous donne $x = a(t + C)$, et par suite

$$v = a\,\mathrm{ch}\,(t + C).$$

L'accélération tangentielle est alors $\gamma_t = \frac{dv}{dt} = a\,\mathrm{sh}\,(t + C)$,

et l'accélération normale est donnée par la formule connue

$$\gamma_n^2 = \gamma^2 - \gamma_t^2 = y^2 - a^2\,\mathrm{sh}^2(t + C) = a^2[\mathrm{ch}^2(t + C) - \mathrm{sh}^2(t + C)],$$

ou

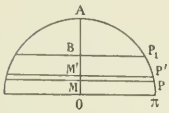
$$\gamma_n = a.$$

A. COTTY, lycée de Dijon.

Bonnes solutions par MM. R. de Fafia ; G. Foucry, à Roanne ; Frey, à Alger ; H. Janois, à Nantes ; J. L'hermite, à Caen ; G. Pélissier, à Toulouse ; R. Manen, à Albi ; Louis Sire, à Nancy ; Jean Soudet, lycée de Rouen.

ANALYSE

1498. — *On donne un hémisphère solide, homogène, de centre O et de rayon R. Calculer à* $\frac{1}{1\,000}$ *près le rapport dans lequel un plan sécant parallèle au plan de base doit partager le rayon OA perpendiculaire au plan de base pour que les deux portions déterminées par ce plan dans l'hémisphère aient même moment d'inertie par rapport à l'axe OA.*



Soit $z_1 = OB$ la distance du plan cherché P_1 au plan de base π de l'hémisphère. Nous allons écrire que le moment d'inertie du segment sphérique compris entre les plans P_1 et π est égal à la moitié du moment d'inertie de l'hémisphère.

Considérons pour cela deux plans infiniment voisins P et P', parallèles au plan π, et rencontrant OA aux points M et M' tels que $OM = z$, $OM' = z + dz$, et évaluons le moment d'inertie du segment sphérique infiniment petit compris entre les plans P et P'. Nous pouvons remplacer ce segment par le cylindre qui a pour base le cercle C, section de la sphère par le plan P, et pour hauteur dz, car les volumes du segment sphérique et du cylindre sont des infiniment petits équivalents.

Si r désigne le rayon du cercle C, le moment d'inertie du cylindre est, comme on sait, égal à $\frac{\pi r^4 dz}{2}$, ou $\frac{\pi(R^2 - z^2)^2 dz}{2}$, puisque $r^2 = R^2 - z^2$.

Par suite, le moment d'inertie du segment compris entre π et P_1 est $\frac{\pi}{2}\int_0^{z_1}(R^2 - z^2)^2 dz$, celui

de l'hémisphère est $\frac{\pi}{2}\int_0^R (R^2-z^2)^2dz$, et on doit avoir

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{z_1}(R^2-z^2)^2dz = \frac{\pi}{4}\int_0^R (R^2-z^2)^2dz,$$

ou (1)

$$\int_0^{z_1}(R^2-z^2)^2dz = \frac{1}{2}\int_0^R (R^2-z^2)^2dz.$$

Calculons l'intégrale indéfinie $\int (R^2-z^2)^2dz$. Nous avons

$$(R^2-z^2)^2 = R^4-2R^2z^2+z^4$$

et

$$\int (R^2-z^2)^2dz = R^4z-\frac{2R^2z^3}{3}+\frac{z^5}{5};$$

par suite, l'équation (1) devient

$$R^4z_1-\frac{2R^2z_1^3}{3}+\frac{z_1^5}{5} = \frac{1}{2}\left(R^5-\frac{2R^5}{3}+\frac{R^5}{5}\right),$$

ou, en simplifiant, et en posant $\frac{z_1}{R} = x$, $f(x) \equiv 3x^5-10x^3+15x-4 = 0$.

Pour qu'une racine de cette équation soit solution du problème, il faut qu'elle soit réelle et comprise entre 0 et 1.

Prenons la dérivée, nous avons $f'(x) \equiv 15x^4-30x^2+15 \equiv 15(x^2-1)^2$; cette dérivée étant toujours positive, la fonction $f(x)$ est croissante, elle ne peut s'annuler plus d'une fois.

Or $f(0) = -4$, $f(1) = 4$; donc l'équation admet une seule racine comprise entre 0 et 1.

Cherchons d'abord sa valeur à 0,1 près. Nous avons

$$f(0,1) = -2,51997, \qquad f(0,2) = -1,07904, \qquad f(0,3) = 0,23729;$$

par suite, la racine est comprise entre 0,2 et 0,3, et elle semble être plus voisine de 0,3 que de 0,2.

Substituons 0,29 et 0,28, nous obtenons

$$f(0,29) = 0,1122633447, \qquad f(0,28) = -0,0143568896;$$

la racine est comprise entre 0,28 et 0.29.

Appliquons maintenant la méthode de Newton.

On a vu que $f'(x) = 15(x^2-1)^2$; donc $f''(x) = 60x(x^2-1)$. Dans l'intervalle (0,28, 0,29) $f''(x)$ est négatif; il faut donc appliquer la méthode à la limite 0,28 qui rend $f(x)$ négatif.

Nous avons $$f'(0,28) = 15(\overline{0,28}^2-1)^2 = 12,7401984,$$

et par suite

$$-\frac{f(0,28)}{f'(0,28)} = \frac{0,0143568896}{12,7401984} = 0,00112\ldots$$

La nouvelle valeur approchée de la racine est donc

$$0,28+0,00112 = 0,28112\ldots$$

L'erreur commise est moindre que $\frac{1}{10^4}\cdot\frac{M}{2f'(0,28)}$, M désignant le maximum de la valeur absolue de $f''(x)$ entre 0,28 et 0,29.

On aura donc ici

$$\varepsilon < \frac{1}{10^4}\cdot\frac{15,93666}{25,4803968} < \frac{7}{10^5}.$$

La racine cherchée est comprise entre 0,28112 et 0,28119. Sa valeur est 0,2811 à $\frac{1}{10^4}$ près.

ALEXANDRE FEUILLET, lycée d'Orléans.

Ont résolu la même question : MM. G. COTTY ; G. FOUCRY, à Roanne : H. MASSON ; J. YERNAUX, école des mines, à Mons

MÉCANIQUE

1493. — *Soit un système de forces rapporté à trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy *et* Oz, *ayant pour axe central l'axe* Oz. *La somme des projections des forces sur* Oz *a pour valeur* h *et le moment résultant du système par rapport à* Oz *a pour valeur* h^2.

1° *Montrer que les droites de moment nul par rapport au système de forces qui passent par un point donné* A, *de coordonnées* a, b, c, *sont situées dans un même plan* P, *dont on demande de former l'équation.*

2° *Lieu des points* M *tels que le moment résultant du système par rapport à chacun d'eux passe par le point* A.

3° *Montrer que le lieu de la droite* AM *est un cône du second ordre* C. *Déterminer les directions des plans qui coupent ce cône suivant des cercles.*

4° *Lieu des pieds sur les génératrices du cône* C *des perpendiculaires communes avec l'axe* Oz.

5° *Montrer qu'il est possible, d'une infinité de manières, de réduire le système des forces données à deux forces rectangulaires* F *et* F', *dont l'une* F *soit appliquée en* A. *Lieu des lignes d'action des forces* F *et lieu des extrémités des forces* F.

6° *Montrer que les forces* F' *sont situées dans le plan* P *et qu'elles enveloppent dans ce plan une parabole, dont on demande de déterminer le foyer.*

D'après les données, les éléments de la réduction à l'origine des coordonnées sont $0, 0, h$, pour la résultante générale R, et $0, 0, h^2$, pour le moment résultant G. Si donc on applique les formules

$$L' = L - yZ + zY,$$
$$M' = M - zX + xZ,$$
$$N' = N - xY + yX,$$

qui donnent les composantes du moment résultant au point (x, y, z), on aura ici, pour les composantes du moment au point A (a, b, c),

$$L' = -bh, \qquad M' = ah, \qquad N' = h^2.$$

1° On sait que le moment résultant par rapport à un axe s'obtient en projetant sur cet axe le moment résultant du système par rapport à un point quelconque de l'axe lui-même. Les droites de moment nul qui passent en A sont donc dans un plan perpendiculaire au vecteur (L', M', N') mené par le point A. L'une de ces droites a pour équations

$$\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma},$$

et la condition d'orthogonalité avec le vecteur signalé est

$$-b\alpha + a\beta + h\gamma = 0;$$

le lieu de ces droites, c'est-à-dire le plan P, a donc pour équation

$$-b(x-a) + a(y-b) + h(z-c) = 0,$$

ou (1)
$$bx - ay - h(z-c) = 0.$$

2° Appelons x, y, z les coordonnées du point M; le moment résultant en ce point a pour composantes $-hy, hx, h^2$, et les équations de la droite de support de ce vecteur sont

$$\frac{X-x}{-hy} = \frac{Y-y}{hx} = \frac{Z-z}{h^2}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{X-x}{-y} = \frac{Y-y}{x} = \frac{Z-z}{h};$$

en écrivant qu'elle passe au point (a, b, c), nous obtenons les relations

$$\frac{a-x}{-y} = \frac{b-y}{x} = \frac{c-z}{h},$$

qui définissent les équations du lieu du point M. Ce lieu est une cubique gauche qui passe au point A, comme on s'en convainc aisément en posant chacun des rapports qui précèdent égal à $-t$. On trouve ainsi pour équations paramétriques du lieu :

$$(2) \qquad x = \frac{a - bt}{1 + t^2}, \qquad y = \frac{at + b}{1 + t^2}, \qquad z = c + ht.$$

3. La droite AM tourne autour d'un point de la cubique et s'appuie sur cette cubique ; elle engendre donc un cône du second ordre. Nous aurons l'équation de ce cône en écrivant que la droite

$$\frac{x - a}{\alpha} = \frac{y - b}{\beta} = \frac{z - c}{\gamma}$$

rencontre la cubique précédente, ce qui donne les relations

$$a + \alpha\lambda = \frac{a - bt}{1 + t^2}, \qquad b + \beta\lambda = \frac{b + at}{1 + t^2}, \qquad c + \gamma\lambda = c + ht;$$

ces relations s'écrivent

$$at + \alpha\frac{\lambda}{t}(1 + t^2) = -b, \qquad bt + \beta\frac{\lambda}{t}(1 + t^2) = a, \qquad \text{et} \qquad \frac{\lambda}{t} = \frac{h}{\gamma};$$

elles donnent de suite t et $1 + t^2$, et, par suite, la relation qui existe entre α, β, γ :

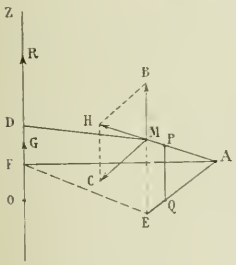
$$\gamma(a\beta - b\alpha) = h(\alpha^2 + \beta^2).$$

Le cône C a donc pour équation

$$(3) \qquad h^2[(x - a)^2 + (y - b)^2] = (z - c)(ay - bx).$$

Il est visible que le plan des xy est l'un des plans cycliques de ce cône; l'autre s'obtiendrait sans peine.

Il est du reste facile d'expliquer géométriquement ces divers résultats. Considérons en effet, sur OZ, la résultante générale $OR = h$, et le moment résultant $OG = h^2$, et cherchons quel doit être le moment au point M ; ce moment sera la somme de deux vecteurs ; l'un MB, équipollent à OG, et l'autre MC, qui est le moment de la résultante par rapport au point M. Soit MD la perpendiculaire abaissée du point M sur OZ ; cette droite est perpendiculaire à la fois à MB et à MC ; elle est donc perpendiculaire au plan MBC, et, par suite, au vecteur MH ; le point M est le pied de la perpendiculaire commune à OZ et au vecteur MH, le lieu de ce point est le même que le lieu déjà trouvé antérieurement pour les points M dont le moment passe en un point donné A : c'est la cubique gauche (2). Ceci nous donne en passant la solution de la quatrième partie.



D'autre part, la projection de l'angle droit DMA sur le plan horizontal (plan des xy) est un angle droit ; le lieu du point E où MB rencontre le plan parallèle au plan des xy passant par le point A est donc un cercle, le cercle décrit sur AF comme diamètre. Si maintenant on coupe le cône par un plan parallèle au plan des xy et situé à une distance de A égale à OG ou MB, on obtient sur AM un point P et le triangle APQ est égal au triangle MHC; donc $AQ = MC = MD.OG = EFh^2$; par conséquent AQ et EF sont proportionnels et le lieu du point Q est un cercle passant au point A et tangent au plan AOZ. Le lieu du point P est ce cercle, après la translation $QP = h^2$; donc le lieu de la droite AM est un cône du second degré ayant le plan des xy comme plan cyclique. Si l'on rapproche ce résultat du fait constaté antérieurement que le lieu de EM est un cylindre de révolution parallèle à OZ et passant par OZ et par le point A, on voit de suite que le lieu de M est une cubique gauche passant en A.

4. Nous venons de voir que le lieu du pied de la perpendiculaire commune à OZ et à la droite AMH est le lieu du point M de la deuxième partie, c'est-à-dire la cubique gauche définie par les équations (2). Il nous reste à vérifier ce point par le calcul.

La perpendiculaire commune indiquée est située dans un plan parallèle au plan des xy et sa projection sur le plan des xy est perpendiculaire à celle de AM; ses équations sont donc

$$\alpha x + \beta y = 0, \qquad z = \lambda.$$

En exprimant qu'elle rencontre la droite AM, on trouve

$$\lambda = c - \gamma \frac{a\alpha + b\beta}{\alpha^2 + \beta^2};$$

d'autre part, la relation qui existe entre α, β et γ donne

$$\frac{\gamma}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{h}{a\beta - b\alpha};$$

donc finalement

$$\lambda = c - h\frac{a\alpha + b\beta}{a\beta - b\alpha}.$$

Ceci nous donne le z du point de rencontre de la droite AM avec la perpendiculaire commune. Nous aurons le lieu du pied de cette perpendiculaire en remplaçant dans ses deux équations α, β, γ par les quantités proportionnelles $x - a$, $y - b$, $z - c$; nous avons ainsi

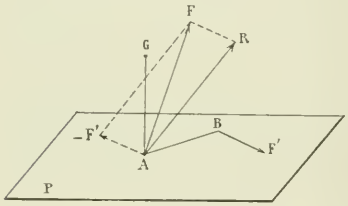
$$x(x - a) + y(y - b) = 0,$$
$$(z - c)(ay - bx) + h[a(x - a) + b(y - b)] = 0.$$

Or la première équation nous donne

$$a(x - a) + b(y - b) = -(x - a)^2 - (y - b)^2,$$

et, en portant cette expression dans la seconde, nous voyons qu'elle représente alors le cône C. Les deux équations trouvées sont donc bien celles de la cubique gauche de la deuxième partie.

5 et **6**. Quant aux deux autres parties, elles sont classiques et nous allons les exposer rapidement comme cela résulte de la comparaison des deux méthodes de réduction d'un système de forces appliquées à un corps solide.



Soient AR et AG les éléments de la réduction au point A. Représentons, dans le plan P perpendiculaire à AG au point A, le couple AG par les deux forces F′ et $-$ F′ ayant un sens convenable de rotation et telles que

$$AB.F' = AG;$$

les deux forces équivalentes au système sont d'abord F′, puis la résultante F de R et de $-$ F′.

Le vecteur RF étant équipollent au vecteur $-$ F′, le lieu total du point F est un plan Q parallèle au plan P et mené par le point R; d'autre part, les deux forces F et F′ étant rectangulaires, l'angle AFR est droit et un autre lieu du point F est une sphère décrite sur AR comme diamètre. Le lieu final est donc un cercle situé dans le plan Q et passant au point B. Il en résulte que le lieu de AF est un cône du second degré ayant ce cercle pour base.

Le lieu du point $-$ F′ est alors un cercle situé dans le plan P et passant au point A. D'ailleurs le produit de $-$ F′ par AB est constant; donc le lieu du point B est une droite Δ qu'on obtient en prenant la figure inverse du cercle lieu de $-$ F′ par rapport au point A et la faisant tourner de 90° autour du point A de gauche à droite pour l'observateur AG. L'enveloppe de BF′ est alors une parabole ayant le point A pour foyer et la droite Δ comme tangente au sommet.

M. LAURENCE.

Bonnes solutions : MM. G. Cotty, élève de l'École normale supérieure; E. Audibert, lycée de Marseille.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (1906)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

Mathématiques (M. Borel).

624. — Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$.

625. — Calculer la fonction symétrique $\Sigma x_1^3 x_2 x_3$. x_1, x_2, x_3 étant les racines de l'équation

$$x^3 - 5x - 7 = 0.$$

626. — On donne les équations

$$x = \frac{a_1 t^4 + b_1 t^3 + c_1 t^2 + d_1 t + e_1}{a_4 t^4 + b_4 t^3 + c_4 t^2 + d_4 t + e_4},$$

$$y = \frac{a_2 t^4 + b_2 t^3 + c_2 t^2 + d_2 t + e_2}{a_4 t^4 + b_4 t^3 + c_4 t^2 + d_4 t + e_4},$$

$$z = \frac{a_3 t^4 + b_3 t^3 + c_3 t^2 + d_3 t + e_3}{a_4 t^4 + b_4 t^3 + c_4 t^2 + d_4 t + e_4}.$$

Que représentent-elles ? Trouver la relation qui lie les paramètres des quatre points de rencontre de cette courbe avec un plan. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que cette courbe soit plane ? — Dans toute la suite, nous supposerons que cette condition n'est pas remplie. Si on se donne t_1, t_2, t_3, trois des paramètres des points de rencontre avec un plan, on sait calculer le paramètre t_4 du quatrième point de rencontre. L'équation qui donne t_4 ne peut-elle pas être une identité en t_4 ? Pour qu'il en soit ainsi, quelles relations doivent vérifier t_1, t_2, t_3 ? Quelle relation géométrique doit-il exister entre les points de paramètres t_1, t_2, t_3 ? En supposant que ces relations entre t_1, t_2, t_3 soient vérifiées, si l'on se donne t_1 et t_2, on sait calculer t_3. L'équation qui donne t_3 ne peut-elle pas être une identité en t_3 ? Quelle relation géométrique doit-il exister pour cela entre les points de paramètres t_1 et t_2 ? — Comment trouverait-on la surface engendrée par les sécantes triples de la courbe donnée ?

627. — P. g. c. d. de

$$x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 5x + 2 \qquad \text{et} \qquad x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 10x + 4.$$

628. — Nature de la quadrique

$$x^2 - y^2 - z^2 - 2yz - 3zx - 4 = 0.$$

629. — Montrer que l'on a

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e + \frac{A}{x} + \frac{B + \theta}{x^2},$$

θ tendant vers 0 quand x augmente indéfiniment. Calculer A et B.

630. — Trouver une série entière y telle que $y'' = y$. Exprimer cette série à l'aide de fonctions connues : $\lambda e^{\omega x} + \mu e^{\omega^2 x} + \nu e^x$ (avec $\omega^3 = 1$). Mettre cette somme sous la forme $a + bi$.

631. — On donne la courbe

$$x = t^4, \qquad y = t^3, \qquad z = t + 1.$$

Condition pour que quatre points soient dans un même plan. Conditions pour que trois points soient sur une droite. Il faut que t_1, t_2, t_3 soient racines de $t^3 - a^3 = 0$. Équation de cette droite en fonction de a. Lieu de cette droite.

Condition pour que quatre points soient sur un cercle.

632. — Étant données les coordonnées de trois points du plan, trouver les coordonnées du centre de gravité du triangle formé par ces trois points, de l'orthocentre, et du centre du cercle circonscrit.

633. — Trouver les génératrices de l'hyperboloïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

634. — On considère l'expression $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$. Montrer qu'elle peut être égalée à l'expression $e + Ax + (B + \theta)x^2$, θ étant un infiniment petit avec x.

635. — On donne les équations

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = \frac{x_0^2}{a} + \frac{y_0^2}{b} + \frac{z_0^2}{c},$$

$$ux + vy + wz = ux_0 + vy_0 + wz_0.$$

Donner les équations paramétriques de la conique, intersection de la quadrique et du plan.

636. — On considère les deux équations

$$t^2 P + 2tQ + R = 0, \qquad t^2 P' + 2tQ' + R' = 0,$$

P, Q, R, P', Q', R' étant des trinomes linéaires et homogènes en x, y, z, coordonnées homogènes d'un point du plan. Trouver le lieu des points $A(x, y, z)$ tels que les deux équations en t, lorsqu'on y porte les coordonnées de A, aient une racine commune. La courbe est du quatrième degré et unicursale. Équations paramétriques lorsqu'on prend pour triangle de référence le triangle des points doubles. Conditions pour que les points doubles soient de rebroussement.

637. — On donne les équations $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^4$ d'une courbe gauche. Trouver la relation qui lie les t des points d'intersection avec un plan. Relation entre les coefficients du plan pour que ces points soient sur un même cercle. Interpréter cette relation géométriquement. Trouver et étudier la surface engendrée par le cercle quand le plan varie.

638. — Résoudre et discuter le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_p = b_1, \\ x_2 + x_3 + \dots + x_{p+1} = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ x_n + x_1 + \dots + x_{p-1} = b_n. \end{cases}$$

639. — Trouver la relation qui existe entre les anomalies excentriques de 4 points d'une ellipse situés sur un cercle. Conditions pour qu'elle soit vérifiée pour une valeur quelconque de φ_4.

La première condition est-elle nécessaire et suffisante ?

640. — Lieu des pôles des normales à une ellipse par rapport à un cercle ayant pour centre un foyer. Solutions analytique et géométrique.

641. — On donne sur le cercle $x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi,$ quatre points correspondant aux valeurs $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ du paramètre. — Former l'équation de la parabole qui passe par ces quatre points.

642. — On considère la conique

$$x = \frac{1}{(t-a)(t-b)}, \qquad y = \frac{t}{(t-a)(t-b)}.$$

Relation entre les t de quatre points sur un cercle. Elle est de la forme

$$a_0 + a_1S_1 + a_2S_2 + a_3S_3 + a_4S_4 = 0,$$

S_1, S_2, S_3, S_4 désignant les fonctions symétriques simples de t_1, t_2, t_3, t_4.

Pouvait-on prévoir cette forme ?

Peut-elle être vérifiée pour des valeurs quelconques de t_4 ?

643. — Construire la courbe $x = t^2 - t, \quad y = t^3 - t^2.$

Trouver la relation qui existe entre les t de 3 points en ligne droite ; de 6 points sur une conique.

644. — Toute fonction rationnelle et symétrique des racines d'une équation s'exprime rationnellement en fonction des coefficients.

645. — Calculer $\displaystyle\int_{10}^{100} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}.$

646. — Intégrer les équations

$$y'' + y = \cos^3 x, \qquad y'' + y = \sin^2 x.$$

647. — On donne $x = t^2, \ y = t$ et une conique quelconque.

Chercher les conditions pour que l'équation aux t des points de rencontre ait deux racines doubles.

648. — Définition des droites conjuguées par rapport à une quadrique. Peuvent-elles être confondues ?

649. — Axes de la quadrique

$$2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2yz + 2zx + 8xy = 1.$$

650. — On considère les quadriques homofocales à une quadrique donnée, passant par un point M.

Leur équation est $\dfrac{x^2}{a^2+\lambda} + \dfrac{y^2}{b^2+\lambda} + \dfrac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 = 0$ et donne trois valeurs de λ, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Exprimer (x, y, z) en fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Lieu de M : 1° quand on donne à λ_3 une valeur déterminée ; 2° quand on donne à λ_2 et λ_3 des valeurs déterminées ; 3° quand il y a une racine double ; 4° une racine triple.

651. — Soient $x = \dfrac{v^2+w^2}{vw}, \quad y = \dfrac{w^2+u^2}{wu}, \quad z = \dfrac{u^2+v^2}{uv}$ les coordonnées d'un point de l'espace, où u, v, w désignent des paramètres variables.

Équation de la surface lieu de (x, y, z).

Mathématiques (M. Clairin.)

652. — On considère la courbe dont l'équation cartésienne est

$$x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0.$$

Exprimer les coordonnées x, y du point courant en fonctions rationnelles d'un paramètre. Donner les relations qui lient les paramètres des points de rencontre avec une droite ; avec un cercle. Soient O l'origine, M le point courant. Trouver l'enveloppe de la perpendiculaire élevée en M à MO quand le point M décrit la courbe.

Combien passe-t-il de cercles osculateurs à la courbe par un point M en dehors du cercle osculateur en M ? Montrer que leurs points de contact sont sur un cercle passant par le point M. On considère dans l'équation de la courbe a comme un paramètre variable. Former l'équation différentielle du faisceau de courbes que l'on obtient ainsi et trouver les trajectoires orthogonales de ces lignes.

653. — On donne une parabole et des rayons perpendiculaires à l'axe. Trouver l'enveloppe des rayons réfléchis (caustique) ; la construire et la rectifier.

654. — Trouver un polynome du 7e degré, $f(x)$, tel que $f(x)+1$ soit divisible par $(x-1)^4$ et $f(x)-1$, par $(x+1)^4$.

655. — On considère une ellipse. Un point matériel décrit cette ellipse sous l'action d'une force passant par le centre. Trouver la force.

656 — Trouver les courbes gauches satisfaisant à la relation différentielle

$$xdy - ydx = kdz.$$

Si on considère un point A sur l'une d'elles, les divers plans osculateurs passant par ce point A ont leurs points de contact dans un même plan passant par A. Cas particulier : la cubique gauche. Démontrer géométriquement sur elle la propriété énoncée ci-dessus.

657. — Construire la courbe

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

Donner des équations paramétriques rationnelles de la courbe. Trouver l'aire comprise à l'intérieur de cette courbe. Trouver le volume intérieur à la surface engendrée par la rotation de cette courbe autour de l'axe des x.

658. — Trouver un polynome en x du $n^{\text{ième}}$ degré divisible par sa dérivée, qui soit nul pour $x = 1$ et prenne la valeur 1 pour $x = 2$.

659. — On considère la courbe

$$xy = a^2.$$

On demande la relation qui lie les abscisses des quatre points de rencontre avec un cercle. On donne de plus une parabole admettant pour axe l'axe des x, dont le paramètre est donné, et dont le sommet glisse sur l'axe des x. On demande l'enveloppe des sécantes communes à l'hyperbole et à la parabole.

660. — On considère la surface

$$\frac{x^2}{a^2 - z^2} + \frac{y^2}{b^2 - z^2} = \frac{z}{h}.$$

On demande la nature des sections par des plans parallèles au plan des xy. Quel est le volume compris entre la surface, le plan $z = 0$ et le plan $z = b$?

661. — Trouver la podaire de la parabole

$$y^2 - 2px = 0$$

relativement à son sommet. La construire. Donner des équations paramétriques rationnelles de cette courbe (on prendra pour paramètre le coefficient angulaire du rayon vecteur allant de l'origine au point courant). Trouver les relations qui lient les paramètres des points de rencontre avec une droite, avec un cercle. En déduire que si l'on considère tous les cercles passant par deux points fixes de la courbe, la corde qui joint les deux autres points de rencontre de chacun d'eux avec la courbe coupe cette courbe en un troisième point qui est fixe. Trouver l'aire d'un triangle curviligne limité à la courbe et à deux rayons vecteurs issus du point double.

662. — Trouver une courbe telle que le segment déterminé sur l'axe des x par la tangente et la normale en un point quelconque soit constant. (On prendra pour paramètre l'angle que fait la tangente au point courant avec l'axe des x). Trouver l'aire d'un trapèze curviligne, limité à l'axe des x, à deux ordonnées quelconques et à la courbe. L'aire comprise entre la courbe et l'axe des x est elle finie ou infinie ?

663. — On donne un cercle ayant pour centre l'origine des coordonnées O. Il est coupé en A par l'axe des y. Par le point courant M du cercle, on mène une parallèle à l'axe des y, sur laquelle on porte une longueur MP, égale à la longueur de l'arc AM, affectée du signe (+) si AM est un arc positif, du signe (−) dans le cas contraire. Trouver les équations paramétriques de la courbe engendrée par le point P, en fonction de l'angle $\varphi = (OA, OM)$. Quelle est la tangente en A, la tangente au point P correspondant à la valeur $+\frac{\pi}{2}$ du paramètre φ ?

664. — Lieu des contacts des tangentes issues d'un point du plan à un cercle variable passant par deux points fixes. Détermination analytique et géométrique de la courbe. Représentation paramétrique. Relation entre les paramètres des points de rencontre avec une droite.

665. — Condition pour que les racines d'une équation du troisième degré soient les tangentes des demi-angles d'un triangle, les tangentes des angles ou les sinus.

666. — Trouver les courbes telles que l'ordonnée Y du centre de courbure soit proportionnelle à l'ordonnée du point. — Cas où $Y = -y$. — Trouver l'équation différentielle des courbes telles que l'on ait $s^2 = 8ay$. Montrer que ce sont les mêmes courbes que précédemment.

667. — On donne un point P, une sécante variable PAB coupant les axes en A et B. On considère la famille de paraboles tangentes aux axes en A et B. Lieu des points communs aux paraboles dont les axes font un angle de 45°.

668. — Équation de la corde commune à une ellipse et à son cercle osculateur. — Enveloppe.

669. — Lieu des milieux des segments interceptés sur les normales à une parabole par l'axe et la tangente au sommet.

670. — Équation générale des paraboles osculatrices en un point donné à une ellipse donnée.

671 — Soit la courbe $x = kt^2$, $y = kt^3 - at$. Rayon de courbure. Surface de la boucle. Volume qu'elle engendre en tournant autour de Ox. Supposant a constant et k variable, trouver les trajectoires orthogonales de la famille obtenue.

672. — Trajectoires orthogonales des chainettes déduites par translation parallèle à Ox de $y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$.

673 — Développante de la chainette.

674. — Courbes telles que le rayon de courbure soit proportionnel au carré de l'ordonnée.

675. — Courbes dont l'aire d'un secteur est proportionnel à l'arc.

676. — Cycloïde $x = R(u - \sin u)$, $y = R(1 + \cos u)$. Relation entre l'ordonnée et l'arc. Centre de gravité de l'arc de cycloïde compris entre deux points de rebroussement.

677. — Un point M décrit une chainette de manière que sa projection m sur Ox ait un mouvement uniforme. La

force n'étant fonction que de la distance à Ox, trouver cette force. Centre de gravité de l'aire limitée par la courbe, les deux axes et Mm.

678. — Soit une ellipse et un point P dans son plan. Lieu des sommets des cônes ayant pour base l'ellipse et dont un axe passe par P.

679. — Étudier l'intersection d'un cône de révolution autour de Oz avec un cylindre parallèle à Oz ayant pour base une spirale logarithmique.

680 — On considère la famille d'hélices coniques tracées sur un cône. Trouver les courbes qui les rencontrent sous un angle constant — Rectifier l'hélice conique.

681. — Hélice $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = kt$. — Rectification. — Rayon de courbure.

Physique (M. Bouasse).

682. — Détermination expérimentale des éléments d'un système optique centré. Réglage d'une lunette. Réglage d'un collimateur.

683 — Champ magnétique terrestre. Manière dont il varie dans l'espace. Déclinaison, inclinaison.

684 — Objectif photographique. Rotation d'un système optique centré autour d'un axe passant par le 2e point nodal. Application à la photographie panoramique. Profondeur du champ.

685 — Principe de la mesure des indices par la réflexion totale.

686. — Aplanétisme du prisme.

687. — Densités des vapeurs. Diverses méthodes expérimentales pour les déterminer. Méthode de Meyer. Quelle quantité approximative de liquide doit-on mettre dans l'appareil de Meyer?

688. — Densités des liquides par la méthode du flacon. Méthodes pratiques. Déshydratation des liquides. Prix de revient de quelques liquides usuels.

689. — Principe des électromètres à cadran.

690. — Reconnaître, sur une photographie d'un spectre électrique présentée au candidat, comment le spectre avait été obtenu. Dessiner des spectres usuels. Lignes de force. Théorème de Gauss. Condensateurs cylindriques. Capacités.

691. — Balance (sensibilité, etc... sans calculs). Construction des balances de précision.

692. — Méthode de Poggendorff pour la mesure des angles. Différents modes opératoires pour appliquer le principe de cette méthode. Discuter les erreurs. Divers appareils et expériences où cette méthode trouve une application. Expérience classique d'acoustique basée sur un principe analogue (flammes vibrantes). — Incidemment: phénomène du mirage.

693. — Electromètre absolu. Formule de l'appareil. Appareils simples basés sur le même principe (Abraham et Lemoine) Comment doit-on modifier la formule, si on a entre les deux plateaux un isolant autre que l'air, tel que l'essence de térébenthine, dont le pouvoir inducteur spécifique n'est pas égal à l'unité.

694 — Réseaux d'isothermes. — Formule de Van der Waals.

695. — Vernier. — Palmer. — Sphéromètre.

EXAMENS DE 1906 (*Suite.*)

CERTIFICAT D'ÉTUDES SUPÉRIEURES (*Grenoble, juillet 1906.*)

Mathématiques générales.

Épreuve théorique.

1586. — 1° Intégrer l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = y\sqrt{1 - y^2}.$$

2° Montrer que la courbe intégrale qui passe par le point $x = 0$, $y = 1$, peut être représentée par les équations

$$x = \mathrm{L}\,\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}, \qquad y = \sin t.$$

Construire cette courbe.

3° Calculer l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des x, l'axe des y et la droite $x = a$. Limite de cette aire lorsque a croît indéfiniment.

4° Expression du rayon de courbure de la courbe en un point, au moyen de la valeur du paramètre t qui correspond à ce point.

5° En conclure les coordonnées des points d'inflexion de la courbe.

6° Volume du solide limité par la surface engendrée par la courbe en tournant autour de Ox.

Épreuve pratique.

I. — Évaluer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}+1-x^2}.$$

II. — Montrer que l'équation $e^{-x}-x=0$ n'a qu'une racine. Calculer cette racine à $\frac{1}{100}$ près.

III. — Étant donnée la surface (P) représentée par $z=x^2+y^2$, on considère le solide formé par la portion de l'espace comprise entre la surface (P), le plan des xy, le cylindre $y=x^2$ et le plan $z=1$. Volume de ce solide.

QUESTION PROPOSÉE

1587. — On donne deux droites horizontales D et D′, rectangulaires et ne se rencontrant pas. Sur ces droites se meuvent sans frottement deux points matériels pesants M et M′, qui s'attirent l'un l'autre proportionnellement à leur distance.

1° Déterminer les mouvements des points M et M′. Former les équations du mouvement du centre de gravité des points M et M′. Comment doit on choisir le rapport des masses des points M et M′ pour que le mouvement de ce point soit périodique ? Montrer qu'alors sa trajectoire est une courbe algébrique.

2° Est-il possible de choisir le rapport des masses des points M et M′ et les conditions initiales des mouvements de ces points pour que la longueur MM′ reste constante ?

3° En supposant que les points M et M′ aient des masses égales, étudier la variation de la distance MM′.

4° En supposant encore que les points M et M′ aient des masses égales, déterminer la surface engendrée par la droite MM′. Montrer qu'il est possible de choisir les conditions initiales des mouvements des points M et M′ de façon que cette surface se décompose Déterminer le contour apparent horizontal de cette surface. Le construire, avec cette condition que le point M′ ait une vitesse nulle à l'instant où le point M passe au pied de la perpendiculaire commune à D et à D′. Montrer que cette courbe est, en général, la développée d'une ellipse. Cas d'exception.

Ch. Michel.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE CENTRALE (*Concours de 1906, fin.*

1515. — *Évaluer en dynes la force, due à la pesanteur, appliquée à un corps pesant un kilogramme. L'accélération de la pesanteur est de* 981 *centimètres par seconde.*

Application. — *Une sphère ayant un centimètre de rayon, formée d'une matière homogène pesant* 2 *tonnes,* 7 *par mètre cube, est suspendue à un fil, de masse négligeable, attaché à un point* O. *Elle est maintenue en équilibre par une force* F *horizontale et rencontrant la verticale de* O, *dans une position telle que le fil fasse* 30° *avec la verticale de* O.

Évaluer F *en dynes.*

Partant de la formule $F=m\gamma$ et faisant $m=1000$, $\gamma=981$, on a, en dynes,

$$F=1000\times 981=981\,000.$$

Application. — La sphère étant en équilibre sous l'action de son poids P, de la force horizontale F et de la tension T du fil, ces trois forces sont dans un même plan et leurs directions concourent en un point A. De plus, on a

$$F = T \sin 30^\circ, \qquad P = T \cos 30^\circ,$$

d'où
$$\frac{F}{P} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \text{et} \qquad F = P\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Tout revient à évaluer P en dynes. Commençons par évaluer le volume de la sphère en mètres cubes

$$V = 1^{mc}\frac{4}{3}\pi \times 10^{-6};$$

nous en déduirons le poids en tonnes : $2^t,7 \times \frac{4}{3}\pi \times 10^{-6}$,

puis le poids en kilogrammes : $2\,700^{kg} \times \frac{4}{3}\pi \times 10^{-6}$

et enfin le poids P en dynes :

$$P = 981\,000 \times 2\,700 \times \frac{4}{3}\pi \times 10^{-6} = \frac{4}{3}\pi \times 2{,}7 \times 981.$$

On en déduit

$$F = \frac{4}{3}\pi \times 2{,}7 \times 981 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 6405{,}6 \text{ dynes.}$$

Solutions exactes de MM. Cotty André, lycée de Dijon ; Croze ; G. Foucry ; H. Janois, à Nantes.

1516. — *Les axes Oxyz sont rectangulaires. Une droite Δ qui, à l'instant 0, a pour équations $x = a$, $y = 0$, tourne autour de Oz avec une vitesse angulaire constante ω. Un point P se meut sur Δ de telle manière que sa cote soit donnée en fonction du temps t par la relation $z = b\cos(2\omega t + \varphi)$. Ce point P décrit, dans l'espace Oxyz, une trajectoire C.*

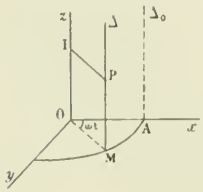
1° *Étudier comment varie la grandeur de l'accélération de P avec la position de P sur C et construire le vecteur accélération pour une position donnée de P.*

2° *Construire les différentes formes de la projection orthogonale c de C sur le plan xOz, suivant les valeurs de φ, et indiquer par des flèches le sens dans lequel c est parcouru par la projection p de P. Équation de c pour $\varphi = 0$.*

3° *Montrer que la discussion précédente fournit les différentes formes de la projection orthogonale c_1 de C sur un plan passant par Oz et faisant l'angle θ avec Ox et qu'elle prouve en particulier que C est l'intersection de deux cylindres paraboliques égaux dont les génératrices sont parallèles à xOy et perpendiculaires entre elles.*

Former les équations de ces deux cylindres.

1. Les coordonnées du point P à l'instant t ont pour expressions



$$(C) \quad x = a\cos\omega t, \qquad y = a\sin\omega t, \qquad z = b\cos(2\omega t + \varphi).$$

On en déduit les composantes de l'accélération de ce point, savoir :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -a\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 y,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -4b\omega^2\cos(2\omega t + \varphi) = -4\omega^2 z.$$

Ces formules montrent que le vecteur accélération est la somme géomé-

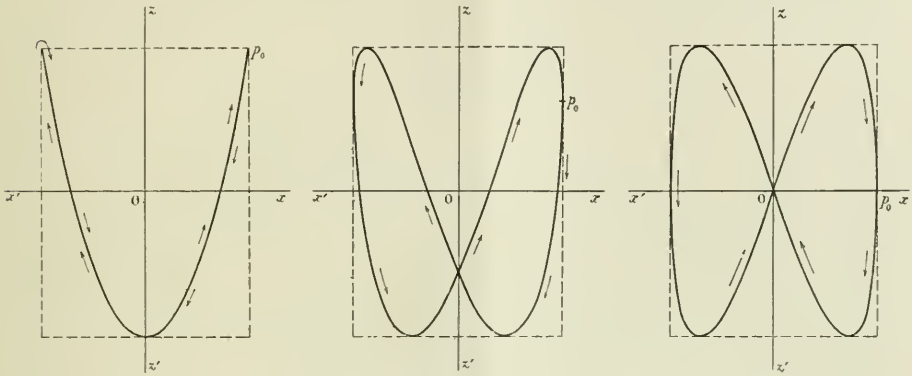
trique d'un vecteur $\omega^2\overline{PI}$ porté par la normale PI au cylindre de révolution engendré par la droite Δ et d'un vecteur $4\omega^2\overline{PM}$ porté par la droite Δ. La grandeur γ de cette accélération est donnée par la formule

$$\gamma^2 = \omega^4(x^2 + y^2 + 16z^2) = \omega^4(a^2 + 16z^2).$$

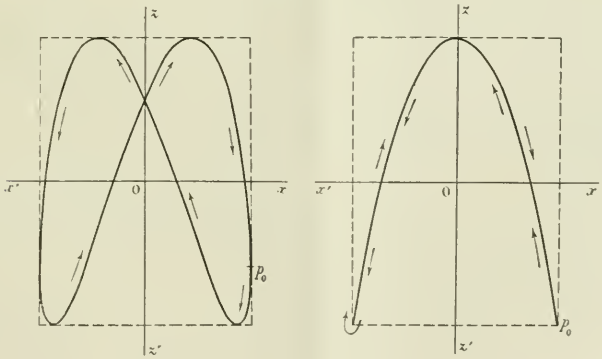
Elle varie dans le même sens que la valeur absolue de z, entre un minimum $\gamma_m = \omega^2 a$ (pour $z = 0$) et un maximum $\gamma_M = \omega^2\sqrt{a^2 + 16b^2}$ pour $z = \pm b$.

2. La projection orthogonale C de la trajectoire du point P sur le plan xOz est définie par les équations

(C) $$x = a\cos\omega t \qquad z = b\cos(2\omega t + \varphi).$$



$\varphi = 0$ $\qquad$ $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$



$\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ $\qquad$ $\varphi = \pi$

La discussion de cette courbe ne présente aucune difficulté ; elle fournit les cinq dispositions ci-dessus, en supposant φ compris entre 0 et π.

(1° $\varphi = 0$; 2° $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$; 3° $\varphi = \frac{\pi}{2}$; 4° $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ et 5° $\varphi = \pi$.)

Si on remplaçait φ par $\varphi + \pi$, z se changerait en $-z$: donc pour les valeurs de φ comprises entre π et 2π, on aurait des courbes symétriques des précédentes par rapport à l'axe des x.

Pour $\varphi = 0$, la courbe C se réduit à un arc de parabole ; d'après la remarque précédente, il en est de même pour $\varphi = \pi$. La parabole qui correspond à $\varphi = 0$ a pour équation $\frac{z}{b} = 2\frac{x^2}{a^2} - 1$ et celle qui correspond à $\varphi = \pi$, $\frac{z}{b} = 1 - \frac{2x^2}{a^2}$.

On peut déterminer les points d'inflexion de la courbe C. Le coefficient angulaire de la tangente en un point de cette courbe étant

$$m = \frac{z'_t}{x'_t} = \frac{2b}{a} \cdot \frac{\sin(2\omega t + \varphi)}{\sin \omega t},$$

on a à chercher le maximum ou le minimum de

$$U = \frac{\sin(2\omega t + \varphi)}{\sin \omega t},$$

ce qui conduit à l'équation

$$2 \sin \omega t \cos(2\omega t + \varphi) - \cos \omega t \sin(2\omega t + \varphi) = 0,$$

ou, en remplaçant ωt par θ pour simplifier l'écriture, et développant

$$2 \sin \theta [\cos 2\theta \cos \varphi - \sin 2\theta \sin \varphi] - \cos \theta [\sin 2\theta \cos \varphi + \cos 2\theta \sin \varphi] = 0;$$

ce qui donne tous calculs faits

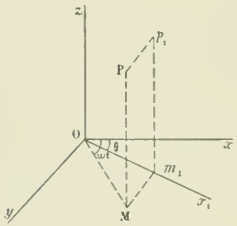
$$\operatorname{cotg}^3 \theta + 3 \operatorname{cotg} \theta + 2 \operatorname{cotg} \varphi = 0.$$

Cette équation du troisième degré en $\operatorname{cotg} \theta$ a une seule racine réelle

$$(4p^3 + 27q^2 = 4 \times 27 + 27.4 \operatorname{cotg}^2 \varphi > 0),$$

de signe contraire à $\operatorname{cotg} \varphi$, savoir : $\operatorname{cotg} \theta = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} - \sqrt[3]{\operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}}$.

3. Soit zOx_1 un plan passant par Oz et faisant avec Ox l'angle $\theta = (Ox, Ox_1)$; les coordonnées du point p_1, projection de P sur ce plan, sont



$$x_1 = a \cos(\omega t - \theta), \qquad z = b \cos(2\omega t + \varphi).$$

Si on pose $\omega t - \theta = \omega t'$, ces formules deviennent

$$x_1 = a \cos \omega t', \qquad z = b \cos[2\omega t' + 2\theta + \varphi].$$

Supposons que la courbe C corresponde à la valeur φ_0, d'ailleurs quelconque, du paramètre φ ; sa projection c_1 sur le plan zOx_1 sera définie par les équations

$$(c_1) \qquad x_1 = a \cos \omega t', \qquad z = b \cos[2\omega t' + \varphi'],$$

en posant $\varphi' = \varphi_0 + 2\theta$; l'angle θ variant de 0 à π, φ' variera de φ_0 à $\varphi_0 = 2\pi$ et les différentes formes de la courbe projection c_1 ne seront pas autre chose que les formes trouvées plus haut pour la courbe C quand φ varie entre 0 et 2π.

Cette courbe c_1 se réduira à un arc de parabole :

1° pour $\varphi' = \varphi_0 + 2\theta = 0$, d'où $\theta = -\frac{\varphi_0}{2}$;

2° pour $\varphi' = \varphi_0 + 2\theta = \pi$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_0}{2}$.

La courbe C est donc l'intersection des deux cylindres paraboliques de génératrices parallèles au plan xOy, qui ont respectivement pour sections droites ces deux paraboles situées dans deux plans rectangulaires.

L'équation du premier cylindre $(\varphi' = 0)$ dans le système d'axes Ox_1y_1z serait

$$\frac{z}{b} = 2\frac{x_1^2}{a^2} - 1;$$

mais on a $$x_1 = a\cos(\omega t - \theta) = x\cos\theta + y\sin\theta,$$

et comme on suppose $$\theta = -\frac{\varphi_0}{2}, \qquad x_1 = x\cos\frac{\varphi_0}{2} - y\sin\frac{\varphi_0}{2},$$

on a pour équation de ce premier cylindre

$$\frac{z}{b} = 2\frac{\left(x\cos\frac{\varphi_0}{2} - y\sin\frac{\varphi_0}{2}\right)^2}{a^2} - 1.$$

De même, l'équation du second cylindre par rapport aux axes Ox_1y_1z correspondant à l'hypothèse $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_0}{2}$ étant

$$\frac{z}{b} = 1 - 2\frac{x_1^2}{a^2} \qquad \text{avec} \qquad x_1 = x\sin\frac{\varphi_0}{2} + y\cos\frac{\varphi_0}{2},$$

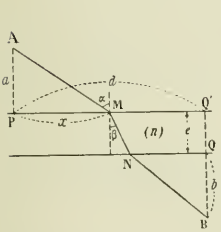
on aura pour équation du second cylindre

$$\frac{z}{b} = 1 - 2\frac{\left(x\sin\frac{\varphi_0}{2} + y\cos\frac{\varphi_0}{2}\right)^2}{a^2}.$$

P. L.

Bonnes solutions de MM. Gaston Bresse, à Vic-Exemplet (Indre); Cotty André, lycée de Dijon; G. Fouchy, à Roanne; H. Janois, à Nantes.

1517. — *Étant donnés deux points* A *et* B *dans l'air et une lame de verre à faces parallèles d'épaisseur e interposée, on définit la position de ces points par leurs distances respectives* $AP = a$ *et* $BQ = b$ *aux faces d'incidence et d'émergence de la lame et par la distance* $PQ' = d$ *des projections des points* A *et* B *sur l'une des faces.*



Un rayon de lumière monochromatique pour lequel l'indice relatif du verre est n suivra la route AMNB *que l'on demande de déterminer en établissant l'équation qui fait connaître la distance* $PM = x$ *du point d'incidence au pied de la perpendiculaire* AP.

Que devient cette équation dans le cas où le point B *vient sur la surface d'émergence? Dans ce cas particulier, et sachant que la lumière passe du point* A *au point* B *dans le temps minimum, déterminer la relation qui existe entre les vitesses* V *et* V' *de la lumière dans l'air et dans le verre d'une part, et les angles* α *et* β *que font avec la normale au point* M *les rayons* AM *et* MN *d'autre part.*

Écrivons que la distance d est la somme des projections des longueurs AM, MN et NB :

$$d = x + e\,\mathrm{tg}\,\beta + b\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

D'autre part, on a $$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{x}{a} \quad \text{et} \quad \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = \frac{x}{n\sqrt{a^2 + x^2}},$$

d'où l'on déduit $$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{x}{\sqrt{(n^2 - 1)x^2 + n^2a^2}}.$$

Remplaçons $\mathrm{tg}\,\alpha$ et $\mathrm{tg}\,\beta$ en fonction de x, il vient

$$d = x + \frac{ex}{\sqrt{(n^2 - 1)x^2 + n^2a^2}} + \frac{b}{a}x,$$

équation qui, mise sous forme entière, est du quatrième degré.

Si le point B est sur la face d'émergence, $b = 0$ et on a

$$d - x = \frac{ex}{\sqrt{(n^2 - 1)x^2 + n^2a^2}}.$$

COTTY.

Le temps employé, dans ce dernier cas, par la lumière pour aller de A en B est

$$\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{V} + \frac{\sqrt{e^2 + (d - x)^2}}{V'}.$$

Pour exprimer que ce temps est minimum, écrivons que sa dérivée est nulle ; il vient

$$\frac{1}{V}\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{V'}\frac{d - x}{\sqrt{e^2 + (d - x)^2}},$$

d'où

$$\frac{1}{V}\sin\alpha = \frac{1}{V'}\sin\beta.$$

DE FARIA.

1518. — 1° *On fait passer un courant de chlore jusqu'à refus dans de l'eau tenant en suspension 1 gramme de phosphure d'hydrogène solide. Quand il a complètement disparu on évapore à sec dans une capsule de porcelaine, puis on chauffe au rouge sombre. Écrire les réactions et calculer la masse du résidu.*

2° *On chauffe 1 gramme du même phosphure solide avec un excès de cuivre pur. Dire ce qui se forme et quel gaz se dégage. En calculer le volume et la masse.*

3° *Expliquer comment on utiliserait ces deux expériences pour déterminer la composition centésimale du phosphure d'hydrogène solide. Établir cette composition en masses.*

Chaque candidat reçoit un tableau des poids atomiques.

1° Le chlore transforme le phosphure solide en acide orthophosphorique et acide chlorhydrique, comme l'indique l'équation

$$P^4H^2 + 11Cl^2 + 16H^2O = 4PO^4H^3 + 22HCl.$$

L'évaporation à sec élimine l'acide chlorhydrique et le chauffage au rouge transforme l'acide orthophosphorique en acide métaphosphorique :

$$4PO^4H^3 = 4H^2O + 4PO^3H.$$

D'après ces formules, P^4H^2, c'est-à-dire 126^g de phosphure, laisse comme résidu $4PO^3H$, c'est-à-dire 320^g d'acide métaphosphorique ; donc 1^g de phosphure donne $\frac{320}{126} = 2^g,54$ d'acide métaphosphorique.

2° Si l'on chauffe le phosphure avec du cuivre, il se forme du phosphure de cuivre et l'hydrogène se dégage :

$$P^4H^2 + 6Cu = 2P^2Cu^3 + H^2.$$

D'après cette formule, 126^g de phosphure dégagent $22\,400^{cm3}$ ou 2^g d'hydrogène. Donc 1 gramme dégagera $\frac{22\,400}{126} = 178^{cm3}$ ou $\frac{2}{126} = 0^g,016$.

3° La dernière expérience permet de déterminer le volume et, par suite, la masse de l'hydrogène ; on trouvera donc $0^g,016$.

La première fait connaître le poids du phosphore, car $2^g,54$ d'acide métaphosphorique contiennent $2.54 \times \frac{31}{80} = 0^g,984$ de phosphore.

On constatera que la somme de ces deux poids est bien égale à 1 gramme et on en conclura que la substance considérée ne contient que du phosphore et de l'hydrogène.

COTTY.

1520. — *Dans le triangle* ABC *on donne les longueurs* b, c, h *des côtés* AC, AB *et de la hauteur* AD.

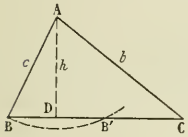
1° *Former l'équation qui donne la longueur* a *du côté* BC.

2° *Former et discuter l'équation qui donne* cos A.

3° *Comparer l'angle* A *à un droit et construire le triangle dans le cas limite.*

4° *Construire le triangle* ABC *dans lequel on connaît les longueurs* b, c, h.

On a, entre a, cos A et les données, les deux relations



$$(1) \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

$$(2) \qquad ah = bc\sin A.$$

Éliminant l'angle A, il vient :

$$(b^2 + c^2 - a^2)^2 + 4a^2h^2 = 4b^2c^2.$$

On a ainsi l'équation qui donne la longueur a du côté BC

$$a^4 - 2(b^2 + c^2 - 2h^2) + (b^2 - c^2)^2 = 0,$$

d'où

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2h^2 \pm 2\sqrt{(b^2 - h^2)(c^2 - h^2)}$$

et

$$a = \sqrt{b^2 - h^2} \pm \sqrt{c^2 - h^2}$$

en supposant $b > c$ pour fixer les idées et $b > c > h$, condition évidente *a priori*.

On en déduit les valeurs correspondantes de cos A,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{h^2 \mp \sqrt{(b^2 - h^2)(c^2 - h^2)}}{bc};$$

ces valeurs de cos A sont réelles puisqu'on a supposé $b > c > h$, il reste à vérifier qu'elles sont comprises entre -1 et $+1$, ce qui exige que

$$\sqrt{(b^2 - h^2)(c^2 - h^2)} < bc - h^2, \qquad \sqrt{(b^2 - h^2)(c^2 - h^2)} < bc + h^2.$$

La première de ces inégalités entraînant la seconde, et $bc - h^2$ étant positif ($b > h$, $c > h$, donc $bc > h^2$), on a à vérifier que

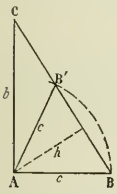
$$(b^2 - h^2)(c^2 - h^2) < (bc - h^2)^2 \qquad \text{ou} \qquad b^2c^2 - h^2(b^2 + c^2) + h^4 < b^2c^2 - 2h^2bc + h^4$$

ou enfin

$$h^2(b - c)^2 > 0,$$

ce qui a évidemment lieu.

Pour comparer A à un angle droit, il suffit d'étudier le signe de cos A. L'une des valeurs est toujours positive et correspond à un angle aigu, l'autre sera positive, nulle ou négative suivant que



$$h^2 >, = \text{ou} < \sqrt{(b^2 - h^2)(c^2 - h^2)}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{h^2} >, = \text{ou} < \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Le cas limite est celui où $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. L'un des triangles répondant à la question est rectangle et a pour côtés b et c ; soit ABC ce triangle. En décrivant de A comme centre avec $AB = c$ comme rayon un arc de cercle jusqu'à la rencontre en B' avec l'hypoténuse BC, on détermine le troisième sommet du triangle AB'C répondant également à la question.

La construction dans le cas général ne présente aucune difficulté ; on commencera par construire le triangle rectangle ADC($AD = h$, $AC = b$) et on décrira de A comme centre avec c comme rayon un arc de cercle qui coupera ($c > h$) le côté DC aux deux points B et B'. Les deux triangles ABC, AB'C sont les deux solutions du problème.

P. L.

Solutions de MM. G. Foucay, à Roanne ; H. Janois, à Nantes ; R. Manen, à Albi.

1521. — *Calculer l'élongation x, au temps 38 secondes, dans le mouvement rectiligne défini par l'équation :*

$$x = a \cos(\omega t + \alpha),$$

$$\omega = 0{,}25, \qquad \alpha = \frac{\pi}{5} \text{ (C. G. S.)}, \qquad a = (0{,}27678)^{\frac{4}{5}}.$$

Évaluons d'abord l'arc $\omega t + \alpha$ en parties du rayon :

$$\omega t + \alpha = 0{,}25 \times 38 + \frac{\pi}{5} = 9{,}5 + \frac{\pi}{5}.$$

Soit n le nombre de degrés correspondant, on aura

$$\frac{n}{180} = \frac{9{,}5 + \frac{\pi}{5}}{\pi} = \frac{9{,}5}{\pi} + \frac{1}{5},$$

d'où

$$n = 180\left(\frac{9{,}5}{\pi} + \frac{1}{5}\right).$$

Effectuant le calcul, on trouvera

$$\omega t + \alpha = 580^\circ\, 18'\, 35'',6.$$

Il sera plus commode de se servir de la division centésimale du cercle. Soit N le nombre de grades contenu dans l'arc $\omega t + \alpha$:

$$\frac{N}{200} = \frac{9{,}5 + \frac{\pi}{5}}{\pi} = \frac{9{,}5}{\pi} + \frac{1}{5},$$

d'où

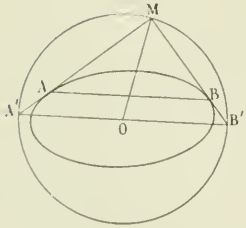
$$N = 200\left(\frac{9{,}5}{\pi} + \frac{1}{5}\right) = 644{,}7888.$$

Effectuant le calcul par logarithmes, on trouve

$$x = -0{,}27288.$$

P. L.

GÉOMÉTRIE



1548. — *On considère deux tangentes rectangulaires à une ellipse* MAA′ *et* MBB′, A *et* B *étant les points de contact avec l'ellipse,* A′ *et* B′ *leurs points de rencontre avec le cercle de Monge ; démontrer que l'on a*

$$\frac{MA}{MA'} = \frac{MB}{MB'}.$$

La droite OM passe au milieu de AB, puisqu'elle joint le centre de l'ellipse au pôle de AB. D'ailleurs le point O est le milieu de A′B′, puisque l'angle M est droit.

Donc AB et A′B′ sont parallèles, et la propriété est évidente.

A. SAINTE-LAGÜE, élève de l'École normale supérieure.

Bonnes solutions : MM. J., à Poitiers ; A. Darmon ; J.-D. Dufaut, à Poitiers ; A. Cotty, à Dijon ; E. Devoucoux, à Bourges ; Amblard ; Lamotte, lycée Janson ; J. Bellon, à Lyon ; E.-N. Barisien ; R. Lafosse ; L. Sire, à Nancy ; G. Fougry, à Roanne ; H. Janois, à Nantes ; F. Simon, à Paris.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

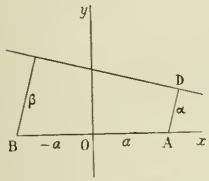
1543. — *Une droite* D *se déplace dans un plan donné, de façon que ses distances* α et β *à deux points* A *et* B *du plan soient liées par une relation de la forme*

$$M\alpha^2 + 2N\alpha\beta + P\beta^2 = k,$$

k désignant une constante.

Trouver l'enveloppe de la droite D, *ainsi que la condition pour que l'un des deux points* A *ou* B *soit un foyer de l'enveloppe.*

Prenons pour origine le milieu de AB, OA pour axe des x et une perpendiculaire au milieu pour axe des y, puis désignons OA par a. Si nous désignons par



$$ux + vy + w = 0$$

l'équation de la droite D, nous aurons

$$\alpha = \frac{au + w}{\sqrt{u^2 + v^2}} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{-au + w}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

En portant ces valeurs dans la relation

$$M\alpha^2 + 2N\alpha\beta + P\beta^2 = k,$$

nous aurons

$$M(au + w)^2 + 2N(au + w)(-au + w) + P(-au + w)^2 = k(u^2 + v^2);$$

ceci représente l'équation tangentielle de l'enveloppe de la droite D; cette enveloppe est donc une conique.

Pour que le point A soit un foyer, il faut que les tangentes issues de ce point soient les droites isotropes, c'est-à-dire que l'équation tangentielle se réduise à $u^2 + v^2 = 0$, si l'on y fait $au + w = 0$; ceci exige que P soit nul. De même, le point B sera foyer, si M est nul et seulement dans ce cas. Enfin les deux points seront les deux foyers de la conique, si l'on a à la fois M et P nuls; dans ce cas, la relation devient $\alpha\beta = C^{te}$ et l'on retombe sur une propriété connue.

G. PÉLISSIER, à Toulouse.

Bonnes solutions : MM. J. Vernaux, à Mons ; J. Lhermitte, à Caen ; G. Cotty, à Dijon.
Assez bonnes solutions : MM. P. Brizard, G. Foucry, à Roanne.

Autre solution. — Soient u et v les coordonnées parallèles de la droite D rapportée aux axes Au et Bv menés perpendiculairement à AB. On a (d'Ocagne, *Coordonnées parallèles et axiales*, p. 14), en appelant d la distance AB,

$$\alpha = \frac{ud}{\sqrt{d^2 + (v - u)^2}}, \qquad \beta = \frac{vd}{\sqrt{d^2 + (v - u)^2}}.$$

L'équation en u et v de l'enveloppe est donc

$$(Mu^2 + 2Nuv + Pv^2)d^2 = k[d^2 + (v - u)^2],$$

qui représente une conique.

Les tangentes menées de A, ou $u = 0$, à cette enveloppe sont déterminées par l'équation

$$Pv^2d^2 = k(d^2 + v^2),$$

et, puisque, pour chacune d'elles le coefficient angulaire m, rapporté à l'axe AB, est donné par

$$v = md,$$

l'équation aux coefficients angulaires de ces tangentes est

$$Pm^2d^4 = kd^2(1 + m^2).$$

Pour que le point A soit un foyer, il faut que ces coefficients angulaires satisfassent à l'équation

$$1 + m^2 = 0,$$

et, par suite, que $P = 0$.

De même le point B sera un foyer si $M = 0$.

Les points A et B seront donc tous deux des foyers si on a, à la fois, $M = P = 0$. En ce cas, la relation entre les distances α et β se réduit à

$$2N\alpha\beta = k,$$

qui exprime un résultat bien connu.

Nota. — Si l'on forme les quantités (*Loc. cit.*, p. 25),

$$\Gamma = (M + 2N + P)d^2 - 4k,$$

$$\Delta = -kd^4[(N^2 - MP)d^2 + (M - 2N + P)k],$$

l'enveloppe obtenue est une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant que $\Gamma\Delta < 0$, $\Gamma = 0$ ou $\Gamma\Delta > 0$.

(U. V.)

QUESTIONS PROPOSÉES

1588. — On donne (en axes rectangulaires) un cercle C d'équation $x^2 + y^2 - 4ax + 3ay = 0$ et la droite Δ d'équation $x = 2a$.

Une sécante menée par l'origine O des coordonnées coupe le cercle C en I et la droite Δ en I'. On prend sur cette sécante un vecteur OM équipollent à II'.

1° Trouver et construire le lieu du point M.

2° Ce lieu rencontre Ox en un point A autre que l'origine. On mène par ce point une sécante AHH'P qui rencontre la courbe en H et H' et l'asymptote en P.

Le point P se déplace sur l'asymptote suivant la loi de mouvement $s = \overline{BP} = v_0 t$. (B étant le point de rencontre de l'asymptote et de Ox.)

Former les équations du mouvement relatif du point H' pour un observateur entraîné avec le point H dans un mouvement de translation.

Construire la trajectoire apparente du mouvement de H'.

3° Mouvement du point H' pour un observateur placé en H' et entraîné avec la droite AHH'.

J. Demeunynck.

1589. — On considère un triangle isocèle ABC, dont l'un des côtés égaux, AB, est fixe et dont l'autre, BC, pivote autour du point B. On demande le lieu du centre du cercle des neuf points de ce triangle. Construire ce lieu et trouver la surface de la boucle et aussi celle qui est comprise entre la courbe et l'asymptote.

R. Manen, à Albi.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

17e Année. N° 8. Mai 1907.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR QUELQUES APPLICATIONS DE LA MÉCANIQUE A LA GÉOMÉTRIE

par M. **Ch. Michel**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Dijon.

1. Soient trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy et Oz et, sur l'axe Ox, trois points, A_1, A_2, A_3, d'abscisses a_1, a_2 et a_3. Prenons dans l'espace un point quelconque M, de coordonnées x, y, z et désignons par r_1, r_2, r_3 les mesures des longueurs MA_1, MA_2, MA_3. Je dis que *les trois forces* MF_1, MF_2, MF_3 *qui sont portées sur les axes allant positivement de* M *vers* A_1, A_2, A_3 *et qui ont pour mesures algébriques sur ces axes* $r_1.A_2A_3$, $r_2.A_3A_1$, $r_3.A_1A_2$ *sont en équilibre.*

En effet, les projections des forces MF_1, MF_2, MF_3 sur Ox sont respectivement

$$(a_1-x)(a_3-a_2), \qquad (a_2-x)(a_1-a_3), \qquad (a_3-x)(a_2-a_1)$$

et l'on reconnaît immédiatement que la somme de ces projections est nulle :

$$(a_1-x)(a_3-a_2)+(a_2-x)(a_1-a_3)+(a_3-x)(a_2-a_1)=0.$$

D'autre part, les projections des trois forces sur Oy sont

$$-y(a_3-a_2), \qquad -y(a_1-a_3), \qquad -y(a_2-a_1),$$

et sur Oz,

$$-z(a_3-a_2), \qquad -z(a_1-a_3), \qquad -z(a_2-a_1).$$

La somme des projections des trois forces sur Oy et celle des projections des trois forces sur Oz sont nulles. Les trois forces se font donc bien équilibre.

Cela posé, les travaux élémentaires des trois forces dans un déplacement infiniment petit du point M ont pour expressions

$$r_1.A_2A_3.dr_1, \qquad r_2.A_3A_1.dr_2, \qquad r_3.A_1A_2.dr_3.$$

Comme les forces sont en équilibre, la somme de ces travaux élémentaires est nulle :

$$A_2A_3.r_1dr_1+A_3A_1.r_2dr_2+A_1A_2.r_3dr_3=0.$$

En intégrant la relation précédente, on obtient, quelle que soit la position du point M dans l'espace,

$$A_2A_3.\frac{r_1^2}{2}+A_3A_1.\frac{r_2^2}{2}+A_1A_2.\frac{r_3^2}{2}=\text{const.},$$

c'est-à-dire

$$\overline{MA_1}^2.\overline{A_2A_3}+\overline{MA_2}^2.\overline{A_3A_1}+\overline{MA_3}^2.\overline{A_1A_2}=\text{const.}$$

Pour évaluer cette quantité constante, plaçons M en A_1. Le premier membre de la relation se réduit à

$$\overline{A_1A_2}^2.\overline{A_3A_1}+\overline{A_1A_3}^2.\overline{A_1A_2},$$

c'est-à-dire à

$$\overline{A_3A_1}.\overline{A_1A_2}(\overline{A_1A_2}-\overline{A_1A_3})=-\overline{A_1A_2}.\overline{A_2A_3}.\overline{A_3A_1}.$$

On a finalement la relation

$$\overline{MA_1}^2.\overline{A_2A_3} + \overline{MA_2}^2.\overline{A_3A_1} + \overline{MA_3}^2.\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3}.\overline{A_3A_1}.\overline{A_1A_2} = 0.$$

C'est la formule de Stewart.

2. Soient trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy et Oz et, dans le plan xOy, quatre points A_1, A_2, A_3, A_4, ayant respectivement pour coordonnées dans ce plan a_1 et b_1, a_2 et b_2, a_3 et b_3, a_4 et b_4. Prenons dans l'espace un point quelconque M, de coordonnées x, y, z et désignons par r_1, r_2, r_3, r_4 les mesures des longueurs MA_1, MA_2, MA_3, MA_4. Je dis que *les quatre forces* MF_1, MF_2, MF_3, MF_4 *qui sont portées sur les axes allant positivement de* M *vers* A_1, A_2, A_3, A_4 *et qui ont pour mesures algébriques sur ces axes* $r_1.A_2A_3A_4$, $-r_2.A_3A_4A_1$, $r_3.A_4A_1A_2$, $-r_4.A_1A_2A_3$ *sont en équilibre.* ($A_2A_3A_4$, *par exemple, désigne la mesure algébrique de l'aire du triangle* $A_2A_3A_4$ *dans le plan* xOy *orienté*).

En effet, la somme des projections des forces MF_1, MF_2, MF_3, MF_4 sur Ox est égale à

$$(a_1 - x)A_2A_3A_4 - (a_2 - x)A_3A_4A_1 + (a_3 - x)A_4A_1A_2 - (a_4 - x)A_1A_2A_3.$$

Or, on a

$$A_2A_3A_4 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & 1 \end{vmatrix}, \qquad A_3A_4A_1 = \cdots, \qquad \ldots, \qquad \ldots$$

Par conséquent, la somme des projections des forces sur l'axe Ox est le développement du déterminant

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 - x & a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 - x & a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 - x & a_3 & b_3 & 1 \\ a_4 - x & a_4 & b_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Mais, ce déterminant, pouvant se décomposer en deux déterminants dont l'un a deux colonnes identiques et l'autre deux colonnes proportionnelles, est nul. Ainsi, la somme des projections des forces sur Ox est nulle. De même, la somme des projections des forces sur Oy est nulle. Quant à la somme des projections sur Oz, elle est égale à

$$-z.A_2A_3A_4 + z.A_3A_4A_1 - z.A_4A_1A_2 + z.A_1A_2A_3.$$

Elle est le développement du déterminant

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -z & a_1 & b_1 & 1 \\ -z & a_2 & b_2 & 1 \\ -z & a_3 & b_3 & 1 \\ -z & a_4 & b_4 & 1 \end{vmatrix}$$

et, par suite, elle est nulle. Il est finalement établi que les quatre forces se font équilibre.

Cela posé, les travaux élémentaires des quatre forces dans un déplacement infiniment petit du point M ont pour expressions

$$r_1.A_2A_3A_4.dr_1, \qquad -r_2.A_3A_4A_1.dr_2, \qquad +r_3.A_4A_1A_2.dr_3, \qquad -r_4.A_1A_2A_3.dr_4.$$

Comme les forces sont en équilibre, la somme de ces travaux élémentaires est nulle :

$$A_2A_3A_4.r_1dr_1 - A_3A_4A_1.r_2dr_2 + A_4A_1A_2.r_3dr_3 - A_1A_2A_3.r_4dr_4 = 0.$$

En intégrant, on obtient, quelle que soit la position du point M dans l'espace, la relation

$$A_2A_3A_4.\frac{r_1^2}{2} - A_3A_4A_1.\frac{r_2^2}{2} + A_4A_1A_2.\frac{r_3^2}{2} - A_1A_2A_3.\frac{r_4^2}{2} = \text{const.},$$

c'est-à-dire

$$\overline{MA_1}^2 . A_2A_3A_4 - \overline{MA_2}^2 . A_3A_4A_1 + \overline{MA_3}^2 . A_4A_1A_2 - \overline{MA_4}^2 . A_1A_2A_3 = \text{const.}$$

Voici un cas particulier intéressant : *Supposons que les quatre points* A_1, A_2, A_3, A_4 *soient sur un même cercle.* Pour évaluer alors la constante, il suffit de placer le point M au centre du cercle. Si R est le rayon du cercle, le premier membre de la relation précédente devient

$$R^2(A_2A_3A_4 - A_3A_4A_1 + A_4A_1A_2 - A_1A_2A_3).$$

Or cette expression est, nous l'avons vu, égale à 0. Finalement, *les quatre points* A_1, A_2, A_3, A_4 *étant sur un cercle*, quel que soit le point M de l'espace, on a

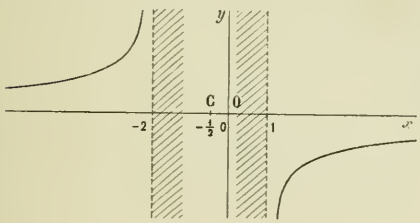
$$\overline{MA_1}^2 . A_2A_3A_4 - \overline{MA_2}^2 . A_3A_4A_1 + \overline{MA_3}^2 . A_4A_1A_2 - \overline{MA_4}^2 . A_1A_2A_3 = 0.$$

C'est une relation due à Luchterhand.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (*Concours de 1906.*)

1506. — *Étudier la variation de la fonction* $y = \mathrm{L}\,\dfrac{x-1}{x+2}$, *où* L *désigne un logarithme népérien.*

La fonction est définie si $(x-1)(x+2) > 0$, c'est-à-dire si x est extérieur à l'intervalle $(-2, +1)$. La dérivée, $y'_x = \dfrac{3}{(x-1)(x+2)}$, est alors constamment positive. La fonction croît constamment et l'on a la courbe ci-contre.



Cette courbe est symétrique par rapport au point C situé sur Ox et ayant pour abscisse $-\dfrac{1}{2}$. En effet : soient x et x' deux valeurs de x faisant prendre à y des valeurs égales et de signes contraires :

$$\mathrm{L}\,\frac{x-1}{x+2} + \mathrm{L}\,\frac{x'-1}{x'+2} = 0,$$

ou $\qquad (x-1)(x'-1) = (x+2)(x'+2),$

ou enfin $\qquad \dfrac{x+x'}{2} = -\dfrac{1}{2}.$ $\qquad$ J. R.

Bonnes solutions : MM. L. Sire ; R. de Faria ; H. Janois ; R. Manen ; W. Mérigot ; G. Foucry ; Amblard ; G. Esteben ; G. Frey.

1507. — *Évaluer l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ *et calculer sa valeur à* $\dfrac{1}{100}$ *près quand* $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Soit I l'intégrale demandée :

Je pose $\qquad x = \operatorname{tg}\varphi\,; \qquad$ d'où $\qquad dx = \dfrac{d\varphi}{\cos^2\varphi}.$

L'intégrale devient :

$$I = \int_0^{\varphi_1} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{1+\sin^2\varphi} = \operatorname{arc\,tg}(\sin\varphi_1),$$

en posant

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \alpha.$$

D'où

$$I = \operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

La détermination choisie pour l'arc tg est celle qui s'annule avec la tangente.

Application numérique : $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} = 0.52 \left(\text{à } \frac{1}{100} \text{ près par défaut}\right).$$

J. R.

Bonnes solutions : MM. Paul Sarközy, Hongrie ; Esteben ; Amblard ; Mérigot ; R. Manen ; L. Sire ; Moret.

1508. — *L'équation*

$$x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0 \tag{1}$$

a pour racines les mesures a, b, c des côtés d'un triangle ; former l'équation qui a pour racines cos A, cos B, cos C.

On a $$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\alpha^2 - 2\beta - 2a^2}{2\gamma}.a.$$

Si on pose $a = x$, $\cos A = y$, l'équation précédente donne :

$$2x^3 + (2\beta - \alpha^2)x + 2\gamma y = 0. \tag{2}$$

L'équation demandée s'obtient en éliminant x entre les équations (1) et (2) : elle doit être du 3e degré, puisqu'à chaque valeur de x correspond une valeur de y.

1° Multiplions les deux membres de l'équation (1) par -2, ceux de l'équation (2) par 1 et ajoutons membre à membre ; nous obtenons

$$2\alpha x^2 - \alpha^2 x + 2\gamma(y + 1) = 0. \tag{3}$$

2° Multiplions (1) par $2y$, (2) par 1, ajoutons membre à membre et divisons par x ; nous obtenons

$$2(y + 1)x^2 - 2\alpha y x + 2\beta(y + 1) - \alpha^2 = 0. \tag{4}$$

Nous sommes ramenés à éliminer x entre (3) et (4).

Appliquant le résultant bien connu de deux équations du second degré, il vient

$$\begin{aligned} 8\gamma^2 . y^4 + (4\alpha^3\gamma - 16\alpha\beta\gamma + 32\gamma^2)y^3 + (8\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^4\beta - 48\alpha\beta\gamma + 48\gamma^2 + 8\alpha^3\gamma)y^2 \\ + (\alpha^6 - 8\alpha^5\beta + 16\alpha^2\beta^2 + 12\alpha^3\gamma - 48\alpha\beta\gamma + 32\gamma^2)y + \cdots = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

car le résultant est

$$(AC' - CA')^2 - (AB' - BA')(BC' - CB') = 0, \tag{6}$$

et l'on a ici

$$\left\{ \begin{aligned} AC' - CA' &= 2\alpha[2\beta(y + 1) - \alpha^2] - 4\gamma(y + 1)^2, \\ AB' - BA' &= 2\alpha^2(y + 1) - 4\alpha^2 y = 2\alpha^2(1 - y), \\ BC' - CB' &= 4\alpha\gamma y(y + 1) - \alpha^2[2\beta(y + 1) - \alpha^2]. \end{aligned} \right. \tag{7}$$

L'équation (5) est du degré 4 et non du degré 3 qui a été prévu. Elle renferme donc une racine étrangère. Les expressions (7) montrent immédiatement que l'équation (6) admet la racine $y = -1$. Pour que le cosinus de l'un des angles du triangle pût recevoir cette valeur, il faudrait que les trois sommets soient en ligne droite, ce que l'on ne suppose pas. $y = -1$ est donc une racine étrangère de l'équation (5). Supprimant cette racine en divisant par $y + 1$, il vient finalement

$$\begin{aligned} 8\gamma^2 y^3 + (4\alpha^3\gamma - 16\alpha\beta\gamma + 24\gamma^2)y^2 + (8\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^4\beta - 32\alpha\beta\gamma + 24\gamma^2 + 4\alpha^3\gamma)y \\ + \alpha^6 - 6\alpha^4\beta + 8\alpha^2\beta^2 - 16\alpha\beta\gamma + 8\gamma^2 = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

C'est l'équation demandée.

Remarque I. — Si $y = -1$, les équations (3) et (4) ont en commun la racine $x = \frac{\alpha}{2}$. Or α est somme des trois côtés du triangle ; si l'un d'eux était la moitié de cette somme, les trois côtés seraient sur une même droite : c'est ce que nous avons déjà dit.

Remarque II. — On peut employer d'autres procédés pour former l'équation (6), sans introduire de racine étrangère dans le courant du calcul. En voici un par exemple. L'équation demandée est de la forme

$$y^3 - py^2 + qy - r = 0,$$

où $p = \Sigma \cos A$, $q = \Sigma \cos A \cos B$, $r = \cos A \cos B \cos C$. Désignant d'une façon générale par S_m la somme des m^{es} puissances des racines de l'équation proposée, on a

$$\cos A = \frac{aS_2 - 2a^3}{\gamma}, \qquad \cos B = \frac{bS_2 - 2b^3}{\gamma}, \qquad \cos C = \frac{cS_2 - 2c^3}{\gamma},$$

p, q, r s'expriment facilement par des fonctions symétriques des racines de la proposée. Et enfin on calcule ces fonctions symétriques. Ce calcul est plus long que celui qui a été donné plus haut.

J. R.

Bonnes solutions : MM. Paul Sapközy ; W. Mérigot ; L. Sire.

1509. — *On donne une fonction $f(x)$. Deux autres fonctions $\varphi(x)$ et $F(x)$ sont définies par les relations suivantes*

$$\varphi(x) = k\int \frac{dx}{f'(x)}; \qquad F(x) = f(x).\varphi(x),$$

k étant une constante.

Démontrer qu'on a identiquement

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + \frac{2k}{f(x).\varphi(x)}; \qquad \frac{F'''(x)}{F(x)} = \frac{f'''(x)}{f(x)} + \frac{\varphi'''(x)}{\varphi(x)}.$$

De la définition de $\varphi(x)$, il résulte

$$\varphi' f' = k \qquad \text{et} \qquad \varphi'' f' + \varphi' f'' = 0.$$

La relation $F = f.\varphi$ donne donc par dérivations successives :

$$F' = f'\varphi + \varphi' f';$$

$$F'' = f''\varphi + f\varphi'' + 2k, \qquad \text{ou} \qquad \frac{F''}{F} = \frac{f''}{f} + \frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{2k}{f\varphi};$$

$$F''' = f'''\varphi + f\varphi''' + (f''\varphi' + \varphi'' f'), \qquad \text{ou} \qquad \frac{F'''}{F} = \frac{f'''}{f} + \frac{\varphi'''}{\varphi}.$$

C. q. f. d.

J. R.

Bonnes solutions : MM. W. Mérigot ; L. Sire ; Amblard ; G. Foucby ; G. Esteben ; H. Janois ; R. Manen.

1510. — *On considère un système d'axes rectangulaires fixes Ox, Oy, Oz, et, dans le plan xOy, un cercle (C) de rayon $\frac{1-m}{2}a$ animé d'un mouvement de translation, dans lequel son centre C décrit dans le sens de la flèche F, et avec une vitesse angulaire $(1-m)\omega$, un cercle de centre O et de rayon*

$$\frac{1+m}{2}a.$$

En même temps que ce cercle (C) se déplace, un point P est mobile sur sa circonférence et la parcourt dans le sens de la flèche f, avec la vitesse angulaire $(1+m)\omega$. Il décrit ainsi une courbe (E) (Épicycloïde).

Les quantités a, ω, m sont trois constantes positives dont la dernière est moindre que l'unité.

1° On demande d'exprimer en fonction du temps, t, les coordonnées x, y du point P, sachant qu'à l'époque $t = 0$ les points C et P sont tous deux sur la partie positive de Ox, P à la distance a du point O.

2° *Le point* P *est la projection d'un point* M, *mobile dans l'espace ; on demande d'exprimer sa cote* z *en fonction du temps* t, *sachant qu'elle est nulle à l'époque* $t = 0$, *et que la vitesse* v *de* M *fait avec l'axe* Oz *un angle constant* θ *quelconque d'ailleurs.*

On montrera que la trajectoire (k) *du point* M *s'obtient en coupant le cylindre dont* (E) *est la section droite par un ellipsoïde de révolution autour de* Oz, $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$, *où la longueur* b *varie avec* θ.

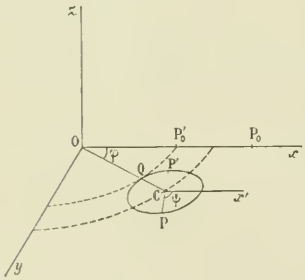
On introduira, au lieu de θ, *la constante* b *dans la représentation de la cote* z *du point* M.

3° *Calculer la grandeur et les cosinus directeurs* α, β, γ *de la vitesse* v *du point* M, *ainsi que l'arc de la courbe* (k) *parcouru par ce mobile pendant le temps* t. — *Exprimer, en fonction du temps, le rayon de courbure* R *de la courbe* (k) *et vérifier que la vitesse lui est proportionnelle.*

4° *Après avoir formé l'équation du plan osculateur de la courbe* (k), *on démontrera que, à une même époque* t, *tous ceux de ces plans qui correspondent aux diverses courbes* (k) *qu'on obtient en faisant varier* b, *passent par une même droite* Δ *du plan* xOy.

5° *Montrer que, lorsque* t *varie, cette droite* Δ *enveloppe une épicycloïde* (E') *homothétique à celle que décrit le point* P' *diamétralement opposé au point* P *dans le cercle* (C). — *Faire voir que la courbe* (E') *a pour développée l'épicycloïde* (E).

1. — Soit P_0 la position initiale du point P, P'_0 la position initiale du point diamétralement opposé au point P sur le cercle mobile (C). Je désigne par Q le point de contact du cercle (C) avec le cercle de centre O qui lui est tangent extérieurement. Je vais montrer que la trajectoire du point P est une épicycloïde engendrée par le roulement du cercle (C) sur le cercle (O) précédent, sans glissement. Il suffit, pour cela, de faire voir que les arcs de cercle QP' et QP_0 sont égaux.



Soient φ et ψ les angles que font les demi-droites OC et CP respectivement avec la direction positive de Ox. D'après l'énoncé

$$\psi = (1+m)\omega t\,; \qquad \varphi = (1-m)\omega t.$$

D'autre part

$$CP = \frac{1-m}{2}.a\,; \quad OC = \frac{1+m}{2}.a, \quad \text{et, par suite,} \quad OQ = m.a,$$

$$\text{arc } QP'_0 = \varphi.\overline{OQ} = ma\varphi, \qquad \text{arc } QP' = (\psi-\varphi)\overline{CP} = (\psi-\varphi)\frac{1-m}{2}a.$$

Exprimant l'égalité de ces arcs, il vient $(1+m)\varphi = (1-m)\psi$, vérifiée identiquement par les valeurs de φ et ψ. Ainsi donc le point P décrit bien une épicycloïde.

Pour obtenir les coordonnées du point P à l'instant t, projetons le contour OCP sur Ox et sur Oy. Il vient

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{a}{2}\left[(1+m)\cos(1-m)\omega t + (1-m)\cos(1+m)\omega t\right], \\[2ex] y = \dfrac{a}{2}\left[(1+m)\sin(1-m)\omega t + (1-m)\sin(1+m)\omega t\right]. \end{cases}$$

2. La tangente au lieu du point M faisant avec Oz l'angle constant θ, on a

$$\frac{dz}{ds} = \operatorname{cotg}\theta,$$

en désignant par z la cote du point M et par ds l'élément d'arc de la courbe décrite par le point P. L'équation précédente s'écrit encore

$$(2)\qquad dz\sin\theta = (dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}\cos\theta.$$

Mais, en dérivant les formules (1) par rapport à t, on obtient

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a\omega}{2}(1-m^2)[\sin(1-m)\omega t + \sin(1+m)\omega t],$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a\omega}{2}(1-m^2)[\cos(1-m)\omega t + \cos(1+m)\omega t];$$

ou encore

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -a\omega(1-m^2)\sin\omega t\cos m\omega t, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = a\omega(1-m^2)\cos\omega t\cos m\omega t. \end{cases}$$

Et alors la formule (2) devient

$$dz = \operatorname{cotg}\theta . a\omega(1-m^2).\cos m\omega t.dt,$$

d'où, en intégrant et tenant compte des conditions initiales :

$$(4)\qquad z = \operatorname{cotg}\theta.\frac{a}{m}(1-m^2).\sin m\omega t.$$

La trajectoire (k) du point M est ainsi définie par les équations (1) et (4).

Posant $b = \dfrac{a}{m}\operatorname{cotg}\theta\sqrt{1-m^2}$, la formule (4) s'écrit encore

$$(5)\qquad z = b\sqrt{1-m^2}\sin m\omega t.$$

Si l'on élimine le temps entre les équations (1) et (5), il vient

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Donc la trajectoire (k) est l'intersection d'un ellipsoïde de révolution autour de Oz, ayant pour méridienne dans le plan des xz

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$$

avec le cylindre épicycloïdal ayant pour section droite dans le plan des xy la courbe (E) définie par les équations (1).

3. Il résulte immédiatement des formules du paragraphe précédent que

$$(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{a\omega}{\sin\theta}(1-m^2)\cos m\omega t\,dt;$$

par suite,

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{a\omega}{\sin\theta}(1-m^2)\cos m\omega t.$$

D'où, en intégrant et comptant l'arc de trajectoire à partir du point P_0 avec lequel le point M coïncide, par hypothèse, à l'instant initial,

$$s = \frac{a(1-m^2)}{m\sin\theta}\sin m\omega t.$$

Mais $\qquad \alpha = \dfrac{dx}{ds}, \qquad \beta = \dfrac{dy}{ds}, \qquad \gamma = \dfrac{dz}{ds}.$

Donc

$$(6)\qquad \alpha = -\sin\theta\sin\omega t, \qquad \beta = \sin\theta\cos\omega t, \qquad \gamma = \cos\theta.$$

Le rayon de courbure R de la courbe (k) au point M est donné par

$$R^2 = \frac{ds^2}{d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2};$$

et, comme on a

$$(7)\qquad \frac{d\alpha}{dt} = -\omega \sin\theta \cos\omega t, \qquad \frac{d\beta}{dt} = -\omega \sin\theta \sin\omega t, \qquad \frac{d\gamma}{dt} = 0,$$

il vient

$$R = \frac{a(1-m^2)\cos m\omega t}{\sin^2\theta},$$

ou encore, en tenant compte de la valeur de v,

$$R = \frac{v}{\omega \sin\theta}.$$

Cette formule montre que R est proportionnel à v.

4. L'équation du plan osculateur au point (x, y, z) est

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0,$$

où A, B, C sont les déterminants tirés de la matrice

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \end{vmatrix}$$

ou encore des quantités proportionnelles à ces déterminants. Nous pourrons donc prendre

$$A = -\cos\theta \sin\omega t, \qquad B = \cos\theta . \cos\omega t, \qquad C = -\sin\theta.$$

Faisons $Z = 0$ dans l'équation du plan osculateur. Il vient

$$-\sin\omega t(X-x) + \cos\omega t(Y-y) + \frac{1-m^2}{m} a \sin m\omega t = 0.$$

Cette équation étant indépendante de θ, ou de b, la droite Δ suivant laquelle le plan osculateur coupe le plan des xy est la même, à l'instant t, pour toutes les courbes (k) qu'on obtient en faisant varier b.

Remarques géométriques. — La courbe (k), pour une valeur quelconque de θ, est une hélice tracée sur le cylindre épicycloïdal (E). En effet, en développant cette courbe sur l'un des plans tangents à ce cylindre, on obtient une ligne dont chaque élément fait l'angle constant θ avec la génératrice de contact ; cette ligne est donc une droite. La normale principale à l'hélice (k) en chaque point M doit être parallèle au plan des xy : c'est d'ailleurs ce qu'on vérifie sur la dernière équation (7). Faire varier θ revient à faire varier l'inclinaison de la droite qu'on enroule sur le cylindre épicycloïdal pour obtenir l'hélice (k), et par conséquent à effectuer une transformation homographique d'espèce simple consistant uniquement à modifier les cotes dans un rapport constant, c'est du reste ce que montre la formule (5) où l'on regarde t comme constant et b comme variable.

Dans une telle transformation, les points du plan des xy restent invariables ; d'autre part, dans toute transformation homographique, le plan osculateur en un point d'une courbe se change dans le plan osculateur au point homologue de la transformée. En conséquence, la trace Δ du plan osculateur à la courbe (k) sur le plan des xy est indépendante de b.

5. Cherchons le point limite de la droite Δ qui, nous l'avons vu, a pour équation

$$(8)\qquad -\sin\omega t(X-x) + \cos\omega t(Y-y) + \frac{1-m^2}{m} a \sin m\omega t = 0.$$

Il est à l'intersection de cette droite avec la droite dont l'équation s'obtient en dérivant la précédente par rapport à t. Cette équation nouvelle se réduit à

$$(9)\qquad \cos\omega t(X-x) + \sin\omega t(Y-y) = 0,$$

car $\frac{dx}{dt}\sin\omega t - \frac{dy}{dt}\cos\omega t + a\omega(1-m^2)\cos m\omega t$ s'annule identiquement en vertu des équations (3). Mais la droite (9) n'est autre que la tangente à l'épicycloïde (E) au point (x, y), et en outre elle est normale à la droite (8). En conséquence le lieu (E') du point limite de Δ, ou l'enveloppe de Δ, admet pour développée l'épicycloïde (E).

On pourrait en conclure, sans autre calcul (voir l'article de M. Corry dans la *Revue* de mai 1906),

que (E') est une épicycloïde semblable à l'épicycloïde (E), ou mieux encore homothétique à l'épicycloïde décrite par le point P' diamétralement opposé au point P dans le cercle (C), mais ces résultats peuvent aussi se vérifier par le calcul très simplement. Résolvons les équations (8) et (9) par rapport à $X - x$ et à $Y - y$:

$$X - x = \frac{a}{2} \cdot \frac{1 - m^2}{m} [\cos(1 - m)\omega t - \cos(1 + m)\omega t],$$

$$Y - y = \frac{a}{2} \cdot \frac{1 - m^2}{m} [\sin(1 - m)\omega t - \sin(1 + m)\omega t].$$

D'où, en tenant compte des formules (1) qui donnent x et y.

$$(10) \quad \begin{cases} X = \dfrac{a}{2m} \cdot [(1 + m)\cos(1 - m)\omega t - (1 - m)\cos(1 + m)\omega t], \\ Y = \dfrac{a}{2m} [(1 + m)\sin(1 - m)\omega t - (1 - m)\sin(1 + m)\omega t]. \end{cases}$$

Mais les coordonnées du point P', au temps t, sont données par

$$(11) \quad \begin{cases} x' = \dfrac{a}{2} [(1 + m)\cos(1 - m)\omega t - (1 - m)\cos(1 + m)\omega t], \\ y' = \dfrac{a}{2} [(1 + m)\sin(1 - m)\omega t - (1 - m)\sin(1 + m)\omega t] ; \end{cases}$$

car elles se déduisent de celles de P en changeant simplement ψ en $\psi + \pi$. Comparant les formules (10) et (11), on voit que le lieu du point (X, Y), c'est-à-dire l'enveloppe de Δ, est la courbe homothétique de l'épicycloïde décrite par le point P', c'est-à-dire de l'épicycloïde (E) qui a tourné d'un certain angle autour de O, le centre d'homothétie étant le point O et le rapport d'homothétie étant $\frac{1}{m}$.

J. R.

Très bonnes solutions : MM. G. Cotty, élève de l'École normale supérieure ; L. Sire, lycée de Nancy ; Dulimbert, à Dijon.

Bonnes solutions : MM. G. Esteben ; Amblard, conducteur des Ponts et Chaussées, à Ruines ; R. Auscher, soldat au 159e d'infanterie ; G. Frey, à Alger.

1512. — *Un condensateur de 100 microfarads est chargé au potentiel de 2.500 volts.*

1° *Calculer sa charge et son énergie.*

2° *Déterminer le poids de glace qu'on pourrait fondre (sous la pression normale) avec la chaleur que dégagerait la décharge du condensateur, en supposant dans cette décharge toute l'énergie transformée en chaleur.*

3° *Déterminer le volume que prendrait sous une pression de 6 atmosphères 1 gramme d'air primitivement à cette pression et à 25°, auquel on ferait absorber la chaleur produite dans la décharge précédente.*

4° *Quelles seraient dans le système électrostatique C. G. S. les valeurs numériques de la charge, du potentiel, de l'énergie du condensateur ci-dessus, et le rayon d'un conducteur sphérique isolé ayant même capacité.*

Données numériques : chaleur latente de fusion de la glace, 80 ; chaleur spécifique de l'air sous pression constante, 0,237 ; équivalent mécanique de la petite calorie dans le système pratique, 4 joules 17.

1° La charge du condensateur est, en coulombs,

$$Q = CV = 100 \times 10^{-6} \times 2.500 = 0,25,$$

et son énergie, en joules,

$$W = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \times 0,25 \times 2.500 = 312,5.$$

2° Ces 312.5 joules correspondent à $\frac{312.5}{4,17} = 74,94$ calories. La chaleur de fusion de la glace étant de 80 calories, la chaleur dégagée par la décharge, en supposant toute l'énergie transformée dans cette décharge en chaleur, fondra un poids de glace

$$\frac{74,94}{80} = 0^g,937.$$

3° Pour élever d'un degré la température d'un gramme d'air, il faut $0^c,237$; la température d'un gramme d'air auquel on aura fait absorber 74,94 calories sera donc élevée de $\frac{74,94}{0,237} = 316^\circ,2$. La température initiale de cet air étant de 25°, sa température finale sera $316,2 + 25 = 341^\circ 2$.

D'autre part, on sait qu'un gramme d'air occupe, à 0° et à la pression d'une atmosphère, un volume de 773^{cm3}; à 341°,2 et à la pression de 6 atmosphères, il occupera un volume

$$773 \times \frac{614,2}{273} \times \frac{1}{6} = 290^{cm3}.$$

4° Un coulomb vaut 3×10^9 unités électrostatiques C. G. S.; un volt vaut $\frac{1}{300}$ d'unité électrostatique et un joule 10^7 ergs. On a donc

$$Q = 0,25 \times 3 \times 10^9 = 7,5 \times 10^8 \text{ C. G. S.},$$

$$V = \frac{2.500}{200} = 8\,\frac{1}{3},$$

$$W = 312,5 \times 10^7.$$

Enfin le rayon d'un conducteur sphérique représente précisément sa capacité en unités électrostatiques. On doit donc avoir

$$R = \frac{Q}{V} = 9 \times 10^7 \text{ centimètres} = 900 \text{ kilomètres}.$$

Nous avons reçu d'assez bonnes solutions de MM. de Faria et Janois. F. CROZE.

1513. — *On introduit dans un eudiomètre à mercure 100 centimètres cubes de gaz ammoniac et 100 centimètres cubes d'oxygène. Cet eudiomètre est ensuite placé dans une enceinte dont on peut porter la température à 136°,5. On fait alors jaillir une étincelle électrique à l'intérieur de l'eudiomètre et l'on attend que l'équilibre de température soit rétabli. On demande le volume occupé par le gaz après l'explosion : 1° à 136°,5 ; 2° à 0° après qu'on a laissé refroidir l'enceinte extérieure.*

On admettra que le coefficient de dilatation des gaz est $\frac{1}{273}$ et que la vapeur d'eau se dilate comme un gaz parfait.

La réaction, avec les volumes qui entrent en jeu, est représentée par l'équation

$$AzH^3 + O^2 = Az + \frac{3}{2}H^2O + \frac{1}{2}O$$

Volumes : 100 100 50 150 25

Admettons que les gaz aient été mesurés au début à 0°; le volume représenté par le second membre à cette même température étant 225, le volume à 136°,5 sera

$$225\left(1 + \frac{136,5}{273}\right) = 337,5.$$

A 0°, l'eau est condensée et le volume n'est, en réalité, que 75.

Beaucoup de candidats ont supposé que l'azote avait été transformé par la combustion en composés oxygénés, protoxyde d'azote, acide azotique, etc. En réalité, l'inflammation d'un mélange de gaz ammoniac et d'oxygène produit surtout de l'azote et de la vapeur d'eau ; une petite quantité seulement est transformée en azotite ou azotate d'ammoniaque.

Bonne solution de M. H. Janois, à Nantes.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE (*Concours de 1906*)

Groupe I.

1524. — *On considère, dans l'espace, les droites* (D) *dont les équations sont*

$$ux + vy + z + 1 = 0, \qquad x + y + uz + v = 0;$$

on regarde les paramètres u, v comme les coordonnées d'un point A *dans un plan* (P) *; à chaque point* A *de ce plan correspond, en général, une droite* (D) *et une seule ; par un point* M *de l'espace, il passe, en général, une droite* (D) *et une seule.*

Où doit être le point M *pour qu'il passe par ce point une infinité de droites* (D) ? *Soit* M_0 *un tel point ; quel est le lieu, dans le plan* P, *des points* A *auxquels correspondent les droites* (D), *en nombre infini, qui passent par le point* M_0 ? *Quand, inversement, le point* A *décrit ce lieu, quelle est la surface décrite par la droite* (D) *qui correspond au point* A ?

Lorsque, dans le plan P, *le point* A *décrit la parabole dont l'équation est* $v = au^2$, *la droite correspondante* (D) *décrit une surface* (Σ) *qui est, en général, du quatrième degré ; la précédente étude permet de mettre en évidence des valeurs du paramètre a pour lesquelles cette surface contient un plan.*

Construire, en supposant $a = 1$, *la courbe du troisième degré, intersection de la surface* (Σ) *et du plan des xy.*

Évaluer l'aire limitée par cette courbe et la droite dont l'équation est $y = 3{,}5$.

Soit A un point du plan P de coordonnées u et v. A ce point correspond la droite

$$ux + vy + z + 1 = 0, \qquad x + y + uz + v = 0,$$

et cette droite est bien déterminée si les plans ne coïncident pas, c'est-à-dire si l'on n'a pas

$$\frac{u}{1} = \frac{v}{1} = \frac{1}{u} = \frac{1}{v}.$$

Si l'on a ces relations, on en déduit $u^2 = 1$ et $u = v$; par conséquent, il y a deux points du plan P pour lesquels la droite (D) est indéterminée ; ce sont les points $A_0(u = 1,\ v = 1)$ et $A_1(u = -1,\ v = -1)$.

Dans le premier cas, pour $u = 1$, $v = 1$, la droite (D) est totalement indéterminée dans le plan $x + y + z + 1 = 0$; dans le second cas $u = -1$, $v = -1$, elle est totalement indéterminée dans le plan $x + y - z - 1 = 0$. Dans la suite, nous désignerons ces plans par Q_0 et par Q_1.

Donnons-nous maintenant un point M (x, y, z) de l'espace et exprimons que la droite (D) passe par ce point ; nous aurons pour déterminer u et v les deux équations

$$ux + vy + z + 1 = 0, \qquad uz + v + x + y = 0,$$

ce qui nous donnera deux valeurs finies et bien déterminées de u et v, si $yz - x = 0$.

Si le point M est sur la surface $yz - x = 0$, les équations ont une solution infinie, et en posant

$u = \frac{u'}{w'}$, $v = \frac{v'}{w'}$, nous avons $w' = 0$, puis $u' = 1$, $v' = -z$. La droite (D) correspondante est parfaitement déterminée encore et a pour équations

$$X - zY = 0, \qquad Z - z = 0.$$

Enfin, si le point M est à la fois sur les trois quadriques

$$yz - x = 0, \qquad x(x+y) - z(z+1) = 0, \qquad y(x+y) - z - 1 = 0,$$

il passe une infinité de droites (D) par ce point; or la première et la dernière sont deux paraboloïdes qui ont un plan directeur commun, $y = 0$; elles ont donc en commun une droite à l'infini $y = 0$, $t = 0$.

Pour enlever cette solution il suffit d'écrire les deux équations ainsi

$$y(z+1) - x - y = 0, \qquad y(x+y) - z - 1 = 0,$$

et d'annuler le déterminant relatif aux inconnues y et $t(t = 1)$.

Nous trouvons ainsi

$$(x+y)^2 - (z+1)^2 = 0,$$

équation qui se décompose en deux $x + y = \pm(z+1)$;
en portant ensuite $x + y$ dans la seconde, elle donne $y = \pm 1$.

Les deux paraboloïdes ont donc déjà en commun les deux droites à distance finie

$$x + y = z + 1, \qquad y = 1,$$

ou

$$x = z, \qquad y = 1,$$

et

$$x + y = -z - 1, \qquad y = -1,$$

ou

$$x = -z, \qquad y = -1;$$

nous appellerons ces deux droites Δ_1 et Δ_2. Enfin il est visible que les deux paraboloïdes ont en commun une troisième droite à distance finie, la droite Δ dont les équations sont $x + y = 0$, $z + 1 = 0$. Cette dernière s'appuie sur les deux autres et forme respectivement avec elles les plans Q_1 et Q_2. Les trois droites Δ appartiennent aussi à la deuxième quadrique. Il est facile de vérifier que les droites ordinaires de la congruence donnée, celles qui ne correspondent pas aux points A_0 et A_1, rencontrent les deux droites Δ_1 et Δ_2; les droites exceptionnelles, celles qui correspondent aux points A_0 et A_1, sont indéterminées dans les plans Q_2 et Q_1 où elles rencontrent Δ et Δ_2 ou bien Δ et Δ_1.

Soient maintenant x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point M_0 supposé situé sur une des droites Δ. Si ce point est sur Δ, nous aurons d'abord

$$x_0 + y_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad z_0 + 1 = 0;$$

les équations en u et v, qui sont identiques dans le cas actuel, se réduisent à $u - v = 0$, et le lieu du point A est la première bissectrice de l'angle des axes dans le plan (P). Si le point M_0 est sur Δ_1, nous aurons

$$x_0 = z_0, \qquad y_0 = 1,$$

et les équations entre u et v deviendront

$$ux_0 - v + x_0 + 1 = 0;$$

le lieu du point A est encore une droite, qui passe au point A_1.

Enfin, si le point M_0 est sur Δ_2, nous aurons

$$x_0 = -z_0, \qquad y_0 = -1;$$

les équations entre u et v se réduiront à

$$ux_0 - v - x_0 + 1 = 0,$$

et le lieu du point A sera une droite qui passe au point A_1.

Inversement, supposons que le point A décrive une de ces trois droites : d'abord $u = v$; alors

le lieu de la droite (D), qui s'obtient en éliminant u et v entre les deux équations de (D) et celle-ci, se réduit aux deux plans

$$(x+y)^2-(z+1)^2=0,$$

c'est-à-dire aux deux plans Q_0 et Q_1. Prenons ensuite

$$ux_0+v+x_0+1=0;$$

le lieu de la droite (D) est alors

$$\begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ z & 1 & x+y \\ x_0 & 1 & x_0+1 \end{vmatrix}=0;$$

ce lieu se décompose en deux plans, car si on ajoute à la dernière colonne les deux premières changées de signe, on obtient

$$\begin{vmatrix} x & y & z+1-x-y \\ z & 1 & x+y-z-1 \\ x_0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

et cette équation se décompose en deux :

$$x+y-z-1=0 \qquad \text{et} \qquad x-x_0y+z-x_0=0.$$

La première représente le plan Q_1 qui correspond au point A_1 de la droite parcourue dans le plan (P); la seconde représente un plan qui passe par Δ_2, et qui est le vrai lieu.

Enfin prenons

$$ux_0-v-x_0+1=0;$$

nous aurons de même deux plans : le plan Q_0 et le plan

$$x+x_0y-z-x_0=0.$$

qui passe par Δ_1 et qui est le vrai lieu.

Tous ces résultats sont évidents géométriquement, si on se reporte aux explications qui ont été données sur la nature de la congruence des droites (D).

Quand le point A décrit la parabole $v=au^2$, la droite (D) engendre un lieu qu'il est facile d'obtenir, en tirant u et v des deux équations de la droite (D) et en portant leurs valeurs dans l'équation $v=au^2$. Nous avons ainsi successivement

$$u=\frac{y(x+y)-z-1}{x-yz}, \qquad v=\frac{z(z+1)-x(x+y)}{x-yz},$$

et

$$(x-yz)[z(z+1)-x(x+y)]-a[y(x+y)-z-1]^2=0.$$

Cette dernière équation est l'équation du lieu, qui est, comme on le voit, une surface du quatrième degré ayant pour lignes doubles les trois droites Δ.

Pour $a=1$, la parabole passe au point A_0, auquel correspond le plan Q_0. La surface se dédouble alors en une surface du troisième degré et le plan Q_0. Pour $a=-1$, on a des résultats analogues.

Faisons $a=1$ et cherchons à mettre en facteur dans l'équation du quatrième degré la fonction linéaire $x+y+z+1$; il nous suffira, pour cela, d'écrire cette équation ainsi

$$[x+y-y(z+1)][z(z+1)-x(x+y)]-a[y(x+y)-z-1]^2=0$$

et de poser $\dfrac{x+y}{z+1}=\rho$; nous aurons alors

$$(\rho-y)(z-\rho x)-a(\rho y-1)^2=0;$$

puis, comme

$$a=1,$$

$$\rho^2(x+y^2)-\rho(xy+z+2y)+yz+1=0.$$

Il n'y a plus qu'à diviser par $z+1$ et remarquer que le reste

$$x+y^2+xy+z-2y+yz+1 \qquad \text{s'écrit} \qquad (x+y+z+1)(y+1),$$

pour obtenir la décomposition demandée.

Nous trouvons finalement $x+y+z+1$ en facteur, qui correspond au plan Q_0, et il reste la surface du troisième degré :

$$(x+y)(y^2+x)-(z+1)(y^2+xy-yz+x+y-1)=0,$$

qui admet la droite Δ_1 comme ligne double.

Coupons cette surface par le plan $z=0$; nous aurons la courbe demandée,

$$y^2(x+y)+x^2-y^2-x-y+1=0.$$

Cette cubique admet pour asymptote inflexionnelle la droite $x+y=0$. Sur les branches infinies correspondantes $x+y$ est négatif, la courbe est au-dessous de son asymptote. Les deux autres directions asymptotiques sont confondues avec $y=0$ et les branches correspondantes sont paraboliques, comme il est aisé de s'en assurer.

La courbe rencontre l'axe des y en deux points confondus avec le point $y=1$, et en un point d'ordonnée -1. En portant les axes parallèlement à eux-mêmes au point $x=0$, $y=1$, l'équation devient

$$y^2(x+y)+x^2+2xy+2y^2=0;$$

elle nous montre que la nouvelle origine est un point double isolé et que, par suite, la cubique est unicursale ; mais ce dernier point est évident ; car en faisant $v=u^2$ et $z=0$ dans les équations de la droite (D), elles se réduisent à

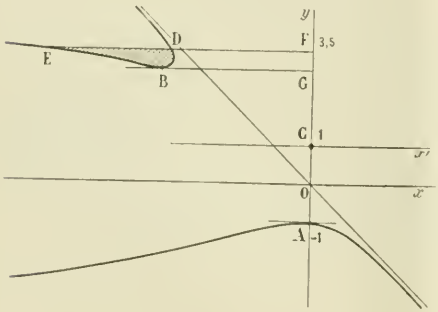
$$ux+u^2y+1=0, \qquad x+y+u^2=0,$$

et donnent

$$x=-\frac{u^3+u^2+u+1}{u}, \qquad y=\frac{u^2+u+1}{u},$$

qui sont deux équations paramétriques rationnelles de la courbe.

Si nous coupons maintenant la courbe par l'ancien axe des x, nous obtenons des points de rencontre imaginaires. La courbe est dès lors aisée à tracer. En faisant varier u, on l'obtiendrait encore plus vite et l'on verrait en outre sans peine que pour $u=-1$, y est maximum, et qu'il est minimum pour $u=1$; les points correspondants sont $x=0$, $y=-1$ et $x=-4$, $y=3$.



L'aire à évaluer est l'aire curviligne EBD ; c'est la différence entre les deux trapèzes FGBE et FGBD. Elle a donc pour valeur

$$A=\int_{-1}^{3,5}(x''-x')\,dy,$$

en appelant x' et x'' les deux racines de l'équation du second degré en x. Si nous prenons pour origine le point double C, l'expression deviendra

$$A=\int_{-2}^{+2,5}(x''-x')\,dy,$$

et, comme $x'' - x' = y\sqrt{y^2 - 4}$,

$$A = \int_2^{2,5} y\sqrt{y^2 - 4}\,dy.$$

L'intégrale indéfinie est immédiate, c'est $\frac{1}{3}(y^2 - 4)^{\frac{3}{2}}$;

donc

$$A = \frac{1}{3}\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{8}.$$

On pourrait tout aussi bien employer au calcul de l'aire les expressions de x et de y en fonction de u : en posant $y = 3,5$ (l'ancien y), on a $u = \frac{1}{2}$ et $u = 2$; 2 est le paramètre du point E et $\frac{1}{2}$ le paramètre du point D ; l'aire A est donc égale à

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} x\,dy.$$

où x et dy sont exprimés en fonction de u.

Remarques diverses. — Si $u = v$, la droite D reste fixe, tant que u et v sont différents de ± 1 : elle coïncide avec Δ. Il n'y a une infinité de droites D que pour $u = v = \pm 1$, et ces valeurs de u et v s'obtiennent encore en prenant le point M dans le plan Q_0 ou dans le plan Q_1.

Il était évident que la cubique à construire admet pour point double le point C, car c'est le point de rencontre de la droite Δ_1 avec le plan des xy.

En écrivant l'équation de la cubique sous la forme

$$(x + y)(y^2 + x - y - 1) + 1 = 0,$$

on aperçoit de suite une séparation en régions et aussi le fait que la parabole

$$y^2 + x - y - 1 = 0$$

est une parabole asymptote.

Remarques géométriques. — Lorsqu'on a découvert que la congruence est formée par les droites qui s'appuient sur deux droites fixes, Δ_1 et Δ_2, il est facile de comprendre les diverses parties du problème. En effet, coupons la droite par le plan $z = -1$; nous obtenons $x = -v$, $y = u$. Nous voyons donc qu'à tout couple de valeurs de u et v correspond un point α, parfaitement déterminé dans le plan $z = -1$, et réciproquement. En outre, ce plan coupe les droites fixes Δ_1 et Δ_2 aux points $x = -1$, $y = 1$, $z = -1$ et $x = 1$, $y = -1$, $z = -1$; à ces points α_0 et α_1 correspondent les couples $u = 1$, $v = 1$ et $u = -1$, $v = -1$; la droite Δ, qui passe aux points α_0 et α_1, est tout entière dans le plan $z = -1$.

Alors, si nous nous donnons u et v, nous nous donnons un point α du plan $z = -1$ et par ce point il passe une et une seule droite, en général, qui s'appuie sur Δ_1 et Δ_2; quand α est sur Δ, c'est la droite Δ elle-même. Si α est en α_0 ou α_1, les droites qui s'appuient sur Δ_1 et Δ_2 forment un faisceau plan, et ce fait se manifeste par la coïncidence des plans qui définissent la droite de la congruence. Ce fait analytique introduit dans la congruence des droites exceptionnelles qui n'en font pas vraiment partie ; ce sont toutes les droites de ces deux plans exceptionnels Q_0 et Q_1.

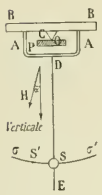
Il serait facile maintenant de développer ces considérations.

Bonnes solutions : MM. Pélissier, à Toulouse ; E. Audibert, lycée de Marseille.
Assez bonnes solutions : MM. H. Janois, à Nantes ; G. Bresse, à Vic-Exemplet.

1525. — *Un système rigide est formé d'un barreau prismatique d'acier* B *non aimanté, d'un couteau d'agate* C *et d'une monture en métal non magnétique* ADE ; DE *est normale aux arêtes du barreau. Une sphère, dont la masse est 5 grammes, est percée diamétralement par la tige* DE *(que nous supposerons infiniment mince) et glisse à frottement dur sur elle.*

Le système repose sur un plan d'agate P *et peut osciller, comme un fléau de balance, autour de l'arête* O *de son couteau. Lorsque la distance* OS *du centre de la sphère à l'arête du couteau est* 20 *centimètres, le centre de gravité du système est sur l'arête et son moment d'inertie est* 3000 (*gr., cm.*).

Première partie. — On fait varier la distance $OS = x$. *On demande quelle est la durée d'oscillation* T *pour* $x = 20, 21, 22, 25, 30$ *centimètres.*



On étudiera l'allure de la courbe $T = f(x)$; T *passe évidemment par un minimum. On calculera les valeurs* T_m, x_m *correspondant à ce minimum. On prendra* 980 (*cm., sec.*) *pour intensité de la pesanteur au lieu de l'expérience.*

Seconde partie. — On aimante le barreau suivant sa largeur BB ; *son moment magnétique est maintenant* 500 C. G. S. *On crée dans le plan du tableau un champ magnétique uniforme de* 2 C. G. S. *représenté par le vecteur* H *faisant l'angle* α *avec la verticale. On place le centre* S *de la sphère à* 25 *centimètres de l'arête* O.

1° *A chaque valeur de* α *correspond pour le fléau une position d'équilibre qu'on peut définir par la position* S' *du point* S *sur la circonférence* $\sigma\sigma'$ *de centre* O *et de rayon* 25 *cm. On étudiera les positions de* S *en fonction de* α *et on calculera approximativement les positions extrêmes. On posera* $SS' = y$.

2° *Pour certaines valeurs de* α, *la durée d'oscillation du système est modifiée au maximum. On déterminera ces positions et on calculera les durées d'oscillation correspondantes.*

3° *On étudiera d'une manière générale la loi de variation de* T *en fonction de* α, *en profitant des approximations légitimées par les calculs précédents.*

Première partie. — La durée d'une oscillation est donnée par la formule connue

$$T = \pi\sqrt{\frac{I}{Mag}},$$

dans laquelle I représente le moment d'inertie du système et Ma le moment de la masse totale par rapport à l'axe de rotation.

Soit I' le moment d'inertie de la sphère par rapport à un axe passant par son centre, I'' le moment d'inertie du système formé par le barreau et le couteau par rapport à l'axe de suspension. Le moment d'inertie total par rapport à l'axe de suspension sera $I' + I'' + 5x^2$. Or, pour $x = 20$, ce moment d'inertie total vaut 3000, d'où $I' + I'' = 1000$ et, d'une manière générale,

$$I = 1000 + 5x^2.$$

D'autre part, pour $x = 20$, le centre de gravité du système total est en O. Donc le centre de gravité du système formé par le barreau et le couteau est au-dessus du point O à une distance a' telle que, M' désignant la masse de ce système partiel, on ait, en valeur absolue, $M'a' = 100$. Pour une position quelconque de la sphère, on aura donc

$$Ma = 5x - 100.$$

En portant ces valeurs dans l'expression de T, on a

$$T = \pi\sqrt{\frac{200 + x^2}{(x - 20) \times 980}},$$

et le calcul donne, pour $x = 20$, $T = \infty$,
— 21, — $2^{sec},541$,
— 22, — $1^{sec},856$,
— 25, — $1^{sec},289$,
— 30, — $1^{sec},053$.

Lorsque x varie, T varie dans le même sens que la longueur du pendule, représentée par

$\frac{200+x^2}{x-20}$, expression dont la dérivée

$$l' = \frac{x^2-40x-200}{(x-20)^2}$$

admet une racine positive $x_m = 44{,}5$.

Tant que l'on a $x < x_m$, T décroît ; pour $x = 44{,}5$, T passe par la valeur minimum

$$T_m = 0^{\text{sec}},947,$$

puis T croît au-delà de toute limite.

Avec les nombres ci-dessus, il est facile de tracer une courbe montrant l'allure de la variation de T.

Seconde partie. — 1° Considérons une position du système dans laquelle la tige DE fait avec la verticale un angle θ et convenons de compter α et θ positivement dans le sens de rotation des aiguilles d'une montre. Le moment du couple magnétique sollicitant le barreau est $1\,000\cos(\alpha-\theta)$ et le moment du poids du système est $-(125-100)g\sin\theta$. Le système est en équilibre si l'on a

$$1\,000\cos(\alpha-\theta) = 25g\sin\theta,$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\cos\alpha}{24{,}5-\sin\alpha} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\operatorname{tg}\theta}{d\alpha} = \frac{1-24{,}5\sin\alpha}{(24{,}5-\sin\alpha)^2}.$$

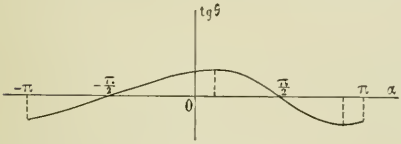
Pour $\alpha = 0$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{24{,}5}$.

Si α augmente, $\operatorname{tg}\theta$ croît d'abord légèrement jusqu'à ce qu'on ait $\sin\alpha = \frac{1}{24{,}5}$ et prend alors la valeur maximum $\frac{1}{\sqrt{24{,}5^2-1}}$.

Puis θ diminue, s'annule pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et devient négatif.

Quand, α s'approchant de π, $\sin\alpha$ repasse par la valeur $\frac{1}{24{,}5}$, $\operatorname{tg}\theta$ passe par un minimum égal, en valeur absolue, au maximum.

Enfin, pour $\alpha = \pi$, $\operatorname{tg}\theta$ prend une valeur égale et de signe contraire à sa valeur initiale.



Faisons varier maintenant α de 0 à $-\pi$; $\operatorname{tg}\theta$ diminue constamment, devient nul pour $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, prend des valeurs négatives et, pour $\alpha = -\pi$, devient égal à $-\frac{1}{24{,}5}$.

La courbe résultant de cette discussion présente l'allure indiquée par la figure.

Pour calculer les arcs SS', nous pouvons assimiler les angles θ à leurs tangentes, de sorte que les y correspondant aux positions d'équilibre extrêmes sont donnés par

$$y = \pm 25 \times \frac{1}{\sqrt{24{,}5^2-1}} = \pm 1^{\text{cm}},02.$$

2° Considérons l'oscillation du système. Le moment d'inertie a pour valeur, d'après l'expression calculée plus haut, $1\,000 + 5\times\overline{25}^2 = 4125$. Si nous considérons d'autre part les moments des forces agissant sur le système, on a pour équation du mouvement

$$4125\frac{d^2\theta}{dt^2} = 1\,000\cos(\alpha-\theta) - 25g\sin\theta$$

ou
$$33\frac{d^2\theta}{dt^2} = 8\cos(\alpha - \theta) - 196\sin\theta.$$

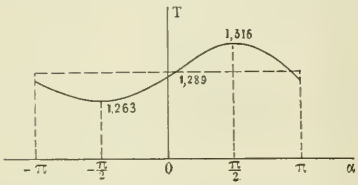
Cette équation conduit à l'expression suivante de la durée d'oscillation
$$T = \frac{\pi\sqrt{33}}{2\sqrt[4]{2\,405 - 196\sin\alpha}}.$$

Les valeurs extrêmes correspondent évidemment à $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$:

pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, le calcul donne $T_M = 1^{\text{sec}},316$,

$\alpha = -\frac{\pi}{2}$ $T_m = 1^{\text{sec}},263$.

Dans le premier cas, on voit aisément que le couple magnétique, pendant l'écart du pendule, tend à augmenter cet écart et la durée d'oscillation est plus grande que si ce couple n'existait pas; dans le second cas, le couple magnétique tend à ramener le pendule et la durée d'oscillation est moindre. La moyenne entre ces valeurs extrêmes est d'ailleurs égale à la durée d'oscillation, $1^{\text{sec}},289$, trouvée pour le système non aimanté.



3° Si α croît à partir de 0, T augmente, passe par sa valeur maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et revient à sa valeur initiale pour $\alpha = \pi$. Si α passe par des valeurs négatives à partir de 0, T diminue, passe par sa valeur minimum pour $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ et revient à sa valeur initiale pour $\alpha = -\pi$. L'amplitude de la variation est un peu plus grande pour les valeurs positives que pour les valeurs négatives, et si l'on calcule les valeurs de α qui donnent la même durée d'oscillation que pour le système non aimanté, on trouve $\sin\alpha = \frac{1}{49}$.

Cette allure est représentée par la courbe ci-jointe.

E. AUDIBERT, lycée de Marseille.

EXAMENS DE 1906 (*Suite.*)

CERTIFICAT D'ÉTUDES SUPÉRIEURES (*Rennes, 8 novembre 1906.*)

Mathématiques générales.

Épreuve théorique.

1. — **1590**. On donne l'équation différentielle
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{a}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)y = 0,$$
où a et b désignent deux constantes positives.

1° Trouver une solution $y = f(x)$ de cette équation, telle que, pour $x = 0$, on ait
$$y = h \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

2° Construire la courbe qui représente la variation de la fonction $y = f(x)$ ainsi déterminée, en supposant que x croisse de 0 à $+\infty$.

Calculer les ordonnées des points où la tangente est parallèle à Ox et les valeurs du rayon de courbure en ces mêmes points.

II. — **1591**. Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{a}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{a^2}y = e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}},$$

a et c désignant deux constantes positives.

Examiner le cas particulier où $c = \pm a$.

Epreuve pratique.

On considère l'enveloppe de la droite définie par l'équation

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = 2\alpha \sin \alpha + 2 \cos \alpha,$$

α désignant un paramètre variable.

Trouver : 1° les coordonnées d'un point de l'enveloppe en fonction du paramètre α ;

2° la longueur d'arc compté à partir du point correspondant à $\alpha = 0$;

3° l'expression du rayon de courbure.

QUESTIONS PROPOSÉES

1592. — On suppose qu'un corps solide qui pourrait tourner autour d'un axe fixe A et glisser le long de cet axe sans frottement, reste en équilibre sous l'action d'un système de forces (S) qu'on laissera d'abord fixes et d'une force variable F appliquée au point fixe P.

1° Trouver le lieu de l'extrémité du vecteur représentant la force F.

2° Montrer que le lieu Σ de l'axe central du système de forces (S, F) est un cylindroïde, c'est-à-dire une surface dont l'équation peut, en coordonnées rectangulaires, se ramener à la forme

$$z(x^2 + y^2) - kxy = 0.$$

3° Montrer que le lieu de l'extrémité du moment résultant du système de forces (S, F) par rapport à son axe central, en supposant l'origine de ce vecteur placée sur l'axe A, est une ellipse C.

4° On laisse fixes l'axe A et le point P, mais on fait varier le système de forces (S) de manière que le cylindroïde Σ ne change pas. Dans ces conditions, l'ellipse C varie. On demande le lieu de son centre, de ses axes, de ses sommets, de ses foyers.

Th. L.

1593. — Un paraboloïde hyperbolique a un plan directeur horizontal ; il admet comme génératrices deux frontales AA′, BB′.

AA′ a pour éloignement 2^{cm} et sa projection verticale passe par le point de cote 10^{cm} du grand axe de la feuille et par le point de la ligne de terre situé à 10^{cm} à droite du grand axe.

BB′ a pour éloignement 10^{cm} et sa projection verticale est symétrique de celle de AA′ par rapport au grand axe de la feuille.

Un ellipsoïde de révolution a pour axe de révolution BB′ ; le petit axe de la méridienne dirigé suivant BB′, a pour longueur 8^{cm} ; son grand axe a pour longueur $8\sqrt{3}$ et le centre est le point de cote 10^{cm}.

Representer le solide commun aux deux corps en supposant que le point le plus haut de l'ellipsoïde est intérieur au paraboloïde.

Nota. — On indiquera les constructions faites pour obtenir : 1° le contour apparent horizontal de l'ellipsoïde ; 2° un point de l'intersection et la tangente en ce point ; 3° les points sur les contours apparents ; 4° les points doubles en projection.

Une notice explicative justifiera ces constructions.

(*Agrégation de mathématiques, 1906. — Epreuves pratiques.*)

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

1552. — *Trouver la condition pour qu'une équation du troisième degré,*

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

devienne réciproque avec la racine 1 *quand on y fait* $x = y + h$, h *étant une certaine constante indéter-*

minée. Trouver la relation qui existe alors entre les racines de l'équation du troisième degré et résoudre cette équation.

Appliquer à $$2x^3 - 13x^2 + 27x - 18 = 0.$$

L'énoncé de ce problème renfermait une erreur d'impression, qui a empêché nos nombreux correspondants de trouver une solution de la question. Il faut changer le signe du troisième coefficient de l'équation numérique indiquée pour que la méthode s'applique avec succès à cette équation numérique.

Il est facile alors d'indiquer une solution de la question et, avec l'exercice indiqué, de mettre la méthode en relief.

Remplaçons dans l'équation donnée x par $y + h$; nous aurons

$$ay^3 + (3ah + b)y^2 + (3ah^2 + 2bh + c)y + ah^3 + bh^2 + ch + d = 0.$$

Cette équation nouvelle doit être réciproque et admettre la racine 1 ; il faut donc que les coefficients équidistants des extrêmes soient égaux et de signes contraires, ce qui donne les deux équations en h,

$$ah^3 + bh^2 + ch + a + d = 0, \qquad 3ah^2 + (3a + 2b)h + b + c = 0.$$

Entre ces équations, on élimine h et on obtient ainsi la condition demandée.

Or ce calcul se fait aisément en multipliant la première équation par 3, la seconde par h, et en retranchant ; on obtient ainsi une deuxième équation du second degré en h et il n'y a plus qu'à éliminer cette inconnue entre les deux équations que voici :

$$3ah^2 + (3a + 2b)h + b + c = 0, \qquad (b - 3a)h^2 + (2c - b)h + 3(a + d) = 0.$$

De là, nous tirons

$$\frac{h^2}{3(a+d)(3a+2b)-(b+c)(2c-b)} = \frac{h}{(b+c)(b-3a)-9a(a+d)} = \frac{1}{3a(2c-b)-(3a+2b)(b-3a)}.$$

Ce calcul nous donne h et h^2 et, par suite, immédiatement, en égalant à h^2 le carré de h,

$$[9a(a+d)-(b+c)(b-3a)]^2$$
$$- [3(a+d)(3a+2b)-(b+c)(2c-b)][3a(2c-b)-(3a+2b)(b-3a)] = 0.$$

Telle est la condition demandée. Quant à la valeur de h, elle est fournie par l'égalité des deux derniers rapports.

On pourrait trouver la relation qui existe entre les trois racines de l'équation cubique en se servant de la condition précédente et des relations qui existent entre les coefficients et les racines ; mais ce procédé est beaucoup trop compliqué, et il vaut mieux suivre une autre méthode.

Soient α, β, γ les racines de l'équation cubique, y, $\frac{1}{y}$ et 1 les trois racines de la nouvelle équation ; nous avons

$$\alpha = y + h, \qquad \beta = 1 + h, \qquad \gamma = \frac{1}{y} + h,$$

et, par suite, en éliminant y et h,

$$(\alpha - \beta + 1)(\gamma - \beta + 1) = 1 \qquad \text{ou} \qquad \beta^2 - \beta(\alpha + \gamma + 2) + (\alpha + 1)(\gamma + 1) - 1 = 0.$$

Cette relation conduirait à une relation entre les coefficients de l'équation, en y joignant les deux relations qu'on obtient en faisant jouer successivement à α et à γ le même rôle qu'à β, puis faisant le produit des trois, on aurait ainsi une relation symétrique entre α, β, γ et il n'y aurait plus qu'à la calculer en fonction des coefficients de l'équation cubique.

On peut encore procéder autrement : la relation que nous avons trouvée s'écrit

$$\beta^2 - 2\beta - \Sigma\alpha\beta + 2\alpha\gamma + \Sigma\alpha - \beta = 0,$$

ou

$$\beta^2 - 3\beta - \frac{c}{a} - \frac{b}{a} - \frac{2d}{a\beta} = 0.$$

Alors il n'y a plus qu'à éliminer β entre cette équation et l'équation donnée

$$a\beta^3 + b\beta^2 + c\beta + d = 0.$$

Appliquons à l'exemple $2x^3 - 13x^2 + 27x - 18 = 0.$

Les deux équations en h sont $6h^2 - 20h + 14 = 0$, $19h^2 - 67h + 48 = 0$; il est visible qu'elles ont 1 pour racine commune.

Alors, en posant $x = y + 1$, on a une équation réciproque en y que l'on sait résoudre,

$$2y^3 - 7y^2 + 7y - 2 = 0.$$

Les racines sont 1, 2 et $\frac{1}{2}$. Celles de l'équation en x sont donc 2, 3 et $\frac{3}{2}$.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1547. — *On considère une parabole* $y^2 - 2px = 0$ *et un point* $A(\alpha, \beta)$ *de son plan.*

1° *Trouver la seconde parabole qui passe par les points de rencontre de la parabole donnée avec le cercle de rayon nul ayant pour centre le point* A, *et le lieu de ce point quand cette nouvelle parabole est tangente à une tangente à la première qui a pour coefficient angulaire* m;

2° *Dans les mêmes conditions, trouver le lieu du point de rencontre des deux autres tangentes communes aux deux paraboles;*

3° *Déterminer les cordes des contacts relatives à ces tangentes pour les deux paraboles et le lieu de leur point de rencontre quand le point* A *varie de la façon indiquée.*

1. Le cercle de rayon nul ayant son centre au point (α, β) a pour équation $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 0$; en y remplaçant y^2 par $2px$, nous obtenons une parabole qui passe aux quatre points de rencontre des deux lignes; c'est la parabole demandée

$$x^2 - 2(\alpha - p)x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 = 0.$$

Nous voyons de suite qu'elle a son axe perpendiculaire à celui de la première parabole, résultat attendu, puisque, lorsque dans un faisceau linéaire de coniques, il y a un cercle, les axes de ces coniques sont parallèles.

La tangente à la première parabole, de coefficient angulaire m, a pour équation

$$y = mx + \frac{p}{2m};$$

elle rencontre la seconde en deux points dont les abscisses sont racines de l'équation

$$x^2 - 2(\alpha + \beta m - p)x + \alpha^2 + \beta^2 - \frac{p\beta}{m} = 0,$$

et nous exprimerons qu'elle est tangente à cette parabole en écrivant qu'il y a deux racines confondues, ce qui nous donne

$$(\alpha + \beta m - p)^2 - \alpha^2 - \beta^2 + \frac{p\beta}{m} = 0.$$

Telle est la relation qui existe entre α et β; tel est le lieu du point A. Ce lieu se décompose en deux droites

$$\beta m - p = 0 \quad \text{ou} \quad y = \frac{p}{m},$$

$$2\alpha + \beta m - p - \frac{\beta}{m} = 0 \quad \text{ou} \quad y = \frac{2mx - pm}{1 - m^2}.$$

La première est la parallèle à l'axe menée par le point de contact de la parabole et de la tangente fixes; la seconde est la droite qui joint le foyer à ce point de contact.

2. La relation trouvée entre α, β et m donne les coefficients angulaires des tangentes communes aux deux paraboles: il suffit d'y remplacer m par μ. Si ensuite, nous retranchons de cette nouvelle

équation celle que nous avions déjà, et qui exprime que m est racine, nous avons

$$\beta^2(\mu^2 - m^2) + 2\beta(\alpha - p)(\mu - m) + p\beta\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{m}\right) = 0;$$

divisons par $\mu - m$ et par β, nous avons finalement

$$\beta m\mu(\mu + m) + 2(\alpha - p)m\mu - p = 0;$$

c'est l'équation qui donne les coefficients angulaires des deux autres tangentes communes. D'autre part, si nous appelons (x, y) le point de concours de ces deux droites, l'équation qui donne μ est

$$y = \mu x + \frac{p}{2\mu},$$

ou

$$2\mu^2 x - 2\mu y + p = 0;$$

nous avons donc, en identifiant,

$$2x = -\beta m, \qquad 2y = \beta m^2 + 2m(\alpha - p).$$

Quand le point (α, β) se meut sur la parallèle à l'axe, $\beta m = p$, et le lieu du nouveau point est la directrice de la parabole,

$$2x = -p.$$

Quand le point (α, β) se meut sur la seconde droite, il faut éliminer α et β entre les trois équations et l'on a

$$2x + 2my + pm^2 = 0;$$

le lieu est une droite perpendiculaire à la tangente fixe et qui la rencontre sur la directrice.

3. Pour traiter la dernière partie, il vaut mieux prendre pour paramètres variables les coordonnées du point de rencontre des deux tangentes communes. Appelons-les a et b. les nombres α et β auront pour valeurs

$$\beta = -\frac{2a}{m}, \qquad \alpha = p + \frac{b + ma}{m},$$

et l'équation de la seconde parabole deviendra

$$x^2 - 2\frac{b + ma}{m}x + \frac{4a}{m}y + \frac{4a^2}{m^2} + \frac{(b + ma + pm)^2}{m^2} = 0.$$

Cela posé, les cordes de contact des deux paraboles sont les polaires du point (a, b) par rapport aux deux paraboles ; elles ont donc pour équations

$$by - px - pa = 0,$$

et

$$m(2ay - bx) + abm - a^2m^2 + 4a^2 + (b + ma + pm)^2 = 0.$$

Nous aurons les deux lieux en faisant parcourir au point (a, b) successivement les deux droites qu'il décrit.

Prenons d'abord la directrice ; alors $a = -\frac{p}{2}$ et b est arbitraire : l'élimination est immédiate, il n'y a qu'à tirer b de la première et porter dans la seconde, après avoir remplacé a par $-\frac{p}{2}$. Ceci donne $b = \frac{p}{y}\left(x - \frac{p}{2}\right)$, et la seconde polaire fournit le lieu :

$$(p - my)\left[\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2\right] = 0.$$

Ce lieu se décompose en une droite et un cercle de rayon nul ; la droite, $y = \frac{p}{m}$, qui est le vrai lieu, est justement celle qui passe au point de contact de la parabole donnée avec la tangente fixe.

Supposons maintenant que le point (a, b) décrive la seconde droite, c'est-à-dire que a et b vérifient la relation

$$2a + 2mb + pm^2 = 0.$$

Nous aurons alors le lieu en éliminant a et b entre cette équation et celles des deux polaires. Cela nous fait deux équations linéaires en a et b, et une, du second degré. Les deux équations linéaires nous donnent de suite a et b :

$$a = -pm\frac{my + 2x}{2(y + mp)}, \qquad b = p\frac{2x - pm^2}{2(y + mp)},$$

et il n'y a plus qu'à porter ces valeurs dans l'équation de la seconde polaire pour avoir le lieu demandé. L'équation se simplifie beaucoup en portant les axes parallèlement à eux-mêmes au pôle de la droite

$$2x + 2my + pm^2 = 0,$$

c'est-à-dire au point $\qquad x = \frac{pm^2}{2}, \qquad y = -pm\,;$

alors a et b deviennent $\qquad a = -pm\,\frac{(2x+my)}{2y}, \qquad b = p\,\frac{x}{y},$

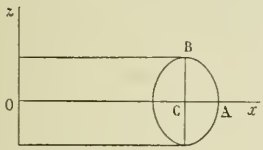
et l'équation du lieu, $\qquad 2m^2y^2(2x+my) - 2mx^2y + 2p(x+my)^2 + pm^2x(2x+my) = 0.$

Cette courbe est une cubique ayant un point double à la nouvelle origine et dont l'une des directions asymptotiques coïncide avec Ox.

Bonne solution : M. Audibert, élève au lycée de Marseille.

PHYSIQUE

1554. — *On donne un volant dont la couronne a un diamètre extérieur égal à 5 mètres et un diamètre intérieur égal à 4 mètres. La section méridienne, abstraction faite du moyeu et des bras, est composée de deux ellipses dont le grand axe, parallèle à l'axe de rotation Oz, a une longueur de* $0^m,7$.



Ce volant est animé d'une vitesse de 120 tours à la minute; on demande :

1° *Sa masse, en le supposant composé de fonte de densité égale à 7,3;*

2° *Son moment d'inertie par rapport à Oz et son rayon de gyration par rapport à un axe parallèle à Oz et tangent à la surface extérieure de la couronne;*

3° *Le nombre de kilogrammètres emmagasinés cinétiquement;*

4° *La quantité de chaleur dégagée dans l'hypothèse d'un arrêt brusque, la température finale du volant au-dessus de l'ambiance dans cet arrêt, en supposant que la chaleur spécifique de la fonte soit 0,1138;*

5° *En supposant que ce volant doive fournir brusquement 50 000 kilogrammètres en une seconde, dire quelle sera la diminution relative de sa vitesse angulaire.*

1° Soit C le centre de l'ellipse méridienne AB. Posons $OC = l$, $CA = a$, $CB = b$ et désignons par δ la masse spécifique.

La surface de l'ellipse est πab et le théorème de Guldin donne pour le volume engendré $\pi ab \times 2\pi l$; la masse est donc $\qquad m = 2\pi^2 abl\delta.$

D'après les données, et en exprimant les longueurs en centimètres, on a $a = 25$, $b = 35$, $l = 225$. Le calcul donne $\qquad m = 28\,370\,000 = 28^{\text{tonnes}},37.$

2° L'énergie cinétique du volant a pour expression, si on désigne par ω la vitesse angulaire et par I le moment d'inertie, $\qquad W = \frac{1}{2}\omega^2 I.$

Calculons I. Un élément de volume compris entre deux cylindres d'axe Oz et de rayons x et $x + dx$ a pour expression $2zdx \times 2\pi x$; son moment d'inertie est

$$dI = 4\pi\delta z x^3 dx, \qquad \text{d'où} \qquad I = 4\pi\delta \int_{l-a}^{l+a} z x^3 dx.$$

Or, de l'équation de l'ellipse, $\qquad \frac{(x-l)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$

on tire $\qquad z = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (x-l)^2}.$

Substituons, il vient $\quad I = 4\pi\delta \frac{b}{a} \cdot \int_{l-a}^{l+a} \sqrt{a^2-(x-l)^2}\, x^3 dx.$

Pour intégrer, posons $\quad x - l = a \sin \varphi,$

d'où $\quad a^2-(x-l)^2 = a^2\cos^2\varphi, \qquad x = l + a\sin\varphi, \qquad dx = a\cos\varphi d\varphi.$

Il vient, après développement,

$$I = 4\pi\delta ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} [l^3 + 3al^2 \sin\varphi + (3a^2l - l^3)\sin^2\varphi + (a^3 - 3al^2)\sin^3\varphi - 3a^2l\sin^4\varphi - a^3\sin^5\varphi] d\varphi.$$

On voit facilement que les intégrales, entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, des puissances impaires de $\sin\varphi$ sont nulles. On calcule les autres en introduisant l'angle double et on trouve

$$I = 2\pi^2 abl\delta\left(l^2 + \frac{3}{4}a^2\right) = m\left(l^2 + \frac{3}{4}a^2\right),$$

$$I = 1{,}45 \times 10^{12}.$$

Lorsqu'on passe d'un axe passant par le centre de gravité à un axe parallèle, le moment d'inertie augmente du produit de la masse par le carré de la distance des axes. On a donc, en désignant par k le rayon de gyration cherché,

$$mk^2 = m\left(l^2 + \frac{3}{4}a^2\right) + m(l+a)^2, \qquad k^2 = 2l^2 + 2al + \frac{7}{4}a^2, \qquad k = 337^{\text{cm}}.$$

3° Si, dans l'expression de W, nous remplaçons I par la valeur trouvée ci-dessus et ω par la valeur 4π qui résulte des données, nous aurons l'énergie cinétique en unités C. G. S. Or un kilogrammètre vaut $9{,}81 \times 10^7$ unités C. G. S. Le nombre cherché est donc

$$n = \frac{\omega^2 I}{2 \times 9{,}81 \times 10^7} = 1{,}167 \times 10^6.$$

4° Si l'on désigne par J l'équivalent mécanique d'une petite calorie, la quantité de chaleur q équivalente à l'énergie cinétique du volant sera $\quad q = \frac{\omega^2 I}{2J}.$

Prenons pour J la valeur $4{,}18 \times 10^7$; on trouve $q = 2{,}738 \times 10^6$.

La variation de température θ produite par cette chaleur dans un corps de masse m et de chaleur spécifique c est donnée par la relation $\quad q = mc\theta, \qquad$ d'où $\qquad \theta = 0^\circ{,}848.$

5° Si ω' désigne la vitesse angulaire après la production de 50 000 kilogrammètres, on doit avoir

$$\frac{1}{2}\omega'^2 I = \frac{1}{2}\omega^2 I - 50\,000 \times 9{,}81 \times 10^7.$$

On en déduit successivement $\quad \omega^2 - \omega'^2 = 6{,}768, \quad \omega' = 12{,}294, \quad \omega - \omega' = 0{,}272$ et enfin

$$\frac{\omega - \omega'}{\omega} = 0{,}022.$$

Assez bonnes solutions de MM. P. Brizard ; Jean Labyse, à Montluçon. Louis BOISSIER.

QUESTIONS PROPOSÉES

1594. — Une droite C glisse sur les deux droites rectangulaires

$$\begin{cases} z = c, \\ x = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} z = -c, \\ y = 0. \end{cases}$$

Le segment intercepté sur C a une longueur constante. Étudier la surface engendrée par C, les sections parallèles au plan des xy et le contour apparent sur ce plan. Déterminer les points doubles et les lignes asymptotiques. W. Mérigot, à Paris.

1595. — Trouver les trajectoires orthogonales d'un système de cercles tangents à deux droites rectangulaires. A. Darmon.

OAR LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET. *Le Rédacteur-Gérant :* H. VUIBERT.

17e Année. N° 9. Juin 1907.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SURFACES RÉGLÉES DU TROISIÈME ORDRE

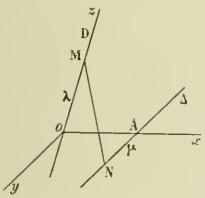
par M. **Parrod**.

Nous savons que ces surfaces ont une droite double D et une droite simple Δ appelée *directrice*.

Prenons pour axe des z la droite D, pour axe des y une parallèle à Δ et pour axe des x une droite rencontrant Δ en un point A.

Soit MN une génératrice, posons $oA = d$, $oM = \lambda$ et $AN = \mu$.

A une valeur de λ, il en correspond deux pour μ et à une valeur de μ, il en correspond une pour λ;



donc
$$\lambda = \frac{a\mu^2 + b\mu + c}{a'\mu^2 + b'\mu + c'}.$$

Choisissons les origines o et A de λ et μ pour simplifier cette relation.

Si $a' \neq 0$, on prendra $\lambda = \dfrac{a\mu + b}{\mu^2 - h^2}$;

Si $a' = 0$, on prendra $\lambda = \dfrac{\mu^2 - h^2}{a\mu + b}$,

h peut être purement imaginaire.

Rappelons que si $a = a' = 0$ la surface est un hyperboloïde et si $a = a' = b' = 0$, la surface est un paraboloïde.

Construction de la surface. — A chaque valeur de λ il correspond pour μ deux valeurs μ' et μ'',

dans le premier cas, on a $\mu'\mu'' + \dfrac{b}{a}(\mu' + \mu'') + h^2 = 0$;

dans le deuxième cas, on a $\mu'\mu'' + \dfrac{b}{a}(\mu' + \mu'') + h^2 = 0$.

Dans la première surface $\lambda = \dfrac{a}{\mu' + \mu''}$ et, dans l'autre, $\lambda = \dfrac{\mu' + \mu''}{a}$.

Donc si, sur une droite Δ, on place deux divisions en involution et que l'on joigne les deux points de chaque couple à un point M d'une droite D ne rencontrant pas la droite Δ et tel que la distance à un point fixe de cette droite soit inversement proportionnelle à la somme algébrique des abscisses des points du couple, on obtient une surface du troisième ordre et de la première catégorie.

Si l'on prend cette distance proportionnelle à la somme des abscisses la surface sera de la deuxième catégorie.

Équations des surfaces. — Les équations d'une génératrice MN sont

$$\frac{x}{d} = \frac{y}{\mu} = \frac{\lambda - z}{\lambda};$$

d'où
$$\mu = \frac{dy}{x}, \qquad \lambda = \frac{dz}{d - x}.$$

Les équations des surfaces sont alors de la forme

$$\frac{dz}{d-x} = \frac{(ay+bx)x}{y^2-h^2x^2}, \qquad a' \neq 0,$$

$$\frac{dz}{d-x} = \frac{y^2-h^2x^2}{(ay+bx)x}, \qquad a' = 0,$$

h^2 peut être négatif.

Le cône des parallèles aux génératrices menées par l'origine est dans le premier cas du troisième ordre; dans l'autre, il est du second ordre.

Représentation plane. — Posons

$$\left\{\begin{aligned} dz &= \alpha'(ay+bx), \\ d-x &= \beta'(y+hx), \\ \beta' x &= \alpha'(y-hx), \end{aligned}\right.$$

et résolvons, il vient : $\dfrac{x}{\alpha'} = \dfrac{y}{\beta'+h\alpha'} = \dfrac{dz}{\alpha'(a\beta'+ah\alpha'+b\alpha')} = \dfrac{d}{\alpha'+\beta'(\beta'+2h\alpha')}$;

posons ensuite $\qquad \alpha' = \alpha, \qquad \beta'+h\alpha' = \beta,$

nous aurons $\qquad \dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{y}{\beta} = \dfrac{dz}{b\alpha^2+a\alpha\beta} = \dfrac{d}{\beta^2-h^2\alpha^2+\alpha},$

les coefficients sont alors réels dans tous les cas.

Pour la deuxième surface, posons de même,

$$\left\{\begin{aligned} d-x &= \alpha'(ay+bx), \\ dz &= \beta'(y+hx), \\ \beta' x &= \alpha'(y-hx), \end{aligned}\right.$$

puis $\alpha' = \alpha$ et $\beta'+h\alpha' = \beta$; nous aurons

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{dz}{\beta^2-h^2\alpha^2} = \frac{d}{b\alpha^2+a\alpha\beta+\alpha}.$$

Sections planes. — Soit le plan $Ax+By+Cdz+Dd=0$,

on a $\qquad A\alpha+B\beta+C(b\alpha^2+a\alpha\beta)+D(\beta^2-h^2\alpha^2+\alpha)=0,$

ou $\qquad A\alpha+B\beta+C(\beta^2-h^2\alpha^2)+D(b\alpha^2+a\alpha\beta+\alpha)=0.$

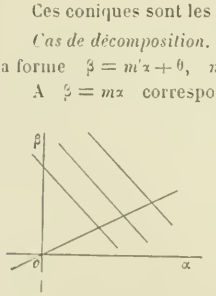
α et β étant coordonnées cartésiennes, ces équations sont celles de coniques passant par l'origine et dont les directions asymptotiques forment deux faisceaux en involution, m et m' étant leurs coefficients angulaires ; dans les deux cas

$$mm' + \frac{b}{a}(m+m') + h^2 = 0.$$

Ces coniques sont les *images* de cubiques planes ayant un point double.

Cas de décomposition. — L'une des droites passera par l'origine et sera $\beta = m\alpha$; l'autre sera de la forme $\beta = m'\alpha+\theta$, m et m' vérifiant la relation involutive, et θ sera un paramètre.

A $\beta = m\alpha$ correspond une génératrice de la surface ; les images des coniques sections par les plans tournants autour de cette génératrice sont $\beta = m'\alpha+\theta$, toutes ces droites images sont parallèles.



Aux deux droites doubles, il correspond deux plans tangents singuliers ; ils sont tangents tout le long d'une génératrice et contiennent la directrice ; ils correspondent aux valeurs de μ pour lesquelles la fonction de μ est maximum ou minimum. Ces deux plans limitent la surface.

A toute droite du plan qui ne passe pas par l'origine, il correspond sur la surface une conique ; par un point de la surface il passe une infinité de coniques ; par deux points il en passe une.

Les points à l'infini de la surface correspondent aux lignes

$$\beta^2 - h^2\alpha^2 + \alpha = 0, \qquad \text{ou} \qquad \alpha(b\alpha + a\beta + 1) = 0.$$

Genre des coniques. — Soit m l'image d'un point M. On sait que deux courbes passant par M et tangentes en ce point ont pour images deux courbes passant par m et tangentes en ce point.

Désignons par C la conique $\beta^2 - h^2\alpha^2 + \alpha = 0$. Aux droites rencontrant C correspondent des hyperboles; à celles qui ne la rencontrent pas il correspond des ellipses ; aux tangentes, des paraboles. Il y a donc une infinité de paraboles ; par tout point de la surface, il en passe deux.

Pour la deuxième catégorie de surfaces, nous avons les deux droites $\alpha(b\alpha + a\beta + 1) = 0$.

Il n'y a pas d'ellipse, toutes les coniques ont une asymptote parallèle au plan zoy.

Aux parallèles à la droite $b\alpha + a\beta + 1 = 0$ correspondent les sections parallèles au plan zoy.

Généralisation. — Si x, y et z s'expriment rationnellement à l'aide des quatre premiers membres d'équations de coniques passant par un point fixe, la surface est une des précédentes.

Soient $\varphi_1(\alpha, \beta)$, φ_2, φ_3 et φ_4, prenons l'origine au point commun.

$$\varphi_4(\alpha, \beta) = A_4\alpha^2 + B_4\alpha\beta + C_4\beta^2 + D_4\alpha + \beta.$$

Par un changement de paramètres, φ_4 peut prendre la forme $\varphi_4 = A_4\alpha^2 + C_4\beta^2 + D_4\alpha$.

Considérons la combinaison linéaire

$$A\varphi_1 + B\varphi_2 + C\varphi_3 + D\varphi_4.$$

On peut déterminer A, B, C, D de façon que cette fonction de α et β prenne successivement les trois formes

$$A_3\alpha^2 + B_3\alpha\beta, \qquad A_1(A_3\alpha^2 + B_3\alpha\beta) + D_1\alpha, \qquad C_2(A_4\alpha^2 + C_4\beta^2 + D_4\alpha) + E_1\beta;$$

on aura

$$\frac{x}{A_1(A_3\alpha^2 + B_3\alpha\beta) + D_1\alpha} = \frac{y}{C_2(A_4\alpha^2 + C_4\beta^2 + D_4\alpha) + E_1\beta} = \frac{z}{A_3\alpha^2 + B_3\alpha\beta} = \frac{1}{A_4\alpha^2 + C_4\beta^2 + D_4\alpha},$$

en prenant pour plans de coordonnées les trois plans qui correspondent à ces trois combinaisons linéaires.

On en déduit visiblement par un nouveau changement de plans

$$\frac{x}{D_1\alpha} = \frac{y}{E_1\beta} = \frac{z}{A_3\alpha^2 + B_3\alpha\beta} = \frac{1}{A_4\alpha^2 + C_4\beta^2 + D_4\alpha},$$

les coefficients ayant d'autres valeurs.

Posons

$$D_1\alpha = k\alpha', \qquad E_1\beta = k\beta',$$

$$A_4\alpha^2 + C_4\beta^2 + D_4\alpha = A_4\frac{k^2}{D_1^2}\alpha'^2 + C_4\frac{k^2}{E_1^2}\beta'^2 + \frac{k}{D_4}\alpha'.$$

Déterminons k de façon que le coefficient de β'^2 soit égal à celui de α', on a alors visiblement, en supprimant les accents, la forme

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{a\alpha^2 + b\alpha\beta} = \frac{d}{\beta^2 - h^2\alpha^2 + \alpha}.$$

Le calcul est le même si φ_4 se décompose en deux facteurs linéaires (deuxième catégorie).

SUR LE THÉORÈME DE VILLARCEAU

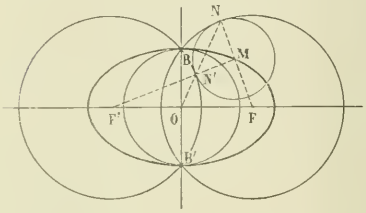
par M. **J. Lebel**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Montpellier.

On établit ordinairement la propriété du plan bitangent au tore au moyen du nombre et de la nature des points doubles de la section. Si ces considérations mènent rapidement au but, il faut convenir qu'elles font regretter une vision directe des éléments de la figure que la simplicité des données pourrait faire espérer.

Les vérifications géométriques que l'on a proposées jusqu'ici présentent des inconvénients sur lesquels il serait superflu d'insister. On obtient une démonstration suffisamment intuitive en considérant la section faite par le plan bitangent comme l'enveloppe des cercles qu'il détermine dans les sphères égales inscrites le long des cercles méridiens. Il suffit de s'appuyer sur ce principe connu :

Les cercles orthogonaux à un cercle fixe, et dont le centre décrit une ellipse bitangente à ce cercle, sont tangents à deux cercles fixes.

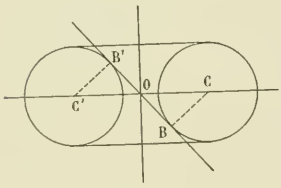
Considérons, par exemple, le cercle décrit sur le petit axe BB′ comme diamètre, et qui est seul utile pour le tore. Les rayons vecteurs d'un point M de l'ellipse peuvent être désignés par $a-\rho$ et $a+\rho$, de sorte que le cercle de centre M et de rayon ρ est tangent aux deux cercles de rayon a qui ont pour centres les deux foyers, et la corde des contacts NN′ passe par le centre de similitude inverse des deux cercles, qui est le centre O de l'ellipse. La relation



$$\overline{ON}.\overline{ON'} = \overline{OB}^2$$

montre que le cercle (M) est orthogonal à celui qui a BB′ pour diamètre. C'est cette famille des cercles (M) que nous allons faire apparaître sur le tore.

Un plan (P) étant tangent à la surface en B et B′, les centres M des cercles qu'il détermine dans les sphères inscrites sont les projections sur ce plan des centres des sphères elles-mêmes, qui sont distribués sur un cercle dont nous désignerons le rayon par a. Sa projection est une ellipse de grand axe $2a$, le petit axe étant BB′. La puissance du centre O du tore par rapport à tous les cercles (M) est la même que par rapport aux sphères, c'est-à-dire égale à $\overline{OB}^2$. La proposition est donc démontrée, et l'on a immédiatement les centres des cercles et leurs rayons.



Avec un cercle bitangent quelconque, le principe du début, qui s'établit de la même manière, s'applique à la cyclide de Dupin.

Enfin, comme il convient aussi aux cercles d'une sphère et à une ellipse sphérique, il donne une démonstration *directe* pour la sphère bitangente.

CERTIFICAT D'ÉTUDES SUPÉRIEURES (*Rennes, 28 juin 1906.*)

Mathématiques générales.

1523. — *Déterminer les courbes planes dans lesquelles l'angle α que forme la tangente avec l'axe Ox est donné en fonction de l'abscisse par la formule*

$$\sin\alpha = \frac{2ax}{a^2+x^2}, \qquad a \text{ désignant une constante positive.}$$

1° *Montrer que ces courbes peuvent se représenter par l'une ou l'autre des équations*

$$(1) \qquad y = c \pm a\,\mathrm{l}.\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

$$(2) \qquad y = c \pm a\,\mathrm{l}.\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right);$$

2° *Étudier les deux courbes*

$$(1') \qquad y = a\mathrm{L}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

$$(2') \qquad y = a\mathrm{L}\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$$

et faire voir que toutes les autres courbes considérées (1) *et* (2) *s'en déduisent par translation ou par symétrie.*

(*On déterminera la forme de la courbe, le rayon de courbure en fonction de l'abscisse, les asymptotes et les points d'inflexion s'il en existe.*)

3° *Trouver les trajectoires orthogonales des courbes* (1) *et* (2).

1° L'expression de $\sin\alpha$ en fonction de $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = t$ est $\frac{2t}{1+t^2}$. Si l'on compare cette valeur à celle qui est donnée, on voit de suite que t a l'une ou l'autre des valeurs $\frac{a}{x}$ ou $\frac{x}{a}$. Ceci se voit d'ailleurs aussi en résolvant l'équation du second degré en t,

$$\frac{t}{1+t^2} = \frac{ax}{a^2+x^2}.$$

D'autre part, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$; $\operatorname{tg}\alpha$ a donc les deux valeurs $\frac{2ax}{x^2-a^2}$ et $\frac{2ax}{a^2-x^2}$. Si y désigne la fonction de x qui donne l'ordonnée de l'une des courbes cherchées, on a donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2ax}{x^2-a^2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2ax}{a^2-x^2}.$$

La première relation différentielle donne

$$y = \mathrm{C} + a\mathrm{L}\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) \qquad \text{ou} \qquad y = \mathrm{C} + a\mathrm{L}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

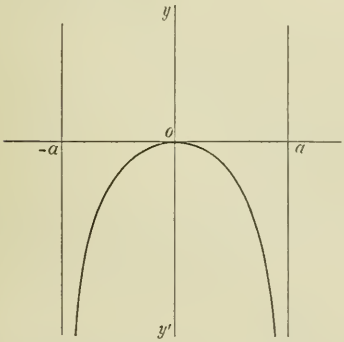
suivant que $|x| > a$ ou $< a$.

La deuxième donne de même

$$y = \mathrm{C} - a\mathrm{L}\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) \qquad \text{ou} \qquad y = \mathrm{C} - a\mathrm{L}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

2° Construisons la courbe

$$y = a\mathrm{L}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$



Pour celle-ci $y' = \frac{2ax}{x^2-a^2}$. Nous voyons de suite que la courbe est tout entière comprise entre les deux parallèles à oy, $x = \pm a$, qu'elle est symétrique par rapport à oy et au-dessous de ox. Quand x varie de $-a$ à 0, y croît de $-\infty$ à 0, et, quand x croît de 0 à a, y décroît de 0 à $-\infty$. La dérivée seconde de y est

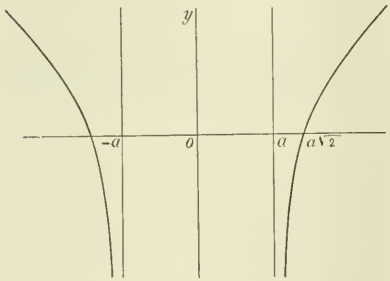
$$y'' = -2a\frac{x^2+a^2}{(x^2-a^2)^2};$$

elle est toujours négative; donc la courbe n'a aucune sinuosité et tourne toujours sa concavité vers les y négatifs.

En faisant subir à cette courbe toutes les translations possibles parallèles à oy, nous obtenons toute les courbes

$$y = \mathrm{C} + a\mathrm{L}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

La courbe $y = -a\mathrm{L}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ n'est pas autre chose que la symétrique de celle-ci par rapport à ox ; en lui faisant subir toutes les translations possibles parallèles à oy, nous aurons les courbes



$$y = \mathrm{C} - a\mathrm{L}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Construisons maintenant la courbe

$$y = a\mathrm{L}\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right).$$

Pour celle-ci aussi nous avons $y' = \frac{2ax}{x^2 - a^2}$.

Il est visible encore que cette courbe est tout entière en dehors des deux parallèles à oy, $x = \pm a$, qu'elle est symétrique par rapport à oy et tourne sa concavité vers les y négatifs. Quand x croît de a à $+\infty$, y croît de $-\infty$ à $+\infty$ et passe par 0, pour $x = a\sqrt{2}$. La branche infinie qui correspond à $x = +\infty$ est parabolique dans la direction ox. La forme de la courbe découle de ce que nous avons dit.

En imprimant à cette courbe toutes les translations possibles parallèles à oy, nous aurons les courbes

$$y = \mathrm{C} + a\mathrm{L}\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right).$$

En prenant la symétrique par rapport à ox, nous avons la courbe

$$y = -a\mathrm{L}\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right);$$

puis les diverses translations parallèles à oy nous donnent les courbes

$$y = \mathrm{C} - a\mathrm{L}\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right).$$

Le rayon de courbure a pour valeur

$$\mathrm{R} = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Nous avons calculé y' et y'' ; il nous est donc facile d'avoir R. Nous avons d'abord

$$1 + y'^2 = \frac{(x^2 + a^2)^2}{(x^2 - a^2)^2}, \qquad \text{puis} \qquad (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{x^2 + a^2}{x^2 - a^2}\right)^3,$$

et enfin

$$\mathrm{R} = \frac{(x^2 + a^2)^2}{2a(a^2 - x^2)} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{R} = \frac{(x^2 + a^2)^2}{2a(x^2 - a^2)},$$

suivant qu'il s'agit d'un point de la première courbe ou d'un point de la seconde.

3° Nous obtenons l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des courbes (1) et (2) en changeant y' en $-\frac{1}{y'}$. Nous avons ainsi

$$y' = \frac{a^2 - x^2}{2ax} \qquad \text{ou} \qquad y' = \frac{x^2 - a^2}{2ax}.$$

Les trajectoires orthogonales des courbes $y = \mathrm{C} + a\mathrm{L}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ et $y = \mathrm{C} + a\mathrm{L}\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$ sont donc

$$y = \frac{a}{2}\mathrm{L}\frac{|x|}{a} - \frac{x^2}{4a} + \mathrm{C},$$

et celles des courbes

$$y = C - aL\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \qquad \text{et} \qquad y = C - aL\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right),$$

sont

$$y = \frac{x^2}{4a} - \frac{a}{2} L \frac{|x|}{a} + C.$$

Bonnes solutions : MM. G. Frey, à Alger ; R. de Faria ; W. Mérigot ; Prévot, à Reims ; A. Cotty ; J. Soudet, lycée de Rouen.
Assez bonnes solutions : MM. G. Foucry, à Roanne ; J. Lhermitte, à Caen.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE (*Concours de 1906, fin.*)

Groupe II.

1527. — *Un observateur est doué d'une vue normale, sa distance minimum de vision distincte a une valeur* Δ *; il regarde un petit objet à travers une loupe de foyer* φ, *placée tout contre l'œil. Entre quelles limites peut-il déplacer l'objet sans cesser de voir nettement l'image? Comment varie la latitude de mise au point (distance* d *entre les deux positions limites précédentes) avec la puissance de la loupe? Calculer la valeur de* d *pour* $\Delta = 200^{\text{mm}}$ *en donnant à* φ *successivement les valeurs* $\varphi = 100^{\text{mm}}$ *et* $\varphi = 20^{\text{mm}}$.

Le même observateur regarde un petit objet à travers un microscope dont l'objectif a une distance focale $f = 4^{\text{mm}}$, *et l'oculaire une distance focale* $\varphi = 20^{\text{mm}}$, *la distance* l *entre le foyer supérieur de l'objectif et le foyer inférieur de l'oculaire est égale à* 160^{mm}. *Quelle est maintenant la valeur de la latitude de mise au point? On supposera dans ce calcul que l'oculaire est une lentille simple, et que l'œil, comme précédemment, est placé tout contre.*

Ces deux dernières hypothèses sont-elles réalisées dans la pratique? L'oculaire dont on se sert ordinairement dans le microscope peut-il servir de loupe, et quelle est la place normale que l'œil doit occuper?

1. Soient π et π' les distances de l'objet et de l'image aux foyers correspondants de la lentille. On a

$$\pi\pi' = \varphi^2.$$

Quand l'observateur regarde à l'infini, l'objet est au foyer. Quand il regarde au punctum proximum et que l'œil est tout contre la loupe, π' est égal à $\Delta + \varphi$ et π représente précisément la latitude de mise au point ; on a donc

$$d = \frac{\varphi^2}{\Delta + \varphi}.$$

Cette expression varie toujours dans le même sens que φ et diminue, par conséquent, quand la puissance de la loupe augmente.

Pour $\varphi = 100^{\text{mm}}$, $d = \dfrac{10000}{200 + 100} = \dfrac{100}{3} = 33^{\text{mm}},3$;

Pour $\varphi = 20^{\text{mm}}$, $d = \dfrac{400}{200 + 20} = \dfrac{40}{22} = 1^{\text{mm}},8$.

2. Considérons maintenant le cas du microscope. Quand l'observateur regarde à l'infini, l'image objective est au foyer inférieur de l'oculaire et par conséquent à une distance l du foyer supérieur de l'objectif ; l'objet est à une distance π du foyer inférieur de l'objectif donnée par la formule

$$\pi l = f^2, \qquad \text{d'où} \qquad \pi = \frac{f^2}{l}.$$

Quand l'observateur regarde à la distance Δ, la distance de l'image objective au foyer inférieur de l'oculaire n'est autre que la distance d calculée précédemment, et la distance de l'image objective au foyer supérieur de l'objectif est devenue $l + d$.

D'autre part, la distance de l'objet au foyer inférieur de l'objectif a diminué de x, x désignant la nouvelle latitude de mise au point, et est devenue $\pi - x$. La formule de Newton, appliquée à l'objectif, donne donc

$$(\pi - x)(l + d) = f^2,$$

d'où, en remplaçant π, puis d par leurs valeurs,

$$x = \frac{f^2}{l} - \frac{f^2}{l+d} = \frac{f^2 d}{(l+d)l} = \frac{f^2 \varrho_1^2}{(l\Delta + l\varrho_1 + \varrho_1^2)l},$$

$$x = \frac{16 \times 400}{(160 \times 200 + 160 \times 20 + 400)160} = \frac{1^{\text{mm}}}{890}.$$

3. L'oculaire dont on se sert ordinairement dans le microscope est un oculaire négatif qui ne peut servir de loupe, et l'œil doit être placé à l'endroit où se forme l'anneau oculaire. (Voir les cours de physique pour le développement de cette dernière partie).

Assez bonne solution de M. Georges Frey, d'Alger.

Groupes I et II.

1528. — *En supposant l'espace rapporté à un système de coordonnées rectangulaires* OX, OY, OZ, *on considère la courbe définie par les équations*

$$y = 2x^3, \qquad z = x^4.$$

1° *Montrer que l'arc de cette courbe, compté à partir de l'origine des coordonnées jusqu'au point dont l'abscisse est le nombre positif x, est compris entre $x + \frac{18}{5}x^5$ et $x + \frac{18}{5}x^5 + \frac{8}{7}x^7$ pour les valeurs suffisamment petites de x; on prouvera que cet arc est toujours inférieur à la seconde limite, et qu'il est certainement supérieur à la première pour $0 < x < \frac{2}{9}$.*

2° *Montrer qu'il existe sur cette courbe une infinité de couples de points* A, B *tels que les plans* (P), (Q) *respectivement osculateurs à la courbe en* A, B *se coupent suivant la droite qui joint ces deux points.*

Soit V *l'angle (moindre que deux droits) des directions, perpendiculaires aux plans* (P), (Q), *qui font des angles aigus avec la direction positive sur l'axe des z; comment varie cet angle quand l'abscisse x du point* A *croît de* 0 *à* $+\infty$?

Calculer, à un demi-millième près, la valeur de x pour laquelle l'angle V *est droit.*

Montrer que les droites AB *qui joignent deux points d'un même couple sont situées sur la surface dont l'équation est*

$$Z = \frac{Y^2}{4X^2}.$$

Séparer cette surface en régions, d'après le nombre de plans osculateurs à la courbe proposée qui passent par ses différents points.

3° *Évaluer l'intégrale définie* $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \operatorname{tg}\frac{V}{2}\,dx$, *où* V *est la fonction de x qui a été définie plus haut.*

1. La différentielle de l'arc est donnée par

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2;$$

or ici

$$dy = 6x^2 dx, \qquad dz = 4x^3 dx;$$

on a donc

$$ds = \sqrt{1 + 36x^4 + 16x^6}\,dx, \qquad \text{puis} \qquad s = \int_0^x \sqrt{1 + 36x^4 + 16x^6}\,dx.$$

Cela posé, nous remarquons qu'on peut écrire

$$x + \frac{18}{5}x^5 = \int_0^x (1 + 18x^4)dx \qquad \text{et} \qquad x + \frac{18}{5}x^5 + \frac{8}{7}x^7 = \int_0^x (1 + 18x^4 + 8x^6)dx.$$

Il suffit donc de démontrer que $\sqrt{1 + 36x^4 + 16x^6}$ est toujours plus petit que $1 + 18x^4 + 8x^6$, ce qui se vérifie immédiatement en comparant les carrés ; puis de prouver que $\sqrt{1 + 36x^4 + 16x^6}$ est plus grand que $1 + 18x^4$, tant que $|x| < \frac{2}{9}$, ce qui se vérifie de la même façon et sans peine.

2. Soit α l'abscisse du point A ; le plan osculateur en ce point a pour équation

$$\begin{vmatrix} x - \alpha & y - 2\alpha^3 & z - \alpha^4 \\ 1 & 6\alpha^2 & 4\alpha^3 \\ 0 & 12\alpha & 12\alpha^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, toutes réductions faites,

$$2\alpha^3 x - \alpha y + z - \alpha^4 = 0.$$

Ce plan coupe la courbe en quatre points : trois sont confondus avec le point A et un est distinct de celui-ci. Soit β l'abscisse de ce dernier point ; en exprimant que le plan osculateur passe au point de coordonnées $(\beta, 2\beta^3, \beta^4)$, nous avons la relation

$$2\alpha^3\beta - 2\alpha\beta^3 + \beta^4 - \alpha^4 = 0,$$

qui ne change pas quand on échange α et β : elle exprime donc aussi bien que le plan osculateur en B passe en A.

Or cette équation, considérée comme équation en β, donne les abscisses des points de rencontre du plan osculateur avec la courbe ; elle admet donc trois fois la racine α. Il est visible que l'autre racine est $-\alpha$, et la relation qui existe entre α et β est $\alpha + \beta = 0$.

Il y a donc une infinité de couples A, B et ces deux points sont symétriques par rapport à Oz.

Les cosinus directeurs de la normale au plan osculateur en A sont

$$\frac{2\alpha^3}{\sqrt{4\alpha^6 + \alpha^2 + 1}}, \qquad \frac{-\alpha}{\sqrt{4\alpha^6 + \alpha^2 + 1}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{4\alpha^6 + \alpha^2 + 1}};$$

en prenant le radical avec le signe $+$ nous aurons les cosinus de la demi-normale qui fait un angle aigu avec Oz. De même, pour la normale au plan osculateur en B, nous aurons, en tenant compte de $\beta = -\alpha$,

$$\frac{-2\alpha^3}{\sqrt{4\alpha^6 + \alpha^2 + 1}}, \qquad \frac{\alpha}{\sqrt{4\alpha^6 + \alpha^2 + 1}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{4\alpha^6 + \alpha^2 + 1}}.$$

le radical ayant aussi le signe $+$.

Nous déduisons immédiatement de là

$$\cos V = \frac{-4\alpha^6 - \alpha^2 + 1}{4\alpha^6 + \alpha^2 + 1}, \qquad \text{ou} \qquad \cos V = -1 + \frac{2}{4\alpha^6 + \alpha^2 + 1}.$$

Sous cette dernière forme, il est visible que $\cos V$ décroît depuis 1 à -1, quand α varie de 0 à $+\infty$; l'angle V croît donc de 0 à π.

Nous aurons $V = \frac{\pi}{2}$ pour $\cos V = 0$, c'est-à-dire pour les racines de l'équation

$$4\alpha^6 + \alpha^2 - 1 = 0.$$

Cette équation, du troisième degré en α^2, a une racine positive et une seule, $\alpha^2 = \frac{1}{2}$. La valeur demandée pour x est donc

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Les valeurs approchées par défaut et par excès de ce nombre à $\frac{1}{2000}$ près sont fournies par l'inégalité

$$\frac{n}{2000} < \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{n+1}{2000}.$$

ou

$$n < 1000\sqrt{2} < n+1.$$

n étant un entier.

Le nombre n est donc la partie entière de $1000\sqrt{2}$; nous trouvons ainsi

$$n = 1414 \qquad \text{et} \qquad \frac{n}{2000} = 0.707.$$

Telle est la valeur approchée par défaut à $\frac{1}{2000}$ près.

Proposons-nous maintenant de trouver le lieu des droites AB ; nous y parviendrons en éliminant α entre l'équation du plan osculateur au point A et celle du plan osculateur au point B ; ces deux équations sont

$$2\alpha^3 x - \alpha y + z - \alpha^4 = 0 \qquad \text{et} \qquad 2\alpha^3 x - \alpha y - z + \alpha^4 = 0;$$

elles donnent de suite

$$\alpha^4 = z \qquad \text{et} \qquad \alpha^2 = \frac{y}{2x}.$$

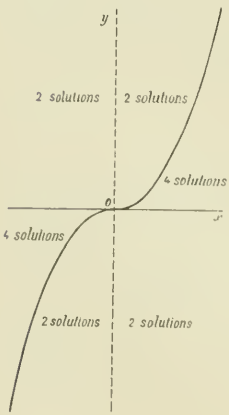
Le lieu de ces droites est donc la surface

$$y^2 = 4x^2 z.$$

Il est évident, d'après ce que nous avons dit sur la position relative des points A et B, que cette surface est un conoïde ayant pour axe Oz, pour directrice la courbe proposée, et pour plan directeur, le plan des xy. Tout cela est évident aussi sur l'équation.

Si nous exprimons que le plan osculateur passe en un point (x, y, z) de cette surface, nous aurons, pour déterminer α, l'équation du quatrième degré $\alpha^4 - 2\alpha^3 x + \alpha y - z = 0$, ou, comme $z = \frac{y^2}{4x^2}$,

$$4x^2\alpha^4 - 8x^3\alpha^3 + 4x^2 y\alpha - y^2 = 0.$$



Cette équation se décompose en deux :

$$2\alpha^2 x - y = 0 \qquad \text{et} \qquad 2\alpha^2 x - 4x^2\alpha + y = 0.$$

La première correspond aux deux plans osculateurs qui contiennent la génératrice du point choisi ; elle a ses deux racines réelles si $xy > 0$, et la seconde les a si $x(2x^3 - y) > 0$; la séparatrice totale se compose des deux axes et de la courbe $y = 2x^3$, qui est la projection de la quartique donnée sur le plan des xy.

La courbe $y = 2x^3$ se construit immédiatement et la séparation sur le plan des xy se fait très facilement. Elle est indiquée sur la figure ci-contre. On voit que l'axe des y n'intervient pas.

Le plan $y = 0$ coupe le conoïde suivant l'axe des x et la ligne double Oz. Le cylindre $y = 2x^3$ le rencontre sur la quartique donnée et sur Oz. La séparatrice sur la surface se compose donc de Ox et de la quartique.

3. Nous savons enfin que

$$\operatorname{tg}^2 \frac{V}{2} = \frac{1 - \cos V}{1 + \cos V};$$

par conséquent $$\operatorname{tg}^2 \frac{V}{2} = 4\alpha^6 + \alpha^2, \qquad \operatorname{tg} \frac{V}{2} = \alpha\sqrt{1 + 4\alpha^2},$$

puisque α reste positif dans les limites, 0 et $\frac{1}{\sqrt{2}}$, de l'intégration.

Il faut évaluer

$$\int \alpha\sqrt{1 + 4\alpha^2}\, d\alpha \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{4}\int \sqrt{1 + t^2}\, dt,$$

en posant $2\alpha^2 = t$.

En intégrant par parties, on a de suite

$$\int \sqrt{1 + t^2}\, dt = t\sqrt{1 + t^2} - \int \sqrt{1 + t^2}\, dt + \mathrm{L}(t + \sqrt{1 + t^2});$$

par conséquent

$$\frac{1}{4}\int \sqrt{1 + t^2}\, dt = \frac{t\sqrt{1 + t^2} + \mathrm{L}(t + \sqrt{1 + t^2})}{8}.$$

Les limites de α sont 0 et $\frac{1}{\sqrt{2}}$; celles de t sont 0 et 1, et l'intégrale définie indiquée a pour valeur

$$\frac{1}{8}\left[\sqrt{2} + \mathrm{L}(1 + \sqrt{2})\right].$$

Remarques. — On vérifie aisément que les quatre plans osculateurs qui passent par un point quelconque P ont leurs quatre points de contact dans un même plan avec le point P. Il suffit pour cela d'identifier l'équation du quatrième degré en α qui donne les abscisses des points de contact,

$$\alpha^4 - 2\alpha^3 x + \alpha y - z = 0,$$

avec celle qui donne les abscisses des points de rencontre avec un plan, $u\alpha + 2v\alpha^2 + w\alpha^3 + r = 0$; on en déduit $u = y$, $v = -x$, $w = 1$ et $r = -z$. Les quatre points de contact sont donc dans le plan

$$yX - xY + Z - z = 0,$$

et il est visible que ce plan passe au point $P(x, y, z)$.

Cette courbe du quatrième ordre est située sur les deux surfaces

$$xy - 2z = 0 \qquad \text{et} \qquad 4x^2 z - y^2 = 0,$$

qui ont en commun deux droites du même système du paraboloïde : $y = 0$, $z = 0$ et $x = 0$, $t = 0$. C'est donc une quartique de seconde espèce, une quartique de Steiner.

Enfin, il serait facile de montrer que cette courbe est l'une des asymptotiques du conoïde, et ceci explique que les plans osculateurs aux deux points A et B, où une génératrice du conoïde la perce, contiennent la droite AB.

Réciproquement, il résulte de l'étude qui a été faite que la quartique est une asymptotique du conoïde, puisqu'en chacun de ses points son plan osculateur est tangent au conoïde.

Bonnes solutions : MM. E. Audibert, lycée de Marseille ; P. Regnauld, lycée Carnot.
Assez bonne solution : M. G. Frey, à Alger.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1529. — *On considère dans un plan π deux droites fixes* A *et* B *rectangulaires et un segment* PQ *de longueur constante s'appuyant sur les droites* A *et* B. *Soit* R *un point de* PQ *divisant ce segment dans un rapport donné. On prend le cercle* C *de centre* R *dont le plan est perpendiculaire à la droite* PQ *et dont le rayon est donné.*

1° *Équation de la surface* S *engendrée par le cercle* C. *Trouver ses lignes doubles.*

2° *Étudier les sections de la surface* S *par un plan variable parallèle au plan* π. *Elle se compose de deux ellipses. Relations entre les longueurs des axes de l'une d'entre elles. Lieu de leurs foyers.*

3° *Le long de chaque cercle* C, *les normales à la surface* S *engendrent une surface du quatrième degré dont les génératrices rencontrent deux droites fixes. Cas de décomposition.*

(Bulletin de la Société Mathématique, 1883.)

1. Appelons φ l'angle de PQ avec PO. Posons $PR = b$, $RQ = a$.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point M du cercle C. Soit ψ l'angle du plan horizontal avec RM. On peut écrire

$$(1) \qquad x = a\cos\varphi + R\cos\psi\sin\varphi, \qquad y = b\sin\varphi + R\cos\psi\cos\varphi, \qquad z = R\sin\psi.$$

Ce sont les expressions des coordonnées d'un point de la surface en fonction des paramètres φ et ψ. En prenant pour nouveaux paramètres $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$, ces expressions seraient rationnelles.

Pour obtenir l'équation de la surface, éliminons φ et ψ entre les équations (1). L'élimination de φ entre les deux premières donne

$$(bx - Ry\cos\psi)^2 + (ay - Rx\cos\psi)^2 = (ab - R^2\cos^2\psi)^2,$$

$$(b^2 + R^2\cos^2\psi)x^2 + (a^2 + R^2\cos^2\psi)y^2 - 2R(a+b)\cos\psi\, xy = (ab - R^2\cos^2\psi)^2$$

ou, en faisant l'élimination de ψ, qui est immédiate,

$$(2) \qquad z^2(x^2+y^2+z^2) - (b^2+R^2)x^2 - (a^2+R^2)y^2 + 2(ab-R^2)z^2 + (ab-R^2)^2]^2 = 4(a+b)^2(R^2-z^2)x^2y^2.$$

C'est une surface du huitième degré admettant le cercle de l'infini pour ligne double et la droite à l'infini du plan des xy comme ligne quadruple. L'équation met encore en évidence que les sections par les plans $x = 0$, $y = 0$ sont des lignes doubles. Elle n'en possède pas d'autres ; cela résultera de l'étude des sections par des plans parallèles au plan des xy.

2. Une telle section se compose de deux ellipses symétriques l'une de l'autre par rapport aux plans des zx et des yz ; ces ellipses sont réelles seulement si $z^2 \leqslant R^2$. Ces faits se vérifient de suite sur l'équation (2). La forme (1) les prouve aussi. z étant donné, ψ admet deux valeurs supplémentaires et $\cos\psi$ deux valeurs égales et de signes contraires. Les deux ellipses sont confondues quand $\cos\varphi = 0$, c'est-à-dire pour $z = \pm R$. Chacune d'elles se réduit à une droite double quand les expressions de x et y restent proportionnelles, φ variant, c'est-à-dire quand on a

$$ab - R^2\cos^2\varphi = 0, \qquad \text{ou} \qquad z^2 = R^2 - ab.$$

Cette discussion montre que les sections par les plans $z^2 = R^2$ et $z^2 = R^2 - ab$ pourraient être des lignes doubles ; mais il est aisé de voir que leurs équations ne satisfont pas aux quatre dérivées partielles du premier membre de l'équation de la surface.

Examinons maintenant quelle relation relie les longueurs des demi-axes de l'ellipse

$$x = a\cos\varphi + R\sin\varphi\cos\psi, \qquad y = b\sin\varphi + R\cos\varphi\cos\psi$$

quand ψ varie.

Cettte ellipse admettant l'origine pour centre, comme on le voit en changeant φ en $\pi + \varphi$, cherchons le maximum et le minimum de

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = (a^2 + R^2\cos^2\psi)\cos^2\varphi + 2R\cos\psi(a+b)\sin\varphi\cos\varphi + (b^2 + R^2\cos^2\psi)\sin^2\varphi.$$

Écrivons pour cela

$$\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = (a^2 + R^2\cos^2\psi)\cos^2\varphi + \cdots$$

$$\cos^2\varphi(a^2 + R^2\cos^2\psi - \rho^2) + 2R\cos\psi(a+b)\sin\varphi\cos\varphi + (b^2 + R^2\cos^2\psi - \rho^2)\sin^2\varphi = 0,$$

et exprimons que les valeurs de $\operatorname{tg}\varphi$ ainsi données sont confondues.

Il vient

$$\rho^4 - \rho^2(a^2 + b^2 + 2R^2\cos^2\psi) + (ab - R^2\cos^2\psi)^2 = 0.$$

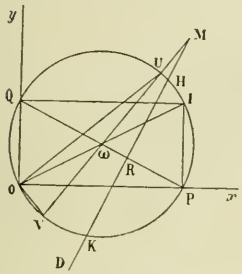
Donc $\rho_1^2 + \rho_2^2 = a^2 + b^2 + 2R^2\cos^2\psi, \qquad 2\rho_1\rho_2 = |\, 2ab - 2R^2\cos^2\psi \,|.$

Donc $\rho_1 + \rho_2 = |\, a + b \,|$ si $2ab - 2R^2\cos^2\psi$ est positif,

$|\, \rho_1 - \rho_2 \,| = |\, a - b \,|$ si $2ab - 2R^2\cos^2\psi$ est négatif.

Étudions la question géométriquement. Nous avons un segment PQ de longueur constante dont les extrémités s'appuient sur deux droites ; sur lui, un point R ; un point M situé sur la droite D perpendiculaire à PQ menée par R, est lié invariablement à PQ.

Traçons le cercle circonscrit au triangle oPQ, de centre ω, milieu de PQ ; il est lié invariablement au segment PQ. Il en est de même du diamètre Mω dont les extrémités U et V décrivent par suite les droites fixes oU et oV.



Le point M est donc sur le segment UV, lié invariablement à lui. Il décrit par suite une ellipse de demi-axes MU et MV.

Quel que soit le point pris sur la droite D, la somme ou la différence de MU et de MV est constante ; la somme si M est intérieur au segment HK ; la différence s'il lui est extérieur.

Cette figure donnerait rapidement la discussion des sections par des plans parallèles au plan des xy.

Cherchons maintenant le lieu des foyers de l'ellipse (1) où le paramètre est φ, quand ψ varie.

Prenons d'abord les foyers de la projection sur le plan des xy.

$$x = a\cos\varphi + R\cos\psi\sin\varphi, \qquad y = R\cos\psi\cos\varphi + b\sin\varphi.$$

Cherchons pour cela l'équation tangentielle ; coupons par $ux + vy + w = 0$; nous aurons

$$u(a\cos\varphi + R\cos\psi\sin\varphi) + v(R\cos\psi\cos\varphi + b\sin\varphi) + w = 0,$$

$$(ua + vR\cos\psi)\cos\varphi + (uR\cos\psi + bv)\sin\varphi + w = 0.$$

L'équation tangentielle est donc

$$(ua + vR\cos\psi)^2 + (uR\cos\psi + bv)^2 = w^2$$

et les u et v des tangentes issues du point x, y sont donnés par

$$(ua + vR\cos\psi)^2 + (uR\cos\psi + bv)^2 = (ux + vy)^2.$$

Le point x, y, z est donc foyer de l'ellipse si l'on a

$$a^2 + R^2\cos^2\psi - x^2 = b^2 + R^2\cos^2\psi - y^2, \qquad xy = aR\cos\psi + bR\cos\psi, \qquad z = R\sin\psi.$$

Le lieu des foyers est donc la courbe

$$x^2 - y^2 = a^2 - b^2, \qquad \frac{x^2y^2}{(a+b)^2} + z^2 = R^2.$$

3. Soit un point M de la surface S situé sur un cercle C déterminé, c'est-à-dire, en projection sur le plan des xy, sur la droite D.

La normale en M est la droite commune aux plans normaux en M au cercle C et à l'ellipse du plan parallèle au plan des xy qui passe en M.

Le plan normal en M au cercle C passe par PQ.

En projection, la normale en M à l'ellipse décrite par M dans le mouvement de PQ passe par le centre instantané de rotation I.

Le plan normal en M à l'ellipse contient donc la parallèle à oz menée par I.

Par suite, tout le long d'un cercle C, les normales rencontrent la droite PQ et la parallèle à oz menée par I.

Le lieu des normales le long du cercle C est donc la surface engendrée par les droites qui rencontrent un cercle C, l'axe A de ce cercle et une parallèle Δ au plan du cercle.

C'est une surface du quatrième degré ; cherchons combien de points il y a sur une droite Δ'. La surface du second degré engendrée par les droites qui s'appuient sur les droites A, Δ, Δ', coupe le plan du cercle C suivant une conique qui a avec ce cercle quatre points communs, d'où quatre points de la surface sur la droite Δ'.

Les seuls cas de décomposition de cette surface sont les suivants :

1° La droite Δ est dans le plan du cercle C ;

2° La droite Δ rencontre l'axe A.

Le second cas se produit quand le segment PQ vient sur ox ou sur oy.

Le premier se produit quand PQ a une position telle que la droite D passe par I, c'est-à-dire quand on a $\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{b}{a}$.

Bonnes solutions : MM. Lamotte, lycée Janson ; Parrod, à Vesoul ; Degove-Trouis, à Toulouse.

CONCOURS DE 1906 (*Suite.*)

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES

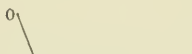
Mathématiques.

1596. — On considère (axes rectangulaires) la courbe $y = \log x$, le logarithme étant népérien ; soit A le point où elle coupe l'axe des x.

1° M étant un point quelconque de la courbe, évaluer l'aire engendrée par l'arc AM tournant autour de la droite $x = 1$. Appliquer la formule obtenue au cas où M est le point de contact d'une tangente menée à la courbe par l'origine.

2° Trouver et construire le lieu des centres des circonférences qui touchent à la fois l'axe des y et la courbe proposée.

Mécanique.



I. — **1597.** Une droite homogène pesante, AB, a son extrémité B suspendue à un fil sans pesanteur attaché en un point fixe O. L'autre extrémité A est tirée horizontalement par une force donnée F. On demande la position d'équilibre du système. Dire en outre pour quelle valeur de F l'angle OBA est le plus petit possible et quels sont alors les angles formés par OB et AB avec la verticale.

II. — **1598.** Un point M parcourt une ellipse de telle façon que la différence des rayons vecteurs focaux MF, MF′ soit égale à $2c \sin \omega t$, $2c$ désignant la distance focale FF′ et ω une constante. Exprimer, en fonction du temps, la vitesse et l'accélération totale de M. Chercher la relation existant entre l'accélération totale et la distance MO du point M au centre de l'ellipse.

Physique.

I. — Mesure du potentiel d'un conducteur avec l'électromètre absolu.

II. — **1599.** Soit un microscope composé d'un objectif de distance focale égal à 3 millimètres, et d'un oculaire de distance focale égale à 3 centimètres, séparés entre eux par une distance invariable de 30 centimètres. L'objectif reçoit deux faisceaux lumineux provenant de deux points situés à l'infini dans deux directions symétriques par rapport à l'axe de l'instrument et faisant entre elles un angle de 30 degrés.

On demande quels sont les moyens d'observer l'image des deux points lumineux à travers cet instrument, et quelles seront, suivant les cas, les dimensions réelles ou apparentes de cette image.

On examinera les divers cas suivants :

1° Observation directe en enlevant l'oculaire ;

2° Observation à travers l'instrument tel qu'il est, soit à l'œil nu, soit en s'aidant d'une lentille supplémentaire dont on choisira à volonté la distance focale et qui pourra être placée soit derrière l'oculaire, soit entre celui-ci et l'objectif.

On appliquera les formules des lentilles minces ; la distance de vision distincte sera supposée de 30 centimètres.

QUESTION PROPOSÉE

1600. — 1° Intégrer l'équation différentielle

$$y'' + 4y = -5\cos^3 x + a\cos^2 x + 9\cos x + 4.$$

2° Lorsque $a = -24$, se rendre compte pour $x = \frac{1}{10}$ de la valeur numérique de celle des intégrales qui est nulle, ainsi que sa dérivée, pour $x = 0$.

3° Lorsque $a = 0$, l'équation différentielle admet pour intégrales des polynomes en $\cos x$ qui dépendent d'un paramètre. Discuter le nombre de leurs racines réelles dont la valeur absolue est inférieure ou égale à 1.

4° Préciser les cas où les intégrales de l'équation différentielle

$$y'' + n^2 y = A_p \cos^p x + \cdots + A_0 \qquad (n \text{ et } p \text{ entiers}, \ p > 0)$$

sont des fonctions entières de $\sin x$ et de $\cos x$. Th. L.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE (*Concours de 1905, fin.*)

1501. — 1. *Étude de l'expression* $u_n = \frac{x^n}{n!}$,

x étant un nombre positif donné et n un entier positif quelconque.

Pour quelle valeur de n, u_n est-il maximum ?

Montrer que, quel que soit le nombre positif ε, on peut trouver un rang ν à partir duquel u_n est certainement plus petit que ε.

2. *u_n ayant toujours la même signification, on considère les polynomes :*

$$\begin{array}{ll} P_1 = u_1, & P_2 = 1 - u_2, \\ P_3 = P_1 - u_3, & P_4 = P_2 + u_4, \\ P_5 = P_3 + u_5, & P_6 = P_4 - u_6. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ P_{2n+1} = P_{2n-1} + (-1)^n u_{2n+1}, & P_{2n} = P_{2n-2} + (-1)^n u_{2n}. \end{array}$$

Étudier les fonctions P_3, P_5, P_7, P_9 et les représenter graphiquement en portant en abscisses x (on se bornera à $x > 0$) et en ordonnées respectivement P_3, P_5, P_7, P_9. Situations de ces courbes les unes par rapport aux autres et positions de leurs points de rencontre avec l'axe x par rapport aux points d'abscisses 1, 2, 3 et 4 de cet axe.

Quant aux fonctions paires P_2, P_4, P_6, ..., on ne les envisagera qu'autant qu'elles seront utiles pour la discussion précédente.

3. *Dans la deuxième partie on trouvera en particulier que* P_7 *a une racine* a_7 *entre* 3 *et* 4. *Utiliser cette remarque pour calculer deux valeurs approchées de cette racine :* 1° *par la méthode de Newton qu'on démontrera sur cet exemple particulier ;* 2° *par la méthode des parties proportionnelles en substituant à* P_7 *la fonction linéaire ayant même valeur que* P_7 *pour* $x = 3$ *et* $x = 4$. *Montrer que ces deux méthodes donnent des valeurs approchées, l'une par excès, l'autre par défaut.*

Quelle approximation en résulte-t-il ?

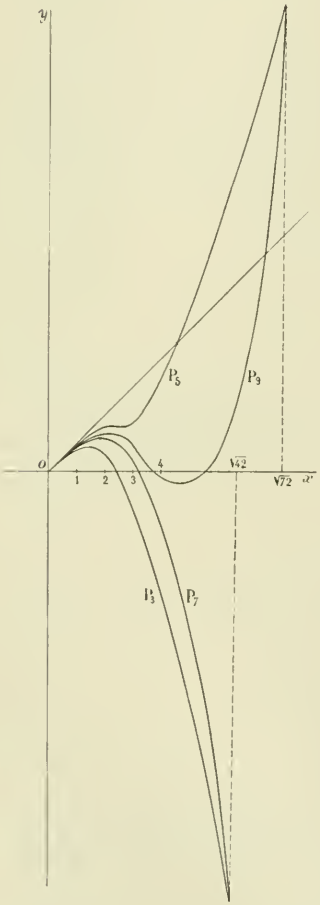
4. *Montrer par voie de récurrence que*

$$P_{10} = 0, \qquad P_{11} = 0, \qquad P_{12} = 0, \qquad \ldots\ldots \qquad P_n = 0$$

ont une racine et une seule entre 0 *et* 4, a_{10}, a_{11}, ..., a_n, ...

Si on forme les suites

$$a_{11} \quad a_{15} \quad a_{19} \quad \ldots\ldots \quad a_{4n-1} \quad \ldots\ldots$$
$$a_{13} \quad a_{17} \quad a_{21} \quad \ldots\ldots \quad a_{4n+1} \quad \ldots\ldots$$



Montrer que la première est croissante et a tous ses termes plus petits qu'un terme quelconque de la deuxième ; que la deuxième est décroissante et a tous ses termes plus grands qu'un terme quelconque de la première.

Elles tendent donc vers des limites ; montrer que ces limites sont les mêmes.

5. *Montrer que si on donne à* x *une valeur bien définie, la suite* P_1, P_3, P_5, P_7, ... *tend vers une limite. Calculer cette limite à un millième près par défaut et par excès pour*

$$x = 1 \qquad \text{et} \qquad x = \frac{\pi}{2}.$$

(*On n'invoquera pas les développements en série des fonctions trigonométriques.*)

1. On a l'égalité $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = \dfrac{x}{n}$, et l'on voit que si n est plus petit que x, u_n est plus grand que u_{n-1}. Par suite, si n croît en restant inférieur à x, u_n va en croissant. Si au contraire n est plus grand que x, u_n est plus petit que u_{n-1}, u_n décroît.

Donc, si on désigne par p le plus grand nombre entier égal ou inférieur à x, le maximum de u_n est égal à $\dfrac{x^p}{p!}$.

En supposant n supérieur à p, on a

$$u_n = \frac{x^p}{p!} \cdot \frac{x}{p+1} \cdot \frac{x}{p+2} \cdots \frac{x}{n}.$$

Comme tous les nombres $\dfrac{x}{p+1}$, $\dfrac{x}{p+2}$, ... sont plus petits que 1, on peut écrire $u_n < \dfrac{x^p}{p!} \cdot \dfrac{x}{n}$.

Déterminons le nombre n de telle manière que $\dfrac{x^p}{p!} \cdot \dfrac{x}{n} < \varepsilon$; nous en tirons $n > \dfrac{x^{p+1}}{\varepsilon p!}$.

Par suite, si l'on désigne par ν le plus petit nombre entier supérieur ou égal à $\dfrac{x^{p+1}}{\varepsilon p!}$, on voit que pour toute valeur de n supérieure à ν, on a bien $u_n < \varepsilon$.

Cela revient à dire que u_n a pour limite zéro pour n infini.

2. Étudions d'abord les variations de la fonction $P_3 = x - \frac{x^3}{3!}$ quand x croît de 0 à $+\infty$.

La dérivée $P_3' = P_2 = 1 - \frac{x^2}{2!}$ s'annule pour $x = \sqrt{2}$, est positive pour $x < \sqrt{2}$, et négative pour $x > \sqrt{2}$. D'autre part P_3 s'annule pour $x = \sqrt{6}$; nous avons donc les variations suivantes :

La courbe correspondante est tangente à l'origine à la droite $y = x$, et est sans cesse au-dessous de cette droite.

x	0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{6}$		$+\infty$
P_3	1	croît	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (*max.*)	décroît	0	décroît	$-\infty$

Considérons maintenant la fonction

$$P_5 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = x\left[1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right];$$

cette fonction est toujours positive, et supérieure à P_3.

La dérivée $P_5' = P_4 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = \frac{1}{24}(x^4 - 12x^2 + 24)$ s'annule pour deux valeurs positives de x, $\sqrt{6 \pm \sqrt{12}}$; nous en déduisons les variations de P_5.

x	0		$\sqrt{6-\sqrt{12}}$		$\sqrt{6+\sqrt{12}}$		$+\infty$
P_5	1	croît	*max.*	décroît	*min.*	croît	$+\infty$

Le maximum est égal à $\sqrt{6-\sqrt{12}} \cdot \frac{6+2\sqrt{3}}{5}$ et le minimum à $\sqrt{6+\sqrt{12}} \cdot \frac{6-2\sqrt{3}}{5}$; ces deux quantités sont positives, par suite P_5 est sans cesse positif.

La courbe correspondante part de l'origine, tangente à la droite $y = x$ et au-dessous de cette droite ; puis, elle rencontre cette tangente au point d'abscisse $\sqrt{20}$.

Pour étudier les variations de P_7, nous commencerons par étudier celles de sa dérivée

$$P_7' = P_6 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}.$$

Nous avons $P_6' = -P_5$, et de la discussion précédente nous déduisons que P_6' est toujours négative ; par suite P_6 va en décroissant.

x	0		$+\infty$
P_6	1	décroît	$-\infty$

Donc P_6 a une racine et une seule, et comme $P_6(1) > 0$, $P_6(2) < 0$, on en conclut que cette racine a_6 est comprise entre 1 et 2. Alors la fonction P_7' est positive si $x < a_6$ et négative si $x > a_6$, d'où la variation de P_7.

x	0		a_6		$+\infty$
P_7	0	croît	*max.*	décroît	$-\infty$

Donc P_7 a une seule racine supérieure à a_6.

On vérifie aisément que $P_7(3) = \frac{51}{560}$, $P_7(4) = -\frac{436}{315}$; donc cette racine, que nous désignerons par a_7, est comprise entre 3 et 4.

Remarquons enfin que P_7 est toujours inférieure à P_5, et comme l'on a $P_7 = P_5 + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{42}\right)$,

P_7 est supérieure à P_3 si $x < \sqrt{42}$, et inférieure à P_3 si $x > \sqrt{42}$. Nous pouvons ainsi placer la courbe qui représente les variations de P_7 par rapport à celles qui représentent les variations de P_3 et P_5.

Reste enfin à étudier les variations de P_9 dont la dérivée est égale à P_8.

Or $P'_8 = -P_7$, donc P'_8 est négative si $x < a_7$ et positive si $x > a_7$; et les variations de P_8 sont

x	0		a_7		$+\infty$
P_8	1	décroît	*min.*	croît	$+\infty$

On vérifie aisément que P_8 est négatif pour $x = 3$ et $x = 4$, par suite P_8 admet deux racines l'une a_8 inférieure à 3 et l'autre a'_8 supérieure à 4 ; et nous en déduisons la variation de P_9

x	0	3		a_8		a'_8	4	$+\infty$
P_9	0	croît	*max.*	décroît	*min.*	croît		$+\infty$

On constate facilement que P_9 est négatif pour $x = 4$; donc P_9 admet une racine a_9 comprise entre 3 et 4 et une racine a'_9 supérieure à 4.

D'autre part P_9 est toujours supérieure à P_7, et comme on peut écrire $P_9 = P_5 - \frac{x^7}{7!}\left(1 - \frac{x^2}{72}\right)$, on voit que P_9 est plus petit que P_5 si $x < \sqrt{72}$ et plus grand que P_5 si $x > \sqrt{72}$.

3. Nous avons vu précédemment que P_7 a une racine comprise entre 3 et 4, et que

$$P_7(3) = \frac{51}{560}, \qquad P_7(4) = -\frac{436}{315}.$$

Pour savoir à laquelle des limites 3 et 4 on peut appliquer la méthode de Newton et celle des parties proportionnelles, il faut déterminer le signe de la dérivée seconde P''_7 dans l'intervalle (3, 4).

Or on a $P_7 = -P_5$, et comme P_5 est toujours positif, P''_7 est sans cesse négatif.

Nous appliquerons la méthode de Newton au nombre 4 et la méthode des parties proportionnelles au nombre 3.

Le nombre que donne la méthode de Newton est $\alpha = 4 - \frac{P_7(4)}{P'_7(4)}$.

Or $\quad P_7(4) = -\frac{436}{315}, \qquad P'_7(4) = -\frac{91}{45}, \qquad$ donc $\quad -\frac{P_7(4)}{P'_7(4)} = -\frac{436}{637}$

et
$$\alpha = 4 - \frac{436}{637} = 4 - 0{,}684\ldots = 3{,}316\ldots \text{ par excès.}$$

Le nombre fourni par la méthode des parties proportionnelles est

$$\beta = \frac{P_7(3)\times 4 - P_7(4)\times 3}{P_7(3) - P_7(4)} = \frac{\frac{51\times 4}{560} + \frac{436\times 3}{315}}{\frac{51}{560} + \frac{436}{315}};$$

remarquons que $560 = 2^4\times 5\times 7$, $315 = 3^2\times 5\times 7$, et multiplions haut et bas par $2^4\times 3^2\times 5\times 7$, nous obtenons

$$\beta = \frac{51\times 4\times 9 + 436\times 3\times 16}{51\times 9 + 436\times 16} = \frac{22\,764}{7\,435}, \qquad \text{ou} \qquad \beta = 3{,}062\ldots \text{ par défaut.}$$

Donc la racine de P_7 est comprise entre 3,062 et 3,316. L'approximation est inférieure à 0,3.

4. Dans la discussion de la première partie, nous avons reconnu que les fonctions P_6, P_7, P_8 et P_9 sont négatives pour $x = 4$; nous allons démontrer que si $n > 9$, P_n est encore négative pour $x = 4$. On a, en effet,

$$P_{10} = P_8 - \frac{x^{10}}{10!}, \qquad P_{11} = P_9 - \frac{x^{11}}{11!};$$

donc $P_{10} < P_8$, $P_{11} < P_9$, et comme P_8 et P_9 sont négatives pour $x = 4$, *a fortiori* P_{10} et P_{11} le sont aussi.

D'autre part,
$$P_{12} = P_8 - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!} = P_8 - \frac{x^{10}}{10!}\left[1 - \frac{x^2}{11.12}\right],$$
$$P_{13} = P_9 - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} = P_9 - \frac{x^{11}}{11!}\left[1 - \frac{x^2}{12.13}\right],$$
et ces égalités montrent que pour $x = 4$, on a $P_{12} < P_8$ et $P_{13} < P_9$.

On comparera de même P_{14} et P_{16} à P_{12}, puis P_{15} et P_{17} à P_{13}, et ainsi de suite.

On voit ainsi que toutes ces fonctions sont négatives pour $x = 4$. Nous allons étudier les variations de ces fonctions dans l'intervalle $(0, 4)$. Nous avons vu que la fonction P_9 a une racine a_9 comprise entre 0 et 4; pour $x < a_9$, P_9 est positif et pour $x > a_9$, P_9 est négatif. Or $P_9 = -P'_{10}$, donc, quand x croît de 0 à a_9, P_{10} décroît à partir de 1 jusqu'à un certain minimum, et quand x croît de a_9 à 4, P_{10} croît. Mais $P_{10}(4) < 0$, donc le minimum de P_{10} est aussi négatif; par suite, P_{10} s'annule pour une seule valeur de x, $x = a_{10}$, et cette valeur est inférieure à a_9. De plus, P_{10} est positif pour $x < a_{10}$ et négatif pour $x > a_{10}$.

Mais $P_{10} = P'_{11}$; donc, dans l'intervalle $(0, a_{10})$, P_{11} croît à partir de 0 jusqu'à un certain maximum qui sera positif, puis dans l'intervalle $(a_{10}, 4)$ P_{11} décroît et devient négatif pour $x = 4$. Il en résulte que P_{11} a une seule racine a_{11} comprise entre a_{10} et 4. Le raisonnement se continue sans difficulté. On voit que toutes les fonctions P_n ont une racine et une seule comprise entre 0 et 4.

Je dis maintenant que la suite

(1) $$a_{11} \quad a_{15} \quad a_{19} \quad \ldots \quad a_{4n-1} \quad \ldots$$

est croissante. En effet
$$P_{15} \equiv P_{11} + \frac{x^{13}}{13!} - \frac{x^{15}}{15!} \equiv P_{11} + \frac{x^{13}}{13!}\left[1 - \frac{x^2}{14.15}\right];$$
remplaçons dans cette identité x par a_{11}, P_{11} s'annule, et nous voyons que $P_{15}(a_{11})$ est positif; il en résulte que a_{11} est inférieur à la racine de P_{15}; donc $a_{11} < a_{15}$. On verrait de même que $a_{15} < a_{19}$, ...

La suite

(2) $$a_{13} \quad a_{17} \quad a_{21} \quad \ldots \quad a_{4n+1} \quad \ldots$$

est décroissante, car
$$P_{17} \equiv P_{13} - \frac{x_{15}}{15!} + \frac{x_{17}}{17!} \equiv P_{13} - \frac{x_{15}}{15!}\left[1 - \frac{x^2}{16.17}\right],$$
et pour $x = a_{13}$, P_{17} est négatif, donc $a_{13} > a_{17}$, etc.

Je dis qu'un nombre quelconque de la suite (1) est inférieur à un nombre quelconque de la suite (2). Comparons d'abord deux nombres de même rang, a_{4n-1} et a_{4n+1} par exemple; nous avons
$$P_{4n+1} \equiv P_{4n-1} + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$$
et pour $x = a_{4n-1}$, nous avons $P_{4n+1}(a_{4n+1}) > 0$, donc $a_{4n-1} < a_{4n+1}$.

D'une manière générale, je dis que $a_{4p-1} < a_{4q+1}$.

Soit h un nombre entier quelconque supérieur à p et q. Nous avons successivement $a_{4p-1} < a_{4h-1}$ puisque la suite (1) est croissante, $a_{4h-1} < a_{4h+1}$, d'après ce qui vient d'être démontré, puis, $a_{4h+1} < a_{4q+1}$, puisque la suite (2) est décroissante; donc $a_{4p-1} < a_{4q+1}$.

Les suites (1) et (2) ont donc des limites; pour établir que ces limites sont les mêmes, il suffit de montrer que $a_{4n+1} - a_{4n-1}$ a pour limite zéro pour n infini.

De l'identité
$$P_{4n+1} \equiv P_{4n-1} + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}, \qquad \text{nous tirons} \qquad P_{4n+1}(a_{4n-1}) = \frac{a_{4n-1}^{4n+1}}{(4n+1)!},$$

et comme $P_{4n+1}(a_{4n+1}) = 0$, on peut écrire

$$P_{4n+1}(a_{4n+1}) - P_{4n+1}(a_{4n-1}) = -\frac{a_{4n-1}^{4n+1}}{(4n+1)!}.$$

Mais d'après le théorème des accroissements finis, le premier membre peut s'écrire

$$(a_{4n+1} - a_{4n-1})P'_{4n+1}(b) \qquad \text{ou} \qquad (a_{4n+1} - a_{4n-1})\,P_{4n}(b),$$

b étant compris entre a_{4n+1} et a_{4n-1}.

On en déduit

$$a_{4n+1} - a_{4n-1} = -\frac{a_{4n-1}^{4n+1}}{(4n+1)!}\cdot\frac{1}{P_{4n}(b)}.$$

La fonction P_{4n} a une seule racine a_{4n} comprise entre 0 et 4, et on voit facilement que cette racine est plus petite que a_{4n-1} et a_{4n+1}; de plus, quand n augmente, a_{4n-1} croît, et on voit aisément, en comparant les racines de P_{4n+1} et de P_{4n}, que a_{4n} diminue. Par suite, quand n augmente indéfiniment, $P_{4n}(b)$ ne peut s'annuler. D'autre part, a_{4n-1} étant inférieur à 4, $\frac{a_{4n-1}^{4n+1}}{(4n+1)!}$ est inférieur à $\frac{4^{4n+1}}{(4n+1)!}$ et a pour limite zéro pour n infini. Donc $a_{4n+1} - a_{4n-1}$ a aussi pour limite zéro, ce qui montre que a_{4n+1} et a_{4n-1} ont des limites égales.

5. Si on suppose $x > 0$ et $x < \sqrt{6}$, les termes de la série

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

sont alternativement positifs et négatifs, leurs valeurs absolues vont en diminuant, et le terme général a pour limite zéro. Donc la série est convergente, et la somme de cette série est précisément la limite de la suite P_1, P_3, P_5, ...

On sait que si l'on prend pour valeur de la série la somme d'un nombre quelconque de termes, l'erreur commise est moindre que le terme auquel on s'arrête et a le signe de ce terme.

Faisons d'abord $x = 1$, et considérons la série

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots;$$

le quatrième terme $\frac{1}{7!}$ est égal à $\frac{1}{5040}$; il est plus petit que $\frac{1}{5000}$ ou $\frac{2}{10^4}$.

Calculons la somme des trois premiers termes

$$1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{101}{120} = 0{,}841666\ldots,$$

c'est une valeur approchée par excès, l'erreur étant moindre que $\frac{2}{10^4}$.

Donc la somme de la série est comprise entre 0,84166... et 0,841466... Sa valeur à $\frac{1}{1000}$ près est 0,841 par défaut et 0,842 par excès.

Soit maintenant $x = \frac{\pi}{2}$, nous avons la série

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{2^3.3!} + \frac{\pi^5}{2^5.5!} - \frac{\pi^7}{2^7.7!} + \frac{\pi^9}{2^9.9!} - \cdots$$

Le quatrième terme est supérieur à $\frac{1}{1000}$, et le 5e $\frac{\pi^9}{2^9.9!}$ est inférieur à $\frac{17}{10^5}$. Comme on demande la somme de la série à $\frac{1}{1000}$ près, il faut prendre les quatre premiers termes. Nous calculerons leurs valeurs à $\frac{1}{10^5}$ près, celles des termes positifs par défaut, et celles des termes négatifs par excès, en nous servant d'une table de logarithmes.

Nous avons ainsi

$$\frac{\pi}{2} = 1{,}57079 + \varepsilon_1 \qquad \frac{\pi^5}{2^5.5!} = 0{,}07969 + \varepsilon_3$$

$$\frac{\pi^3}{2^3.3!} = 0{,}64597 - \varepsilon_2 \qquad \frac{\pi^7}{2^7.7!} = 0{,}00469 - \varepsilon_4,$$

ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 étant des nombres positifs inférieurs à $\frac{1}{10^5}$.

La somme de la série est donc égale à

$$1{,}57079 + \varepsilon_1 - (0{,}64597 - \varepsilon_2) + 0{,}07969 + \varepsilon_3 - (0{,}00469 - \varepsilon_4) + \varepsilon_5,$$

ε_5 étant inférieur à $\frac{17}{10^5}$, ou à $0{,}99982 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5$.

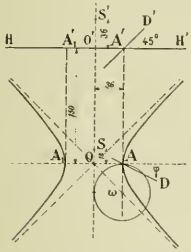
Or $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 < \frac{4}{10^5} + \frac{17}{10^5} < \frac{21}{10^5}$. Donc la somme cherchée est comprise entre 0,99982 et $0{,}99982 + 0{,}00021$ ou 1,00003.

La valeur à $\frac{1}{1000}$ près est 0,999 par défaut et 1 par excès.

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE (*Concours de 1906.*)

Épure de Géométrie descriptive.

1567. — *Un cylindre a pour directrice dans le plan horizontal* H, H′ *une hyperbole équilatère dont l'axe transverse* A_1A, A_1A' *est de front et a* 72mm *de longueur.*



Ses génératrices sont parallèles à D, D′, D′ *étant incliné à* 45° *sur les horizontales de front et* D *faisant avec ces mêmes droites un angle* φ *tel que*

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}.$$

Un cône a pour sommet un point S, S′ *situé à* 18mm *en arrière et à* 36mm *au-dessus du centre* O, O′ *de l'hyperbole. Sa base est une ellipse du plan tangent au cylindre en* A, A′ *admettant pour projection horizontale un cercle passant par* A *et tangent aux axes de l'hyperbole.*

Représenter à l'encre de Chine en distinguant les parties vues et cachées, la partie du cône solide comprise entre les deux nappes du cylindre.

Reproduire à l'encre (traits continus de couleur) les constructions d'un point courant avec sa tangente et des points et tangentes remarquables pour l'hyperbole de base et l'intersection.

Les parallèles A_1A, HH′ *seront prises à un écartement de* 150mm. *Le point* O *pourra être placé à* 1 *ou* 2 *centimètres à gauche et* 6 *à* 9 *au-dessous du centre de la feuille.*

Ni cadre ni titre. L'emploi du pistolet pour le tracé des courbes est interdit.

L'hyperbole de base du cylindre est déterminée par ses asymptotes et ses sommets. On en construira autant de points qu'on voudra en menant par un des sommets a_1 une droite arbitraire qui coupe les asymptotes en α et β, et prenant à partir de β la longueur $\beta b = \alpha a_1$. On a la tangente en b en prenant à partir de ce point, sur cette droite ba_1 ou sur toute autre, par exemple sur la projection de la génératrice du cylindre un segment égal et opposé à celui que détermine l'asymptote $b\beta_1 = b\beta$ ou $b\gamma_1 = b\gamma$, et menant par le point β_1 ou γ_1 la parallèle à l'asymptote $o\beta$ jusqu'à sa rencontre c avec l'autre asymptote ; la droite cb est la tangente cher-

chée, car si on la prolongeait jusqu'à ce qu'elle coupe l'asymptote $o\xi$, le point b serait le milieu du segment compris entre les deux asymptotes [1].

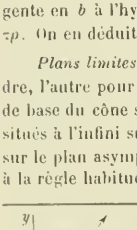
Comme on ne peut mener à l'hyperbole aucune tangente parallèle à la projection horizontale des génératrices, le cylindre n'a pas de contour apparent horizontal. Son contour apparent vertical se réduit aux projections des deux génératrices de contact $a'b'$, $a'_1D'_1$ des plans tangents de bout.

Le contour apparent horizontal du cône s'obtient en menant du point s les tangentes au cercle ω, projection horizontale de sa base; l'une d'elles est la droite de profil ss' qui se confond avec l'une des génératrices de contour apparent vertical. L'autre génératrice de contour apparent vertical est celle qui aboutit au point F de la base où la tangente à cette base est une droite de bout; ce point ayant, d'après les données, la même cote que le sommet, cette génératrice SF est horizontale.

Point courant de l'intersection et tangente. — Pour obtenir un point courant de l'intersection, nous avons ici le choix entre deux méthodes : la première consiste à mener par le sommet du cône la parallèle aux génératrices du cylindre jusqu'à son intersection σ, σ' avec le plan de base de celui-ci, puis faire tourner autour de cette droite des plans auxiliaires qui couperont les deux surfaces suivant des génératrices dont les points communs donneront des points de l'intersection. Soit par exemple $\sigma\mu$ la trace d'un de ces plans sur le plan de base du cylindre, elle coupe la trace horizontale $a'\omega$ du plan de base du cône en ν et comme ce plan de base est parallèle aux génératrices du cylindre, c'est-à-dire à la droite $S\Sigma$, le plan auxiliaire le coupe suivant la parallèle menée du point ν à ces génératrices, et il suffit de joindre au point s le point ν_1 où cette parallèle coupe la circonférence ω pour avoir une des génératrices $s\nu_1$ du cône, dont l'intersection avec la génératrice du cylindre menée par μ donne un point m de la courbe cherchée. Nous n'avons pas mis à l'encre les projections du second couple de génératrices qui ferait connaître en même temps un second point de l'intersection sur chacune des premières et un autre à leur point de rencontre, soit quatre points en tout. La tangente au point m est l'intersection des plans tangents aux deux surfaces en ce point : pour le cylindre, le plan tangent a pour trace horizontale la tangente en μ à l'hyperbole. Quant au cône, si nous menons la tangente à sa base au pied ν_1 de la génératrice, la trace horizontale de cette tangente sera au point où elle coupe la trace $\omega a'$ du plan de la base et il suffira de joindre ce point à la trace horizontale λ de la génératrice $s\nu_1$, $s'\nu'_1$ pour obtenir la trace horizontale du plan tangent; elle coupe la tangente en μ à l'hyperbole au point t et l'on peut tracer la tangente tm. On a immédiatement la projection verticale m' sur la génératrice $s'\nu'_1$ du cône, et la tangente $t'm'$ en ce point.

La seconde méthode consiste à couper les deux surfaces par des plans parallèles au plan de base du cône; chacun de ces plans donne sur le cylindre deux génératrices et sur le cône une ellipse qui se projette horizontalement suivant un cercle dont le centre est sur la droite $s\omega$; les points où les génératrices du cylindre coupent ce cercle donnent des points de la courbe d'intersection. Nous avons fait les constructions pour le plan qui passe par le point b de l'hyperbole, ce qui nous a donné la génératrice bp, $b'p'$ et le cercle de centre i, i', d'où les deux points p, p' de la courbe. La tangente en l'un de ces points p est l'intersection des plans tangents aux deux surfaces en ce point; nous avons la trace horizontale oo_1 du plan tangent au cône en joignant les traces des tangentes en p et p_1 aux deux sections parallèles i et ω et la trace du plan tangent au cylindre est la tangente en b à l'hyperbole. Le point τ où ces traces se coupent donne la trace horizontale de la tangente cherchée τp. On en déduit la tangente $\tau' p'$ à la projection verticale.

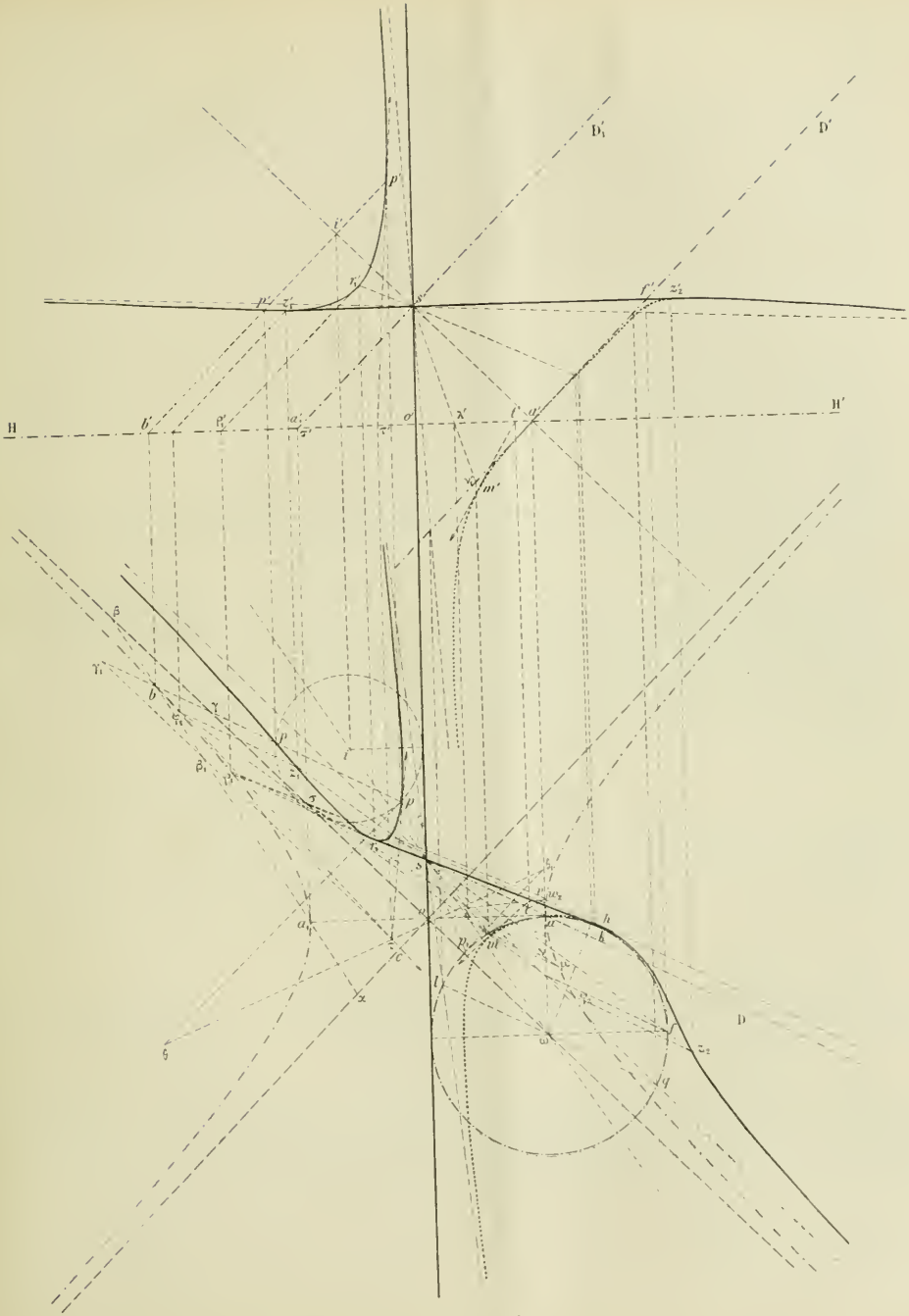
Plans limites. — Branches infinies. — La première méthode donne deux plans limites, l'un pour le cylindre, l'autre pour le cône. Le premier a pour trace horizontale l'asymptote $\sigma\omega$ de l'hyperbole et coupe le plan de base du cône suivant lq, ce qui donne deux génératrices sl et sq qui sont tangentes à la courbe aux points situés à l'infini sur le cylindre et, par suite sont deux asymptotes de l'intersection. Ces génératrices étant situées sur le plan asymptote $s\tau\omega$ sont d'ailleurs les intersections des plans tangents aux deux surfaces, conformément à la règle habituelle.



[1] On peut encore construire un point courant de l'hyperbole et la tangente en ce point en considérant une parallèle quelconque à l'axe transverse, soit bm et décrivant l'arc de cercle de rayon ba. Il coupe la droite bm en un point m qui est sur l'hyperbole, puisque

$$\overline{bm}^2 = \overline{ob}^2 + \overline{oa}^2, \qquad \text{ou} \qquad x^2 - y^2 = \overline{oa}^2.$$

La tangente en m s'obtient en joignant le point m au point t où la tangente au cercle de rayon ba au point a coupe l'axe oy.



Échelle : $\frac{3}{5}$.

Le second plan limite a pour trace horizontale la droite qui joint σ au point v où la tangente hv au cercle ω parallèle aux génératrices du cylindre coupe la trace $a'\omega$ du plan de base du cône. Cette droite σv coupe l'hyperbole en w_1 et w_2 qui donnent deux génératrices rencontrant la génératrice sh du cône aux deux points correspondants de la courbe d'intersection. Sur l'épure, la génératrice sh et la génératrice de contour apparent sk sont sensiblement confondues et les constructions ne peuvent être distinguées. La tangente en chacun des points ainsi déterminés serait la génératrice du cylindre sur laquelle il se trouve. Le cône n'ayant aucune génératrice parallèle à celles du cylindre, il n'y a d'autres points à l'infini sur l'intersection que ceux qui correspondent aux génératrices infinies du cylindre situées dans le plan $s\sigma\omega$ et qui donnent les branches asymptotes aux génératrices du cône sl et sq.

Points sur les contours apparents.— Il n'y a aucun point sur la génératrice de contour apparent horizontal du cône so, mais il en existe sur la génératrice sk; on les obtient en menant par le pied k de cette génératrice une parallèle aux génératrices du cylindre, trace du plan auxiliaire correspondant sur le plan de base du cône, et joignant le point σ au point où cette droite coupe $a'\omega$ de manière à déterminer sur l'hyperbole les pieds ρ_1 et ρ_2 des deux génératrices du cylindre qui coupent sk aux deux points cherchés r_1 et r_2. Nous avons indiqué seulement la construction pour les points ρ_1 et r_1, le point r_2 étant presque confondu sur l'épure avec le point k.

En projection verticale on a immédiatement le point a' sur le contour apparent du cylindre et c'est le seul; pour le cône on a deux points sur la génératrice SF en menant par cette génératrice le plan auxiliaire $\varphi_2\sigma\varphi_1$, qui détermine les deux génératrices du cylindre $\varphi_1 z_1$ et $\varphi_2 z_2$ conduisant aux points cherchés z_1, z'_1 et z_2, z'_2.

Le solide demandé a pour contour apparent horizontal la portion $r_1 r_2$ de génératrice du cône limitée par les deux nappes du cylindre et la seconde génératrice so en entier, puis les deux branches infinies dont celle de gauche est entièrement vue, celle de droite étant vue seulement sur la portion $r_2 z_2$ jusqu'à l'infini. On le reconnaît en imaginant un mobile parcourant la courbe à partir d'un point manifestement vu tel que z_2 et observant qu'il reste vu tant qu'il n'a pas franchi le contour apparent du solide conservé.

Pour la projection verticale on suit la même règle et on en déduit la ponctuation sans aucune difficulté.

QUESTIONS PROPOSÉES

1601. — Démontrer la formule

$$\int \frac{dx}{(x^2+a)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{a}}\right)}{da^{n-1}}.$$

A. Darmon.

1602. — Les fonctions $y = \sqrt{1+\sqrt{x^2+1}}$, $Y = \sqrt{-x+\sqrt{x^2+1}}$ satisfont toutes deux à une même équation différentielle linéaire du second ordre. Trouver cette équation. Trouver son intégrale générale. Développer y et Y par la formule de Mac-Laurin.

W. Mérigot, à Paris.

1603. — Soient P un point fixe du grand axe d'une ellipse et M un point variable de l'ellipse. La perpendiculaire élevée en P à PM rencontre la tangente en M à l'ellipse au point T. Le lieu de T est en général une quartique. Étudier les cas particuliers où le point P est : 1° un foyer ; 2° un sommet ; 3° le centre ; 4° un des points de rebroussement de la développée. Où doit être situé le point P pour que la quartique se décompose en une droite et une cubique ?

E.-N. Barisien.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMPE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

17e Année. N° 10. Juillet 1907.

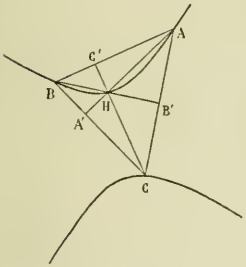
REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

NOTE DE GÉOMÉTRIE

par M. **L. Sire**, élève de Mathématiques spéciales au lycée de Nancy.

Considérons un triangle ABC, inscrit dans une hyperbole équilatère. L'orthocentre H de ce triangle est situé sur la courbe.



Les points à l'infini situés sur les côtés des angles droits AA'B, BB'C, CC'A forment une involution dans laquelle les points à l'infini de l'hyperbole sont homologues.

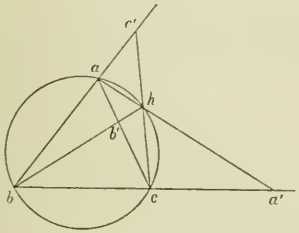
Faisons une transformation homographique de façon qu'aux points à l'infini de l'hyperbole correspondent les points cycliques. Considérons la figure transformée. L'hyperbole équilatère devient un cercle et le triangle ABC se transforme en un triangle abc.

Les points à l'infini des angles $aa'b$, $bb'c$, $cc'a$ forment une involution dans laquelle les points cycliques sont homologues ; les points doubles sont par suite à l'infini sur deux droites rectangulaires et les bissectrices des angles $aa'b$, $bb'c$, $cc'a$ sont parallèles.

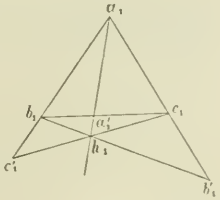
D'autre part, les droites aa', bb', cc' sont concourantes en un point du cercle circonscrit.

Cela étant, considérons le cercle conjugué au triangle ABC ; il a pour centre l'orthocentre H de ce triangle. Faisons une transformation homographique, de façon qu'aux points cycliques correspondent sur la droite de l'infini deux points conjugués harmoniques.

Le cercle devient une hyperbole équilatère conjuguée par rapport au triangle transformé $a_1b_1c_1$.



Les points à l'infini des angles $a_1a'_1b_1$, $b_1b'_1c_1$, $c_1c'_1a_1$ forment une involution dans laquelle les points doubles sont à l'infini sur deux droites rectangulaires et les bissectrices des angles $a_1a'_1b_1$, $b_1b'_1c_1$, $c_1c'_1a_1$ sont parallèles.



D'après ce qui précède, les droites $a_1a'_1$, $b_1b'_1$, $c_1c'_1$ concourent en un point h_1 du cercle circonscrit au triangle $a_1b_1c_1$ et ce point est le centre de l'hyperbole équilatère ; de là :

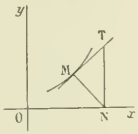
Le lieu des centres des hyperboles équilatères conjuguées par rapport à un triangle est le cercle circonscrit à ce triangle.

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES (*Cours spéciaux*).

Concours de 1906.

1532. — *Trouver une courbe telle que sa normale* MN *et sa tangente* MT *déterminent un segment de longueur constante* NT *sur l'ordonnée menée par le point où la normale* MN *rencontre l'axe* Ox.

La normale au point $M(x, y)$ a pour équation $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$; elle rencontre Ox au point N dont l'abscisse est $x + yy'$.



D'autre part, le segment $\overline{NT}$ est l'ordonnée du point T de la tangente au point M qui a pour abscisse $x + yy'$. Comme l'équation de cette tangente est $Y - y = y'(X - x)$, on a

$$\overline{NT} = y + yy'^2,$$

et l'équation différentielle de la courbe cherchée est

$$y + yy'^2 = a, \qquad \text{ou} \qquad y' = \pm\sqrt{\frac{a-y}{y}},$$

ou enfin

$$dx = \pm\sqrt{\frac{y}{a-y}}\,dy.$$

Pour que la quantité sous le radical soit positive, il faut que y soit compris entre 0 et a; on peut donc poser

$$y = a\sin^2\varphi; \qquad \text{on en déduit} \qquad \frac{y}{a-y} = \operatorname{tg}^2\varphi,$$

$$dy = 2a\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi, \qquad \text{et} \qquad dx = \pm 2a\sin^2\varphi\,d\varphi = \pm a(1 - \cos 2\varphi)d\varphi.$$

En intégrant, on obtient

$$x - x_0 = \pm a\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right) \qquad \text{ou} \qquad x - x_0 = \pm\frac{a}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi).$$

D'autre part, on a $y = a\sin^2\varphi = \frac{a}{2}(1 - \cos 2\varphi)$; il en résulte que les équations paramétriques de la courbe sont

$$x - x_0 = \pm\frac{a}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi), \qquad y = \frac{a}{2}(1 - \cos 2\varphi).$$

On reconnait les équations d'une cycloïde engendrée par un point d'un cercle de rayon $\frac{a}{2}$ roulant sur Ox.

G. COTTY, élève à l'École normale supérieure.

Bonnes solutions par MM. A. Cotty, lycée de Dijon; Amblard, conducteur des ponts et chaussées, à Ruines (Cantal); A. Darmon, à Paris; E. Devoucoux, G. Frey, à Alger; G. Fourcy, à Roanne; D. Georgescu, à Bucarest (Roumanie); H. Janois, à Nantes; W. Mérigot, à Paris; G. Pélissier, à Toulouse.

1533. — *On donne un système d'axes rectangulaires* $y_1O_1x_1$ *mobile dans un plan* P *par rapport au système d'axes fixes rectangulaires* yOx.

Soient x_0, y_0 *les coordonnées de* O_1 *par rapport aux axes fixes; le mouvement d'un point* $Q(x_1, y_1)$ *invariablement lié au premier système étant défini par les formules connues du changement d'axes rectangulaires*

$$x = x_0 + ax_1 + by_1, \qquad y = y_0 + a_1x_1 + b_1y_1,$$

où x_0, y_0, a, b, a_1, b_1 *sont des fonctions connues du temps* t, *trouver à l'instant* t:

1° *les coordonnées du centre instantané de rotation;*

2° *le lieu des points* Q *qui sont des points d'inflexion sur leur trajectoire;*

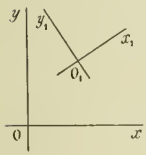
3° *le lieu des points* Q *qui ont même vitesse à l'instant* t.

1. Désignons par α l'angle de Ox avec O_1x_1, les formules de transformation de coordonnées s'écrivent

$$x = x_0 + x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \qquad y = y_0 + x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha,$$

x_0, y_0, α étant des fonctions du temps et x_1, y_1 des constantes.

Différentions par rapport à t, nous avons



$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} - (x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha)\frac{d\alpha}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + (x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha)\frac{d\alpha}{dt},$$

ou

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} - (y - y_0)\frac{d\alpha}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + (x - x_0)\frac{d\alpha}{dt}.$$

Le centre instantané de rotation est le point dont la vitesse est nulle ; par suite les coordonnées x, y de ce point sont données par les équations

$$\frac{dx_0}{dt} - (y - y_0)\frac{d\alpha}{dt} = 0, \qquad \frac{dy_0}{dt} + (x - x_0)\frac{d\alpha}{dt} = 0,$$

ou

$$x = x_0 - \frac{\dfrac{dy_0}{dt}}{\dfrac{d\alpha}{dt}}, \qquad y = y_0 + \frac{\dfrac{dx_0}{dt}}{\dfrac{d\alpha}{dt}}.$$

2. Si le point $Q(x, y)$ est un point d'inflexion sur sa trajectoire, on a $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$, ou

$$\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Or

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_0' + (x - x_0)\alpha'}{x_0' - (y - y_0)\alpha'},$$

où x_0', y_0', α' désignent, pour simplifier, les dérivées de x_0, y_0 et α par rapport à t.

En égalant à zéro la dérivée de $\dfrac{dy}{dx}$ par rapport à t, on a

$$[x_0' - (y - y_0)\alpha'][y_0'' + (x' - x_0')\alpha' + (x - x_0)\alpha''] - [y_0' + (x - x_0)\alpha'][x_0'' - (y' - y_0')\alpha' - (y - y_0)\alpha''] = 0$$

ou encore

$$[x_0' - (y - y_0)\alpha'][y_0'' - (y - y_0)\alpha'^2 + (x - x_0)\alpha''] - [y_0' + (x - x_0)\alpha'][x_0'' - (x - x_0)\alpha'^2 - (y - y_0)\alpha''] = 0,$$

ou enfin en remplaçant $x - x_0$ et $y - y_0$ par leurs valeurs en fonction de x_1 et y_1,

$$[x_0' - (x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha)\alpha'][y_0'' - (x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha)\alpha'^2 + (x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha)\alpha'']$$
$$= [y_0' + (x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha)\alpha'][x_0'' - (x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha)\alpha'^2 - (x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha)\alpha''].$$

C'est une équation du deuxième degré par rapport à x_1 et y_1 ; on vérifie aisément que les coefficients de x_1^2 et de y_1^2 sont égaux, et que le coefficient de x_1y_1 est nul. Par suite, le lieu est un cercle.

3. Tous les points Q qui ont même vitesse v sont définis par l'égalité

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v^2,$$

ou

$$[(x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha)\alpha' - x_0']^2 + [(x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha)\alpha' - y_0']^2 = v^2.$$

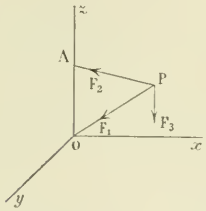
On reconnaît l'équation d'un cercle qui a pour centre le centre instantané de rotation et dont le rayon est égal à $\dfrac{v}{\alpha'}$.

G. COTTY, élève à l'École normale supérieure.

Bonne solution par M. AMBLARD.

1534. — *On donne trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz ; *étudier et discuter le mouvement d'un point pesant* P *de masse* m *attiré par l'origine* O *proportionnellement à sa distance* OP *à* O, *et par la verticale* Oz *proportionnellement à sa distance* PA *à* Oz.

Nous désignerons par m la masse du point P et par x, y, z ses coordonnées. Ce point est soumis à l'action de trois forces :



1° La force F_1 dirigée suivant PO et proportionnelle à la distance PO. Elle a pour valeur $mk^2.\mathrm{PO}$, et comme les cosinus directeurs de la direction PO sont $-\frac{x}{\mathrm{PO}}$, $-\frac{y}{\mathrm{PO}}$ et $-\frac{z}{\mathrm{PO}}$, les projections de la force F_1 sur les axes de coordonnées sont

$$X_1 = -mk^2x, \qquad Y_1 = -mk^2y, \qquad Z_1 = -mk^2z.$$

2° La force F_2 dirigée suivant PA et proportionnelle à la distance PA. Elle a pour valeur $mk'^2\mathrm{PA}$, et comme les cosinus directeurs de la direction PA sont $-\frac{x}{\mathrm{PA}}$, $-\frac{y}{\mathrm{PA}}$ et zéro, les projections de la force F_2 sur les trois axes sont

$$X_2 = -mk'^2x, \qquad Y_2 = -mk'^2y, \qquad Z_2 = 0.$$

3° La force F_3, poids du point P. Ses projections sont

$$X_3 = 0, \qquad Y_3 = 0, \qquad Z_3 = -mg.$$

Il en résulte que les équations du mouvement sont

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X_1 + X_2 + X_3, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y_1 + Y_2 + Y_3, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z_1 + Z_2 + Z_3,$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(k^2 + k'^2)x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -(k^2 + k'^2)y, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -k^2z - g.$$

Les deux premières équations ont pour intégrales générales (en posant $k^2 + k'^2 = \alpha^2$)

$$x = A\cos\alpha t + B\sin\alpha t, \qquad y = A'\cos\alpha t + B'\sin\alpha t.$$

La troisième s'écrit $\frac{d^2z}{dt^2} + k^2z = -g$; l'équation sans second membre a pour intégrale générale $A''\cos kt + B''\sin kt$, et comme $-\frac{g}{k^2}$ est intégrale particulière de l'équation avec second membre, l'intégrale générale de l'équation avec second membre est

$$z = A''\cos kt + B''\sin kt - \frac{g}{k^2}.$$

Désignons maintenant par x_0, y_0, z_0 les coordonnées de la position initiale et par x_0', y_0', z_0' les projections de la vitesse initiale ; il est facile d'exprimer les constantes A, B, ..., B'' en fonction de ces données initiales. Ecrivons que pour $t = 0$ x, y, z prennent les valeurs x_0, y_0, z_0 et que $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ deviennent égales à x_0', y_0', z_0' ; nous obtenons ainsi $A = x_0$, $B = \frac{x_0'}{\alpha}$, $A' = y_0$, $B' = \frac{y_0}{\alpha}$, $A'' = z_0 + \frac{g}{k^2}$, $B'' = \frac{z_0'}{k}$. Les valeurs de x, y, z en fonction de t sont alors

$$x = x_0\cos\alpha t + \frac{x_0'}{\alpha}\sin\alpha t, \qquad y = y_0\cos\alpha t + \frac{y_0'}{\alpha}\sin\alpha t, \qquad z = \left(z_0 + \frac{g}{k^2}\right)\cos kt + \frac{z_0'}{k}\sin kt - \frac{g}{k^2}.$$

Ces équations définissent la trajectoire et le mouvement du point P sur cette trajectoire. Les deux premières sont les équations paramétriques de la projection de la courbe sur le plan des xy. On voit aisément que cette courbe est une ellipse, ayant pour centre le point O ; car, si on résout les deux équations par rapport à $\cos\alpha t$ et $\sin\alpha t$, on a

$$\cos\alpha t = \frac{xy_0' - yx_0'}{x_0y_0' - y_0x_0'}, \qquad \sin\alpha t = -\frac{\alpha(xy_0 - yx_0)}{x_0y_0 - y_0x_0'},$$

et en écrivant que $\cos^2\alpha t + \sin^2\alpha t = 1$, on obtient $(xy_0 - yx_0)^2 + \alpha^2(xy_0 - yx_0)^2 = (x_0y_0 - y_0x_0)^2$.

C'est l'équation de la projection de la trajectoire sur le plan des xy. On voit qu'elle représente une ellipse admettant pour diamètres conjugués les droites

$$\frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0}, \qquad \frac{y}{x} = \frac{y'_0}{x'_0}.$$

Le premier de ces diamètres a l'une de ses extrémités au point (x_0, y_0); le second est parallèle à la projection de la vitesse initiale sur le plan des xy et a pour demi-longueur $\frac{1}{k}\sqrt{x'^2_0 + y'^2_0}$; ces résultats sont d'ailleurs bien connus.

La trajectoire est donc une courbe tracée sur le cylindre, parallèle à Oz, qui admet cette ellipse pour directrice.

Ajoutons enfin que la projection du point P sur Oz est animée d'un mouvement vibratoire simple.

Dans le cas particulier où le rapport $\frac{k}{\alpha}$ est commensurable, la trajectoire est une courbe algébrique.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1514. — *On considère l'hypocycloïde à trois rebroussements définie par les équations, en coordonnées rectangulaires,*

$$x = \frac{h(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \qquad y = \frac{-2ht^3}{(1+t^2)^2}, \qquad \text{où } t \text{ est un paramètre arbitraire.}$$

Une circonférence rencontre la courbe en six points à distance finie.

1° *Démontrer que les six tangentes à l'hypocycloïde aux points d'intersection sont tangentes à une même conique qui est homofocale à une conique inscrite dans le triangle qui a pour sommets les points de rebroussement. En particulier, si trois des tangentes sont concourantes, les trois autres le sont aussi, et les deux points de concours sont foyers d'une même conique inscrite dans le triangle qui a pour sommets les points de rebroussement.*

2° *Démontrer que si la circonférence varie en restant concentrique à une circonférence fixe, la conique varie en restant homofocale à une conique fixe.*

3° *Démontrer que le centre* C *de la circonférence et le centre* O *de la conique sont en ligne droite avec le point* I *de concours des tangentes de rebroussement de l'hypocycloïde et que l'on a* $\overline{IC} = 4\overline{IO}$.

4° *Démontrer de même que les six normales à l'hypocycloïde aux points d'intersection avec la circonférence sont tangentes à une même conique qui est homofocale à une conique inscrite dans le triangle qui a pour sommets les points de rebroussement.*

En particulier : 1° *si trois des normales sont concourantes, les trois autres le sont aussi, et les deux points de concours sont foyers d'une même conique inscrite dans le triangle qui a pour sommets les points de rebroussement ;* 2° *si la circonférence varie en restant concentrique à une circonférence fixe, la conique varie en restant homofocale à une conique fixe ;* 3° *le centre* C *de la circonférence et le centre* O′ *de la conique sont en ligne droite avec le point* I *de concours des tangentes de rebroussement de l'hypocycloïde et l'on a*

$$\overline{IC} = \frac{4}{3}\overline{IO'}.$$

1. Si nous prenons comme origine l'un des sommets de l'hypocycloïde, comme axe des x la tangente de rebroussement qui y passe et comme axe des y la tangente au sommet, les coordonnées d'un point quelconque de l'hypocycloïde s'expriment en fonction rationnelle d'un même paramètre t au moyen des formules

$$x = \frac{h(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \qquad y = \frac{-2ht^3}{(1+t^2)^2};$$

h est l'abscisse du point de rebroussement situé sur l'axe des x.

L'équation de la tangente à l'hypocycloïde au point de paramètre t est

$$(1+t^2)(y-tx)+ht=0.$$

Les coordonnées tangentielles u, v, w de la droite sont donc $u=-t(1+t^2)$, $v=1+t^2$, $w=ht$.

Soit $au^2+2buv+cv^2+2duw+2evw+fw^2=0$ l'équation tangentielle d'une certaine conique.

L'équation aux t des points de contact avec l'hypocycloïde des tangentes communes à l'hypocycloïde et à la conique est

$$at^6-2bt^5+(2a+c-2dh)t^4-(4b-2eh)t^3+(a+2c-2dh+fh^2)t^2-2(b-eh)t+c=0.$$

D'autre part, l'équation aux t des points de rencontre (autres que les points cycliques) de l'hypocycloïde avec un cercle de centre C ayant pour équation $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0$

est
$$\gamma t^6+4\beta h t^5+(4h^2+2\alpha h+3\gamma)t^4+4\beta h t^3+3(\gamma-h^2)t^2+h^2-2\alpha h+\gamma=0.$$

Écrivons que les coefficients des deux équations en t du sixième degré sont proportionnels. On a ainsi

(1) $$b=eh$$

et

$$\frac{a}{\gamma}=\frac{b}{-2\beta h}=\frac{2a+c-2dh}{4h^2+2\alpha h+3\gamma}=\frac{a+c-2dh+fh^2}{3\gamma-3h^2}=\frac{c}{h^2-2\alpha h+\gamma}$$
$$=\frac{c-a}{h^2-2\alpha h}=\frac{a-c-fh^2}{7h^2+2\alpha h}=\frac{-fh^2}{8h^2}=-\frac{f}{8}=\frac{2a+2c-2dh}{5h^2+4\gamma}=\frac{2c-2a-2dh}{5h^2},$$

d'où l'on tire

(2) $$16(c-a)-16dh+5fh^2=0.$$

On déduit de ces conditions

$$\gamma=-\frac{8a}{f},\qquad \beta=\frac{4b}{fh},\qquad \alpha=\frac{8(c-a)+fh^2}{2fh}=\frac{16dh-3fh^2}{4fh}=\frac{4d}{f}-\frac{3h}{4}.$$

On voit ainsi qu'il existe une conique qui est tangente aux six tangentes à l'hypocycloïde aux points d'intersection avec le cercle. Les coefficients de l'équation tangentielle de la conique satisfont aux conditions (1) et (2). Pour trouver la signification géométrique de ces conditions, considérons les tangentes qu'on peut mener à la conique du point de rebroussement situé sur l'axe des x et d'abscisse h. Leur équation étant de la forme $y-mx+mh=0$, l'équation aux m de ces deux tangentes est

$$m^2(a-2dh+fh^2)-2m(b-eh)+c=0.$$

La condition (1) exprime ainsi que les deux tangentes sont également inclinées sur l'axe des x, c'est-à-dire sur une tangente de rebroussement de l'hypocycloïde. Il n'est pas nécessaire de chercher la signification géométrique de la condition (2). Les tangentes à la conique menées d'un autre point de rebroussement sont également inclinées sur la tangente en ce point. La conique est donc, comme nous l'avons annoncé, homofocale à une conique inscrite dans le triangle des rebroussements.

Si trois des tangentes sont concourantes, la conique se décompose en deux points. Par suite, les trois autres tangentes sont aussi concourantes. Les deux points de concours sont foyers d'une même conique inscrite dans le triangle des rebroussements.

2. Lorsque le cercle varie en restant concentrique à un cercle fixe, α et β restent constants. Mais alors $\frac{b}{f}$ et $\frac{d}{f}$ sont constants et les conditions (1) et (2) montrent que $\frac{c}{f}$ et $\frac{c-a}{f}$ sont constants. L'équation de la conique variable est donc de la forme

$$(a_0+\lambda)u^2+2buv+(c_0+\lambda)v^2+2duw+2evw+fw^2=0$$

ou encore

$$a_0u^2+2buv+c_0v^2+2duw+2evw+fw^2+\lambda(u^2+v^2)=0,$$

λ étant un paramètre variable. La conique reste donc homofocale à une conique fixe.

3. Soit (ξ, η) le centre O de la conique. Son équation tangentielle étant $du + ev + fw = 0$, on a

$$\xi = \frac{d}{f}, \qquad y = \frac{e}{f} = \frac{b}{fh}.$$

Par suite, $\alpha = 4\xi - \frac{3h}{4}$, $\quad \beta = 4\eta \quad$ ou encore $\quad \alpha - \frac{h}{4} = 4\left(\xi - \frac{h}{4}\right), \quad \beta = 4\eta.$

Mais l'abscisse du point de concours I des tangentes de rebroussement est $\frac{h}{4}$. On voit ainsi que les trois points I, O, C sont en ligne droite et que $\overline{IC} = 4\overline{IO}$.

Les théorèmes que je viens d'établir généralisent les théorèmes suivants qui sont bien connus (Cremona, *Journal de Crelle*, 1864) :

1° *Les tangentes à l'hypocycloïde à trois rebroussements aux quatre points de rencontre avec une droite sont tangentes à une parabole qui est homofocale à une parabole inscrite dans le triangle des rebroussements.*

2° *Lorsque la droite varie en restant parallèle à une droite fixe, la parabole varie en restant homofocale à une parabole fixe.*

3° *La droite est perpendiculaire à l'axe de la parabole.*

On a en particulier ce théorème :

Lorsque la droite est normale à l'hypocycloïde en un point, les tangentes à la courbe aux trois autres points de rencontre passent par un même point qui est situé sur le cercle des rebroussements.

4° L'équation de la normale à l'hypocycloïde au point de paramètre t est

$$(1 + t^2)(ty + x) + h(2t^2 - 1) = 0.$$

Les coordonnées tangentielles u, v, w de la normale sont donc

$$u = 1 + t^2, \qquad v = t(1 + t^2), \qquad w = h(2t^2 - 1).$$

Exprimons que la normale est tangente à une conique dont l'équation tangentielle est

$$a'u^2 + 2b'uv + c'v^2 + 2d'uw + 2e'vw + f'w^2 = 0.$$

L'équation aux t des pieds des normales à l'hypocycloïde qui sont tangentes à cette conique est

$$c't^6 + (2b' + 4e'h)t^5 + (a' + 2c' + 4d'h + 4f'h^2)t^4 + (4b' + 2e'h)t^3$$
$$+ (2a' + c' + 4d'h - 4f'h^2)t^2 + (2b' - 2e'h)t + a' - 2d'h + f'h^2 = 0.$$

L'équation aux t des points de rencontre (autres que les points cycliques) de l'hypocycloïde avec un cercle de centre C dont l'équation est $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$ est

$$\gamma t^6 + 4\beta h t^5 + (4h^2 + 2\alpha h + 3\gamma)t^4 + 4\beta h t^3 + 3(\gamma - h^2)t^2 + h^2 - 2\alpha h + \gamma = 0.$$

Exprimons que les coefficients des deux équations du sixième degré en t sont proportionnels. On a ainsi

$$(1') \qquad b' = e'h$$

et

$$\frac{c'}{\gamma} = \frac{a' + 2c' + 4d'h + 4f'h^2}{4h^2 + 2\alpha h + 3\gamma} = \frac{2a' + c' + 2d'h - 4f'h^2}{3\gamma - 3h^2} = \frac{a' - 2d'h + f'h^2}{h^2 - 2\alpha h + \gamma}$$

$$= \frac{a' - c' + 4d'h + 4f'h^2}{4h^2 + 2\alpha h} = \frac{a' - c' - 2d'h - 8f'h^2}{-7h^2 - 2\alpha h} = \frac{2(a' - c') + 2d'h - 4f'h^2}{-3h^2}$$

$$= \frac{a' - c' - 2d'h + f'h^2}{h^2 - 2\alpha h} = \frac{2(a' - c') + 2d'h + 5f'h^2}{5h^2}$$

$$= \frac{2a' + 2c' + 2d'h - 4f'h^2}{4\gamma - 3h^2} = \frac{2a' + 2c' + 2d'h + 5f'h^2}{5h^2 + 4\gamma} = \frac{9}{8}f'.$$

On a la condition

(2') $$16(c'-a')-16d'h+5f'h^2=0.$$

On déduit de ces relations

$$\gamma=\frac{8}{9}\frac{c'}{f'},\qquad \beta=\frac{4}{3}\frac{b'}{hf'},\qquad \alpha=\frac{16d'h+8(c'-a')+f'h^2}{18hf'}=\frac{4}{3}\frac{d'}{f'}-\frac{h}{12}.$$

Les conditions (1') et (2') expriment que la conique est homofocale à une conique inscrite dans le triangle des rebroussements.

Si trois des normales sont concourantes, la conique se décompose en deux points. Les trois autres normales sont donc concourantes et les deux points de concours sont foyers d'une même conique inscrite dans le triangle des rebroussements.

Lorsque le cercle varie en restant concentrique à un cercle fixe, α et β restent constants; par suite, $\frac{b'}{f'}$, $\frac{d'}{f'}$, $\frac{e'}{f'}$, $\frac{c'-a'}{f'}$ restent constants. La conique varie donc en restant homofocale à une conique fixe.

Si ξ' et η' sont les coordonnées du centre O de la conique, on a

$$\xi'=\frac{d'}{f'},\qquad \eta'=\frac{e'}{f'}=\frac{b'}{f'h}.$$

Par suite,

$$\beta=\frac{4}{3}\eta',\qquad \alpha=\frac{4}{3}\xi'-\frac{h}{12}\qquad \text{ou encore}\qquad \beta=\frac{4}{3}\eta',\qquad \alpha-\frac{h}{4}=\frac{4}{3}\left(\xi'-\frac{h}{4}\right).$$

Ces deux relations montrent que le point I de concours des tangentes de rebroussement, les points O' et C sont en ligne droite et que l'on a

$$\overline{IC}=\frac{4}{3}\overline{IO'}.$$

En raisonnant par continuité, dans le cas particulier où le cercle sécant se décompose en une droite à distance finie et la droite de l'infini, on a l'énoncé suivant :

Les normales à une hypocycloïde aux quatre points de rencontre avec une droite sont tangentes à une parabole homofocale à une parabole inscrite dans le triangle des rebroussements.

Lorsque la droite varie en restant parallèle à une droite fixe, la parabole reste homofocale à une parabole fixe.

La droite est perpendiculaire à l'axe de la parabole.

CH. MICHEL.

Bonnes solutions : MM. AUDIBERT, lycée de Marseille ; J.-D. DUFAUF, à Poitiers ; MASSON.

GÉOMÉTRIE

1535. — *On considère trois cercles de centres donnés* A, B, C. *Soient* I *leur centre radical et* Δ *leur axe de similitude externe.*

1° *Lieu du point* I, *lorsque la droite* Δ *reste fixe.*

2° *Enveloppe de la droite* Δ *lorsque le point* I *reste fixe.*

3° *Par un point* I *donné passent deux droites* Δ. *Construire ces droites : elles sont rectangulaires.*

4° *Sur une droite* Δ *donnée existe un point* I. *On joint ce point, que l'on demande d'abord de construire, au centre* O *du cercle* ABC, *et l'on demande de trouver l'enveloppe des droites* Δ *qui font avec la droite* OI *un angle donné* θ.

1. Soient α, β, γ les points où Δ rencontre BC, CA, AB (*fig.* 1). Soient α_0, β_0, γ_0 les projections de I sur les mêmes droites (*fig.* 2), et soient A′, B′, C′ les milieux des côtés du triangle ABC. Soient R_A, R_B, R_C les rayons des trois cercles.

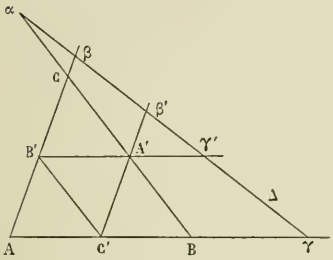


Fig. 1.

Puisque I est le centre radical

$$\overline{IA}^2 - R_A^2 = \overline{IB}^2 - R_B^2 = \overline{IC}^2 - R_C^2,$$

d'où $\overline{IA}^2 - \overline{IB}^2 = R_A^2 - R_B^2$, $\qquad \overline{IA}^2 - \overline{IC}^2 = R_A^2 - R_C^2$.

Or $\overline{IA}^2 - \overline{IB}^2 = \overline{A\gamma_0}^2 - \overline{B\gamma_0}^2 = (\overline{A\gamma_0} + \overline{\gamma_0 B})(\overline{A\gamma_0} - \overline{\gamma_0 B})$

$$= \frac{1}{2}\,\overline{AB} \times \overline{C'\gamma_0};$$

de même $\qquad \overline{IA}^2 - \overline{IC}^2 = \frac{1}{2}\,\overline{AC} \times \overline{B'\beta_0}$,

d'où

$$\frac{R_A^2 - R_B^2}{R_A^2 - R_C^2} = \frac{AB}{AC} \times \frac{C'\gamma_0}{B'\beta_0} = \frac{1 - \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^2}{1 - \left(\frac{R_C}{R_A}\right)^2} = \frac{1 - \frac{\overline{\gamma B}^2}{\overline{\gamma A}^2}}{1 - \frac{\overline{\beta C}^2}{\overline{\beta A}^2}} = \frac{\overline{A\beta}^2}{\overline{A\gamma}^2} \cdot \frac{\overline{A\gamma}^2 - \overline{B\gamma}^2}{\overline{A\beta}^2 - \overline{C\beta}^2} = \frac{\overline{A\beta}^2}{\overline{A\gamma}^2} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{C'\gamma}{B'\beta},$$

d'où

$$\frac{C'\gamma_0}{B'\beta_0} = \frac{\overline{A\beta}^2}{\overline{A\gamma}^2} \cdot \frac{C'\gamma}{B'\beta}.$$

Soient β', γ' les points où Δ coupe A′C′ et A′B′.

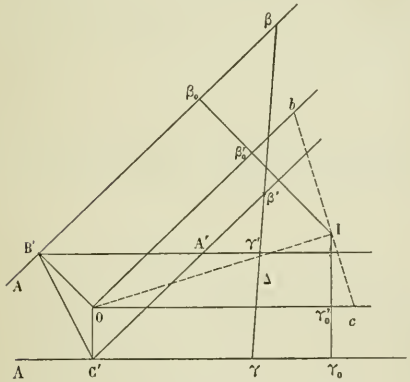


Fig. 2.

$$\frac{A\beta}{C'\beta'} = \frac{A\gamma}{C'\gamma} \qquad \frac{A\gamma}{B'\gamma'} = \frac{A\beta}{B'\beta},$$

d'où

$$C'\gamma = C'\beta' \cdot \frac{A\gamma}{A\beta}, \qquad B'\beta = B'\gamma' \cdot \frac{A\beta}{A\gamma}$$

et

$$\frac{C'\gamma}{B'\beta} = \frac{C'\beta'}{B'\gamma'} \cdot \frac{\overline{A\gamma}^2}{\overline{A\beta}^2},$$

d'où enfin

$$(1) \qquad \frac{C'\gamma_0}{B'\beta_0} = \frac{C'\beta'}{B'\gamma'}.$$

Si la droite Δ reste fixe, le deuxième membre de cette équation reste constant. Donc le premier reste aussi constant. Or soient β'_0, γ'_0 les projections de I sur les parallèles à AC, AB menées par le centre O du cercle ABC.

$$O\gamma'_0 = C'\gamma_0, \qquad O\beta'_0 = B'\beta_0, \qquad \text{donc} \qquad \frac{O\beta'_0}{O\gamma'_0} = \frac{B'\gamma'}{C'\beta'} = C^{te},$$

donc le point I décrit une droite passant par O.

2. Si I reste fixe, $\frac{C'\beta'}{B'\gamma'} = C^{te}$. Donc Δ trace sur A′B′, A′C′, deux divisions semblables.

Donc Δ enveloppe une parabole π tangente à A′B′, A′C′, et tangente de même à B′C′.

Cherchons la directrice de cette parabole. Nous allons voir que c'est la droite OI.

En effet, cherchons à mener à la parabole une tangente perpendiculaire à OI. Elle coupera B′A′ et

C'A' en γ'', β'' et il faudra d'abord que

$$\frac{C'\beta''}{B'\gamma''} = \frac{O\gamma'_0}{O\beta'_0}.$$

Ensuite, soient b et c les points où $O\beta'_0$ et $O\gamma'_0$ coupent la perpendiculaire à OI en I. Il faudra que

$$\frac{A'\beta''}{A'\gamma''} = \frac{Ob}{Oc} = \frac{\overline{OI}^2}{O\beta'_0} : \frac{\overline{OI}^2}{O\gamma'_0} = \frac{O\gamma'_0}{O\beta'_0}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{A'\beta''}{A'\gamma''} = \frac{C'\beta''}{B'\gamma''} = \frac{A'\beta'' + C'A'}{A'\gamma'' + B'A'},$$

ou

$$\frac{A'B''}{A'\gamma''} = \frac{C'A'}{B'A'};$$

il faudrait donc que l'on eût

$$\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{O\gamma'_0}{O\beta'_0},$$

relation non vérifiée en général. Donc les équations précédentes n'ont de solution que si β'' et γ'' sont à l'infini. Donc l'axe de la parabole π est normal à OI. Donc la directrice est parallèle à OI, et comme elle contient forcément le point O, orthocentre du triangle A'B'C', elle se confond avec OI.

Donc, en résumé, OI *est la directrice de la parabole* π *qui touche* Δ *et les trois côtés du triangle* A'B'C'.

3. Le point I étant donné, la parabole π s'en déduit. Les deux droites Δ qui passent en I sont les tangentes issues de I à π. Elles sont rectangulaires, puisque I est sur la directrice.

4. La droite Δ étant donnée, la parabole π s'en déduit. Le point I demandé sera à l'intersection de Δ et de la directrice.

Nous devons chercher dans quels cas l'angle de OI avec Δ est égal à un angle donné θ.

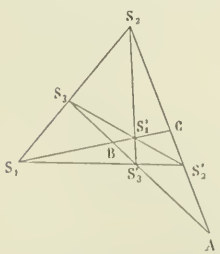
Soit F un point du cercle A'B'C'. Menons par ce point sur les côtés du triangle A'B'C' trois obliques qui les coupent sous un même angle θ. Les pieds de ces trois obliques sont en ligne droite et il est extrêmement facile de voir que la droite qui les joint fait l'angle θ avec la droite de Simson du point F, c'est-à-dire avec la tangente au sommet de la parabole de foyer F inscrite au triangle, c'est-à-dire aussi avec la directrice de cette parabole. Donc cette droite répond aux conditions imposées à la droite Δ; c'est donc une tangente à l'enveloppe demandée.

On sait que *l'enveloppe ainsi définie est une hypocycloïde à trois rebroussements tangente aux trois côtés du triangle* A'B'C'.

Si l'on appelle G le centre de gravité commun des triangles ABC, A'B'C'. le centre de cette hypocycloïde a pour projection sur OG le centre du cercle des neuf points du triangle A'B'C' et la droite qui le joint au point O fait avec OG l'angle $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

L. BICKART.

Autre solution géométrique. — Soient S_1, S_2, S_3 les centres de similitude externes et S'_1, S'_2, S'_3 les centres de similitude internes ; ces points sont les six sommets d'un quadrilatère complet dont le triangle diagonal est ABC.



1° La puissance du point I par rapport aux trois cercles A, B et C est égale à celle des cercles décrits sur les diagonales $S_1S'_1$, $S_2S'_2$ et $S_3S'_3$ comme diamètres; donc le lieu du point I est la corde commune à ces trois cercles ; cette droite est la directrice de la parabole tangente aux quatre axes d'homothétie ; elle passe par le centre du cercle ABC qui est une position particulière du point I.

2° Le point I étant fixe, la parabole précédente est fixe car elle a pour triangle conjugué ABC et pour directrice IO ; les quatre axes d'homothétie restent tangents à cette parabole.

3° Du point I on peut mener deux tangentes à cette parabole et ces tangentes sont rectangulaires. Nous sommes conduits à construire une parabole connaissant la directrice et un triangle conjugué. La construction suivante se déduit de la première partie : décrivons un cercle quelconque de centre A, puis deux autres cercles de centres

B et C, de façon qu'un point I de la directrice soit le centre radical des trois cercles A, B et C, les quatre axes d'homothétie seront quatre tangentes à la parabole. Cette parabole est d'ailleurs inscrite dans le triangle dont les sommets sont les milieux des côtés du triangle ABC.

4° La droite Δ étant donnée, la parabole précédente est bien définie et sa directrice rencontre Δ au point I demandé. La droite IO est cette directrice.

Pour déterminer l'enveloppe, rappelons les propriétés suivantes relatives à la droite de Simson :

Si d'un point F *du cercle circonscrit au triangle* A'B'C' *on mène trois droites faisant avec les côtés du triangle trois angles égaux à* α *et dans le même sens, les sommets de ces trois angles sont sur une droite* Δ *qui, lorsque* α *varie, enveloppe la parabole inscrite dans le triangle et de foyer* F.

L'angle α précédent a pour complément l'angle θ de la droite Δ et de la droite de Simson relative au point F.

Les démonstrations de ces deux propriétés sont faciles. Lorsque α est constant, θ l'est aussi, le point F décrivant le cercle circonscrit au triangle A'B'C' des milieux des côtés du triangle ABC, la droite Δ enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements. En particulier quand $\theta = 0$, la droite Δ est la ligne de Simson.

PARROD.

CONCOURS DE 1907

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Algèbre et Trigonométrie.

I. — **1604**. Soient $f(\theta)$ et $\varphi(\theta)$ deux fonctions de la variable indépendante θ, et soient $f'(\theta)$ et $\varphi'(\theta)$ leurs dérivées. — On pose :

$$x = f(\theta) - \varphi'(\theta), \qquad y = \varphi(\theta) + f'(\theta);$$
$$X = f'(\theta)\sin\theta - \varphi'(\theta)\cos\theta, \qquad Y = f'(\theta)\cos\theta + \varphi'(\theta)\sin\theta.$$

Démontrer que l'on a identiquement : $dx^2 + dy^2 = dX^2 + dY^2$.

II. — **1605**. Former l'équation du troisième degré qui admet pour racines les longueurs des côtés d'un triangle, connaissant : le périmètre $2p$, la somme des trois hauteurs $2h$, et l'aire S du triangle.

Application numérique : Calculer les trois côtés en supposant : $2p = 16^m$; $2h = 13^m,60$; $S = 12^{m2}$.

III. — **1606**. On donne quatre quantités a, b, c, d réelles et différentes entre elles.

Soit $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$.

1° Déterminer une fonction $\varphi_1(x)$, polynome du troisième degré, telle qu'on ait :

$$\varphi_1(a) = b; \qquad \varphi_1(b) = c; \qquad \varphi_1(c) = d; \qquad \varphi_1(d) = a.$$

2° Si l'on permute dans $\varphi_1(x)$, a, b, c, d, de toutes les manières possibles, on trouve six fonctions différentes : $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$, $\varphi_5(x)$, $\varphi_6(x)$.

Soient $F(x)$ la somme de ces six fonctions, et $G(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^3F(x)$:

Former la fonction $G(x)$, et étudier la variation de cette fonction.

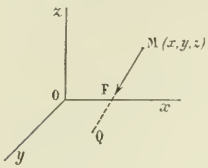
3° Déterminer les deux intégrales indéfinies : $\int G(x)dx$, $\int \frac{dx}{G(x)}$.

(3 juin, de 7 h. à 11 h.)

Géométrie analytique et Mécanique.

1607. — On considère trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz. A tout point $M(x, y, z)$ de l'espace on fait correspondre le point Q de coordonnées $\frac{a^2x}{x^2+y^2}$, $\frac{a^2y}{x^2+y^2}$, 0, a étant une constante. Le

point M, dont on suppose la masse égale à l'unité, est sollicité par une force MF, dirigée suivant MQ (et dans le sens MQ), et dont la grandeur absolue est égale au produit de MQ par un coefficient donné, k^2.



1° Evaluer les projections de la force MF sur les axes Ox, Oy, Oz.

2° Dans le champ de forces ainsi défini, déterminer les surfaces de niveau et les lignes de force.

3° Le point M se mouvant sous l'action de la force MF, chercher le mouvement de sa projection M′ sur Oz.

4° On fera voir que l'on peut disposer des conditions initiales du mouvement du point M, de façon que la trajectoire de ce point se projette sur le plan des xy suivant un cercle donné, de centre O, et de rayon R supérieur à a. — Exprimer dans ce cas les coordonnées du point M en fonction du temps. Tâcher d'interpréter cinématiquement ce mouvement.

5° En supposant toujours remplies les conditions initiales dont il s'agit au 4°, démontrer que la trajectoire du point M est une courbe algébrique si le rapport $\frac{R^2 - a^2}{R^2}$, est le carré d'un nombre rationnel.

(1 juin, de 7 h. à 11 h.)

Calcul.

Soit
$$\omega = \frac{2\pi}{11} = \frac{400^G}{11}.$$

1° Calculer les valeurs numériques de chacune des quantités : $\sin\omega$, $\sin 3\omega$, $\sin 4\omega$, $\sin 5\omega$, $\sin 9\omega$.

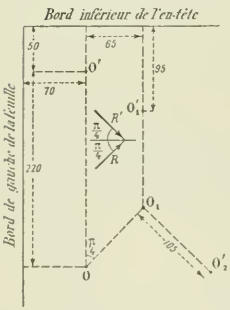
2° Calculer, en se servant des valeurs précédentes, l'expression
$$4(\sin\omega + \sin 3\omega + \sin 4\omega + \sin 5\omega + \sin 9\omega)^2.$$

N.-B. — Les calculs seront faits avec des tables centésimales à 5 décimales.

(5 juin, de 5 h. à 6 h.)

Epure.

1608. — On donne deux sphères dont l'une, de centre O, O′, a un rayon de 25^{mm}, et l'autre, de centre O_1, O'_1, a un rayon de 50^{mm} ; leur position est définie par les cotes du croquis ci-contre.



On demande :

1° de circonscrire à ces deux sphères un hyperboloïde de révolution, dont le cercle de gorge a 15^{mm} de rayon, et est situé entre les deux sphères ;

2° de représenter le solide limité par ces deux sphères et la partie de l'hyperboloïde comprise entre elles ;

3° d'ombrer ce solide, le rayon lumineux ayant la direction R, R′, indiquée au croquis.

Pour la mise en place de l'hyperboloïde, on prendra un plan vertical auxiliaire de projection, parallèle à OO_1, et sur lequel (O_1, O'_1) se projettera en O'_2.

Les candidats devront indiquer sur l'épure la construction d'un point de chacun des contours apparents de l'hyperboloïde, déterminer les asymptotes de ces contours, construire pour chaque courbe d'ombre un point et la tangente en ce point.

Les parties dans l'ombre seront couvertes de hachures ou d'une teinte plate légère d'encre de Chine. Les tangentes et asymptotes seront tracées en traits mixtes noirs, et les lignes de construction en traits pleins rouges.

(5 juin, de 7 h. à 11 h.)

Physique.

I. — Thermomètre normal à hydrogène.

II. — Électromètre à quadrants.

III. — **1609**. Un récipient fermé dont le volume est de 10 litres à la température de 50° est rempli d'un gaz, qui, à cette température, y exerce une pression de 50 atmosphères : la densité de ce gaz à zéro et sous la pression d'une atmosphère est 1,5.

1° On demande le poids de cette masse gazeuse, le gaz étant supposé *parfait*.

2° On demande la pression, si on chauffe à 100° le gaz toujours supposé parfait.

3° On demande le poids dans les mêmes conditions (c'est-à-dire 10 litres à 50°, sous la pression de 50 atmosphères) si le gaz, ayant toujours la même densité à 0°, sous la pression d'une atmosphère, n'est plus un gaz parfait, et s'il a, pour coefficient moyen de dilatation, sous la pression constante d'une atmosphère, 0,003714 entre 0° et 50°, et 0,003711 entre 0° et 100°, et enfin s'il a pour écart de la loi de Mariotte $\left(\frac{p_0 v_0}{pv} - 1\right) + 0{,}288$ à 50° et sous la pression de 50 atmosphères.

4° On chauffe ce gaz *imparfait* jusqu'à 100°; l'expérience montre que la pression devient 65,5 atmosphères: on demande quel est l'écart de la loi de Mariotte à cette température entre une atmosphère et 65,5 atmosphères.

On prendra pour coefficient de dilatation du gaz parfait, sous la pression constante d'une atmosphère, 0,00367; pour coefficient de dilatation cubique de l'enveloppe 0,00004; pour le poids du litre d'air à zéro, sous la pression d'une atmosphère 1g,293.

N. B. — Les questions telles que le 3° et le 4° pouvant en général être traitées de deux façons différentes suivant que, pour raisonner, on commence par faire varier la température ou la pression, on fera bien d'examiner tout d'abord les données expérimentales qui sont fournies, car la marche à suivre en résulte.

(3 juin, de 2 h. à 5 h.)

Chimie.

I. — Comparaison des acides fluorhydrique, chlorhydrique, bromhydrique, iodhydrique, au point de vue des modes d'obtention et des propriétés.

II. — **1610.** Un métal inconnu M donne naissance à deux chlorures différents, tous les deux anhydres, et volatils sans décomposition.

Le premier chlorure a pour composition : M = 39,66 0/0; Cl = 60,34 0/0. Il bout à 215°; sa densité de vapeur, rapportée à l'air, prise à 225°, est 12,2 : elle diminue ensuite régulièrement jusqu'à 380° où elle atteint 6,08; puis elle reste constante jusqu'à 500° : au delà, elle décroît lentement au fur et à mesure que la température s'élève.

Le second chlorure a pour composition : M = 49,65 0/0; Cl = 50,35 0/0. Il bout à 535°; sa densité de vapeur est 4,82 à 800°, et se maintient constante jusqu'à 1 200°.

L'un ou l'autre de ces chlorures, traité par l'acide sulfurique concentré et chaud, fournit un sulfate unique, qui, additionné d'une solution concentrée de sulfate d'ammonium, donne un *alun* isomorphe avec l'alun ordinaire d'ammonium $[SO^4AzH^4)^2 + (SO^4)^3Al^2 + 24H^2O]$. Les cristaux de cet alun analysés ont donné dans deux essais : 13,97 0/0 et 14,03 0/0 de métal.

On demande la valeur la plus probable du poids atomique du métal M, les formules des deux chlorures, l'explication des variations de densité de vapeur.

On connaît la densité de l'hydrogène par rapport à l'air $\Delta = 0{,}0693$, et les poids atomiques Cl = 35,5; Az = 14; O = 16; S = 32; H = 1.

(4 juin, de 2 h. à 4 h.)

QUESTION PROPOSÉE

1611. — Étant données trois droites, on considère toutes les hypocycloïdes à trois rebroussements tangentes à ces trois droites

1° Lieu du centre de ces hypocycloïdes;

2° Enveloppe de leur cercle inscrit;

3° Montrer qu'il existe un triangle fixe dont les côtés coupent sous un angle donné V toutes les hypocycloïdes considérées. Le centre du cercle circonscrit à ce triangle et son centre de gravité sont fixes, quel que soit l'angle V.

L. Bickart.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES (*Cours préparatoires.*)

Concours de 1906.

1537. — *On donne en axes rectangulaires l'équation d'une surface*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{4c^2-m^2z^2}=1, \qquad m \leqslant 1.$$

Quel est le volume compris à l'intérieur de cette surface entre les deux plans $z=0$ *et* $z=c$. *Cas où* $m=0$. *Ce volume sera évalué comme somme des volumes infiniment petits compris entre deux plans infiniment voisins parallèles à* xoy.

Un plan parallèle à xoy coupe la surface suivant une ellipse ayant pour demi-axes :

$$a\sqrt{1-\frac{z^2}{4c^2-m^2z^2}} \qquad \text{et} \qquad b\sqrt{1-\frac{z^2}{4c^2-m^2z^2}}.$$

Entre deux plans infiniment voisins de cotes z et $z+dz$, on peut confondre le volume compris dans la surface, avec le cylindre élémentaire ayant pour base l'ellipse, section de la surface par le plan de cote z et pour hauteur dz, cylindre qui a pour volume

$$\pi ab\left(1-\frac{z^2}{4c^2-m^2z^2}\right)dz.$$

Le volume cherché est donc

$$V=\pi ab\int_0^c\left(1-\frac{z^2}{4c^2-m^2z^2}\right)dz.$$

Calculons d'abord l'intégrale indéfinie

$$\int\left(1-\frac{z^2}{4c^2-m^2z^2}\right)dz=z+\frac{1}{m^2}\int\frac{-m^2z^2+4c^2}{4c^2-m^2z^2}dz-\frac{4c^2}{m^2}\int\frac{dz}{4c^2-m^2z^2}$$

$$=z+\frac{z}{m^2}-\frac{4c^2}{m^2}\int\frac{dz}{4c^2-m^2z^2}.$$

Or,

$$\int\frac{dz}{4c^2-m^2z^2}=\frac{1}{4c}\left[\int\frac{dz}{2c+mz}+\int\frac{dz}{2c-mz}\right]=\frac{1}{4cm}\mathrm{L}\frac{2c+mz}{2c-mz}+\mathrm{K}.$$

Donc

$$V=\pi ab\left\{z+\frac{z}{m^2}-\frac{c}{m^3}\mathrm{L}\frac{2c+mz}{2c-mz}\right\}_0^c=\pi abc\left(1+\frac{1}{m^2}-\frac{1}{m^3}\mathrm{L}\frac{2+m}{2-m}\right).$$

Dans le cas où $m=0$ (ellipsoïde), on a à chercher le volume

$$V=\pi ab\int_0^c\left(1-\frac{z^2}{4c^2}\right)dz.$$

D'ailleurs

$$\int\left(1-\frac{z^2}{4c^2}\right)dz=z-\frac{z^3}{12c^2}+\mathrm{K}, \qquad \int_0^c\left(1-\frac{z^2}{4c^2}\right)dz=\frac{11}{12}c$$

et par suite

$$V=\frac{11\pi abc}{12}.$$

C'est d'ailleurs le résultat qu'on trouverait en cherchant vers quelle limite tend l'expression précédente quand m tend vers 0.

G. COTTY, élève de l'École normale supérieure.

Autres solutions de MM. P. Brizard ; Cotty André, lycée de Dijon ; Émile Devoucoux ; G. Foccht, à Roanne ; H. Janois, à Nantes ; Lamotte, lycée Janson ; W. Mérigot, à Paris ; G. Pélissier, à Toulouse ; Paul Sárközy à Pannonhalma (Hongrie).

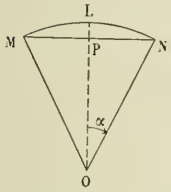
1538. — *On donne un arc de cercle* MLN, *de longueur* l *fixe, pris dans un cercle de rayon* $OM = x$ *et de centre* O.

Étudier la variation de la surface du triangle OMN *quand* x *varie.*

Représentation graphique de la variation.

Désignons par α l'angle LON, et distinguons deux cas suivant que cet angle est aigu ou obtus.

Dans le premier cas, on a pour la surface du triangle OMN



$$S_1 = \frac{1}{2}\overline{OM}^2 \sin 2\alpha$$

et dans le second $S_2 = \frac{1}{2}\overline{OM}^2 \sin 2(\pi - \alpha) = -\frac{1}{2}\overline{OM}^2 \sin 2\alpha.$

En convenant de considérer la surface comme positive dans le premier cas et comme négative dans le second ; on aura la formule applicable à tous les cas,

$$S = \frac{1}{2}\overline{OM}^2 \sin 2\alpha,$$

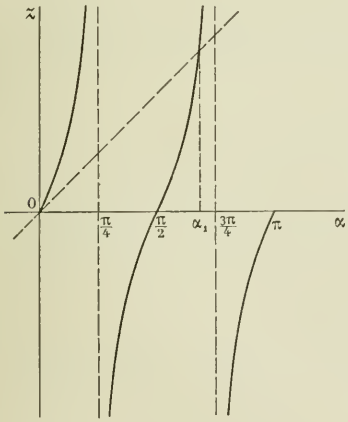
α devant varier de 0 à π.

Prenons pour variable le rayon $OM = x$, lié à l'angle α par la relation $l = 2\alpha x$, d'où $x = \frac{l}{2\alpha}$;

nous sommes ramenés à étudier la variation de la fonction $S = \frac{1}{2}x^2 \sin \frac{l}{x}$,

la variable indépendante x variant de $\frac{l}{2\pi}$ à $+\infty$.

S aura une valeur négative pour $\frac{l}{2\pi} < x < \frac{l}{\pi}$ $\left(\pi > \alpha > \frac{\pi}{2}\right)$, et une valeur positive pour $\frac{l}{\pi} < x < +\infty$ $\left(\frac{\pi}{2} > \alpha > 0\right)$.



Sa dérivée est $S' = x \sin \frac{l}{x} - \frac{l}{2} \cos \frac{l}{x}$,

et on trouve aisément que pour $x = \frac{l}{2\pi}$, $\frac{l}{\pi}$ et $+\infty$,

elle a pour valeurs $-\frac{l}{2}$, $\frac{l}{2}$, $-\frac{l}{2}$.

Pour étudier le signe de cette dérivée, nous prendrons son expression en fonction de l'angle α :

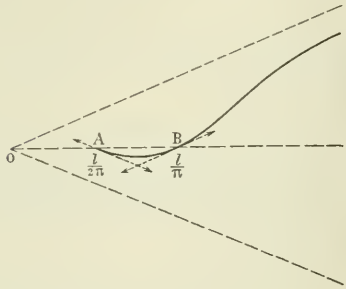
$$S' = \frac{l}{2\alpha} \sin 2\alpha - \frac{l}{2} \cos 2\alpha = \frac{l \cos 2\alpha}{2\alpha}(\operatorname{tg} 2\alpha - \alpha).$$

Tout revient à connaître le signe de la différence $\operatorname{tg} 2\alpha - \alpha$ quand α varie de 0 à π. Pour cela nous construirons les deux courbes $Z_1 = \operatorname{tg} 2\alpha$, $Z_1 = \alpha$.

Leur point de rencontre correspond à une valeur α_1 comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{4}$. La figure indique comment varie le signe de $\operatorname{tg} 2\alpha - \alpha$ et on en déduit le tableau suivant :

α	0	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$	α_1	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\cos 2\alpha$	+		—		—		+
$\operatorname{tg} 2\alpha - \alpha$	+		—	—		+	—
S'			+		0		—

Revenons à la variable x; x croissant de $\frac{l}{2\pi}$ à $\frac{l}{\pi}$, l'angle α décroît de π à $\frac{\pi}{2}$, S' est d'abord négatif, s'annule pour $x_1 = \frac{l}{2\alpha_1}$ et devient positif; S commence par décroître de 0 à un minimum négatif et croît ensuite jusqu'à 0; puis x croissant de $\frac{l}{\pi}$ à $+\infty$, α décroît de $\frac{\pi}{2}$ à 0, S' est encore positif et S croît depuis 0 jusqu'à $+\infty$.



Pour étudier la branche infinie de la courbe, on développera $\sin\frac{l}{x}$ en série:

$$S = \frac{1}{2}x^2\left(\frac{l}{x} - \frac{l^3}{6x^3} + \cdots\right).$$

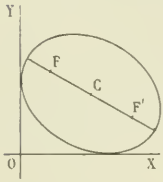
La courbe admet pour asymptote la droite $S = \frac{l}{2}x$ et se place au-dessous de cette asymptote. La tangente en A a pour coefficient angulaire $-\frac{l}{2}$; en B, elle est parallèle à l'asymptote; la courbe présentera donc un point d'inflexion entre B et le point à l'infini.

Bonne solution de M. G. Cotty, élève de l'École normale supérieure.
Autres solutions de MM. A. Cotty, lycée de Dijon; Émile Devoucoux; P. Brizard.

1539. — *Une ellipse de forme et de grandeur données dont on désignera par a et b les demi-axes se déplace dans son plan en restant tangente à deux droites rectangulaires* OX *et* OY.

On demande les lieux décrits par son centre et par ses foyers. Examiner le cas particulier où l'ellipse se transforme en parabole.

Désignant par x_0, y_0 les coordonnées du centre C, par α l'angle du grand axe de l'ellipse avec OX, on aura l'équation de l'ellipse sous la forme



$$\frac{[(x-x_0)\cos\alpha + (y-y_0)\sin\alpha]^2}{a^2} + \frac{[-(x-x_0)\sin\alpha + (y-y_0)\cos\alpha]^2}{b^2} - 1 = 0.$$

On exprimera que cette ellipse est tangente aux axes de coordonnées en écrivant qu'elle rencontre chacun d'eux en deux points confondus, ce qui donnera les conditions suivantes

$$(1) \qquad x_0^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha,$$

$$(2) \qquad y_0^2 = a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha.$$

Ajoutant membre à membre, de façon à éliminer α, et remplaçant x_0, y_0 par des coordonnées courantes, il vient

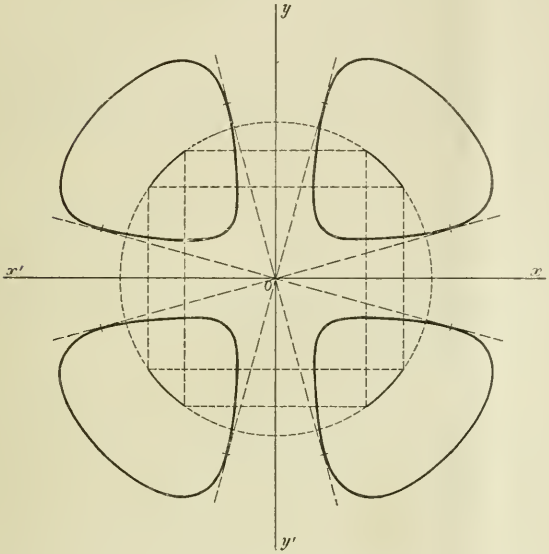
$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Le centre C se déplace donc sur un cercle ayant pour centre l'origine des coordonnées et pour rayon $\sqrt{a^2+b^2}$; résultat évident *a priori* puisque le point O appartenant au cercle orthoptique relatif à l'ellipse, sa distance au centre, OC, est égale à $\sqrt{a^2+b^2}$.

Remarquons d'ailleurs que les équations (1) et (2) ne fournissent des valeurs réelles pour $\operatorname{tg}\alpha$ que si l'on a

$(x_0^2 - a^2)(x_0^2 - b^2) < 0$, d'où $b < |x_0| < a$ et $(y_0^2 - a^2)(y_0^2 - b^2) < 0$, d'où $b < |y_0| < a$.

Le lieu se compose donc uniquement des quatre arcs de cercle pour lesquels ces inégalités sont vérifiées.



Cela posé, on aura pour coordonnées des foyers F et F'

(3) $x = x_0 \pm c \cos \alpha$,

(4) $y = y_0 \pm c \sin \alpha$,

d'où on déduira le lieu des foyers en éliminant x_0, y_0 et α entre les quatre équations (1), (2), (3) et (4).

Pour faire cette élimination, nous remplacerons dans (1) et (2), x_0 et y_0 par leurs valeurs tirées de (3) et (4), ce qui donne

$$x^2 \mp 2cx \cos \alpha = b^2,$$
$$y^2 \mp 2cy \sin \alpha = b^2.$$

Éliminons l'angle α, il vient pour l'équation du lieu

$$\left(x - \frac{b^2}{x}\right)^2 + \left(y - \frac{b^2}{y}\right)^2 = 4c^2,$$

ou

$$x^2y^2(x^2 + y^2) - 4a^2x^2y^2 + b^4(x^2 + y^2) = 0.$$

C'est l'équation d'une courbe du sixième degré symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées et présentant à l'origine un point double isolé. En transformant en coordonnées polaires, on obtient l'équation

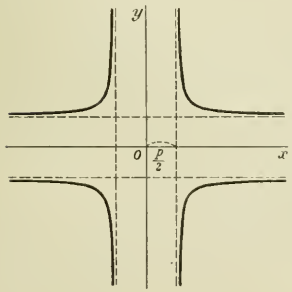
$$\rho^4 - 4a^2\rho^2 + \frac{4b^4}{\sin^2 2\omega} = 0 \quad \text{bicarrée en } \rho, \text{ et qui donne}$$

$$\rho = \pm\left[\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{\sin 2\omega}} \pm \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{\sin 2\omega}}\right].$$

La discussion de cette courbe ne présente aucune difficulté. La figure ci-contre a été construite en supposant $a = b\sqrt{2}$.

Dans le cas de la parabole, le lieu du centre est rejeté à l'infini. L'équation du lieu des foyers se réduit (en supposant que a augmente indéfiniment, $\frac{b^2}{a}$ tendant vers p), à la forme

$$x^2y^2 - \frac{p^2}{4}(x^2 + y^2) = 0$$



en coordonnées cartésiennes et $\rho^2 = \frac{p^2}{\sin^2 2\omega}$ ou mieux $\rho = \frac{p}{\sin 2\omega}$, en coordonnées polaires.

Pour obtenir directement ce résultat, nous pouvons partir de l'équation d'une parabole de paramètre p, ayant pour foyer le point x_0, y_0 et dans laquelle l'axe ferait l'angle α avec Ox. Cette équation est de la forme

$$[-(x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha]^2 = 2p[(x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha] + p^2.$$

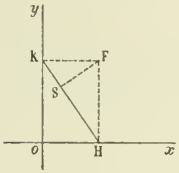
En exprimant que cette parabole est tangente aux axes, on obtient les deux conditions

$$x_0 = \frac{p}{2\cos\alpha}, \qquad y_0 = \frac{p}{2\sin\alpha}.$$

d'où l'équation du lieu

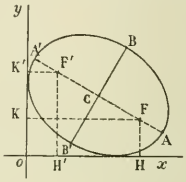
$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{4}{p^2}.$$

C'est l'équation d'une Kreuzcurve. Si F désigne le foyer d'une parabole tangente aux axes, H et K ses projections, la droite HK est la tangente à la parabole en son sommet S. Dans le triangle rectangle FHK, on a la relation



$$\frac{1}{\overline{FH}^2} + \frac{1}{\overline{FK}^2} = \frac{1}{\overline{FS}^2}. \qquad \left(FS = \frac{p}{2}\right)$$

d'où l'équation du lieu de F : $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{4}{p^2}$.



Remarque. — Si on désigne par x et y les coordonnées du foyer F, par x' et y' celles du foyer F', on a, d'après les propriétés connues de l'ellipse :

$$xx' = yy' = b^2;$$

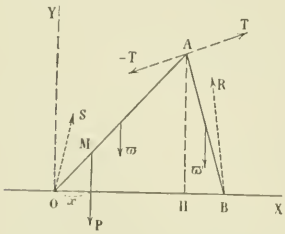
d'autre part, la distance focale FF' est égale à $2c$: $(x - x')^2 + (y - y')^2 = 4c^2$.

On en déduit l'équation du lieu des foyers $\left(x - \frac{b^2}{x}\right)^2 + \left(y - \frac{b^2}{y}\right)^2 = 4c^2$.

Bonnes solutions de MM. H. Janois, à Nantes ; M. Lamotte, lycée Janson ; G. Foucry, à Roanne.

1540. — *Un système formé par deux tiges articulées homogènes* OA *et* AB *de longueurs* l *et* l' *et de poids* ϖ *et* ϖ' *est mobile dans un plan vertical autour de son extrémité* O *qui est fixe. L'extrémité* B *de la seconde tige peut glisser avec frottement sur la droite horizontale* OX. *Une surcharge* P *étant fixée en un point* M *de la tige* OA, *on demande quelles sont les positions du point* M *qui sont compatibles avec l'équilibre du système.*

Soient S la réaction du point O sur la barre OA, T et $-$T les réactions au point A et R la réaction oblique de la droite OX sur la tige AB.



Nous désignerons par x la distance du point O à la ligne d'action de la surcharge P.

1. *Équilibre de la tige* OA. — La tige OA est en équilibre sous l'action des poids P et ϖ et des réactions S et $-$T ($-$X', $-$Y'). Sur les trois équations d'équilibre, les deux premières donneraient les composantes de S qu'il est inutile de calculer ; en prenant les moments par rapport au point O, on aura une troisième équation indépendante de S, savoir

$$(1) \qquad -P.x - \varpi.\frac{OH}{2} - OH.Y' + HA.X' = 0.$$

2. *Équilibre de la tige* AB. — La tige AB doit être en équilibre sous l'action de son poids ϖ' et des réactions R(X, Y) et T(X', Y'). Les deux équations de projections nous donnent

$$X + X' = 0, \qquad Y + Y' = \varpi'.$$

Prenons, pour simplifier les calculs, les moments par rapport au point A et nous aurons l'équation

$$\text{(2)} \qquad HB.Y + HA.X = \varpi'.\frac{HB}{2}.$$

Il nous reste à calculer les composantes X, Y de la réaction R et à exprimer qu'elle fait avec la normale un angle inférieur ou au plus égal à l'angle de frottement, ou encore que $\left|\frac{X}{Y}\right| \leqslant f$.

Remplaçant dans l'équation (1), X' et Y' par leurs valeurs $X' = -X$, $Y' = \varpi' - Y$, il vient

$$OH.Y - HA.X = Px + \varpi.\frac{OH}{2} + \varpi'.OH,$$

et ajoutant membre à membre avec l'équation (2), $OB.Y = Px + \varpi.\frac{OH}{2} + \varpi'\left(OH + \frac{HB}{2}\right)$,

d'où on déduit aisément $\qquad HA.OB.X = -HB\left[Px + (\varpi + \varpi')\frac{OH}{2}\right].$

La condition d'équilibre du système sera donc

$$\left|\frac{X}{Y}\right| = \frac{HB}{HA}.\frac{2Px + (\varpi + \varpi')OH}{2Px + \varpi.OH + \varpi'(2OH + HB)} \leqslant f,$$

ou encore

$$HB[2Px + (\varpi + \varpi')OH] \leqslant f.HA[2Px + (\varpi + \varpi').OH + \varpi'OB].$$

Remarquons d'abord que cette condition est remplie d'elle-même et quel que soit x, si

$$HB \leqslant f.HA;$$

c'est le cas où la tige AB ferait avec la verticale un angle inférieur ou au plus égal à l'angle de frottement; sinon il faudra que l'on ait

$$2Px + (\varpi + \varpi')OH \leqslant f\frac{\varpi'.HA.OB}{HB - f.HA} \qquad \text{ou} \qquad x \leqslant f\frac{\varpi'}{2P}.\frac{HA.OB}{HB - f.HA} - \frac{\varpi + \varpi'}{2P}.OH.$$

Or x est essentiellement positif et de plus inférieur à OH (si l'on suppose du moins la tige OA limitée au point A). La limite trouvée pour x ne sera positive que si

$$f > \frac{HB}{HA}.\frac{(\varpi + \varpi')OH}{(\varpi + \varpi')OH + \varpi'.OB} = \frac{\frac{HB}{HA}}{1 + \frac{\varpi'.OB}{(\varpi + \varpi')OH}}$$

Elle sera $\lesseqgtr$ OH, suivant que $f \lesseqgtr \frac{HB}{HA}\frac{(2P + \varpi + \varpi')OH}{(2P + \varpi + \varpi')OH + \varpi'.OB} = \frac{\frac{HB}{HA}}{1 + \frac{\varpi'.OB}{(2P + \varpi + \varpi')OH}}.$

En résumé, si $\qquad f > \frac{\frac{HB}{HA}}{1 + \frac{\varpi'.OB}{(2P + \varpi + \varpi')OH}},$

l'équilibre aura lieu pour toute position du point M entre O et A.

Si $\qquad \frac{\frac{HB}{HA}}{1 + \frac{\varpi'.OB}{(\varpi + \varpi')OH}} < f < \frac{\frac{HB}{HA}}{1 + \frac{\varpi'.OB}{(2P + \varpi + \varpi')OH}},$

l'équilibre n'aura lieu que si x est inférieur ou au plus égal à la limite trouvée plus haut.

Enfin si
$$f < \frac{\dfrac{HB}{HA}}{1 + \dfrac{\varpi'.OB}{(\varpi + \varpi')OH}},$$
l'équilibre est impossible quelle que soit la position du point M sur la tige OA.

Examinons le cas particulier où les deux tiges auraient même longueur et même poids
$$\left(\varpi = \varpi' \qquad \text{et} \qquad OH = HB = \frac{OB}{2}\right).$$

En désignant par α l'angle HAB, on aura les résultats suivants :

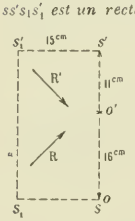
Si $f > \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + \dfrac{\varpi}{P + \varpi}}$ l'équilibre aura lieu quelle que soit la position du point M entre O et A ;

Si $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + \dfrac{\varpi}{P + \varpi}} > f > \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$, l'équilibre n'aura lieu que si $x \leqslant \dfrac{\varpi}{P} \cdot OH \dfrac{2f\cos\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha - f\cos\alpha}$;

Enfin si $f < \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$ l'équilibre n'aura lieu pour aucune position du point M.

P. L.

1541. — *Étant donnés les points* (s, s'), (s_1, s'_1) *et* (o, o') *définis par le croquis ci-joint (sur lequel la figure* $ss's_1s'_1$ *est un rectangle), on demande de représenter la partie du solide commun aux deux cônes de sommets* (s, s') *et* $(s_1\, s'_1)$ *circonscrits à la sphère de centre* (o, o') *et de rayon égal à* 4^{cm}, *qui est limitée inférieurement au plan tangent horizontal inférieur à cette sphère.*



On construira, en outre, l'ombre propre de ce solide supposé opaque et éclairé par des rayons parallèles à (R, R') *dont les projections sont à 45° sur la direction des lignes de rappel.*

Nota. — *Le contour apparent et les arêtes du solide conservé seront dessinés en noir (avec les parties cachées en pointillé), la séparatrice de l'ombre en bleu (avec aussi les parties cachées en pointillé) ; tout le reste en rouge. On couvrira d'une teinte légère ou de hachures les parties vues dans l'ombre.*

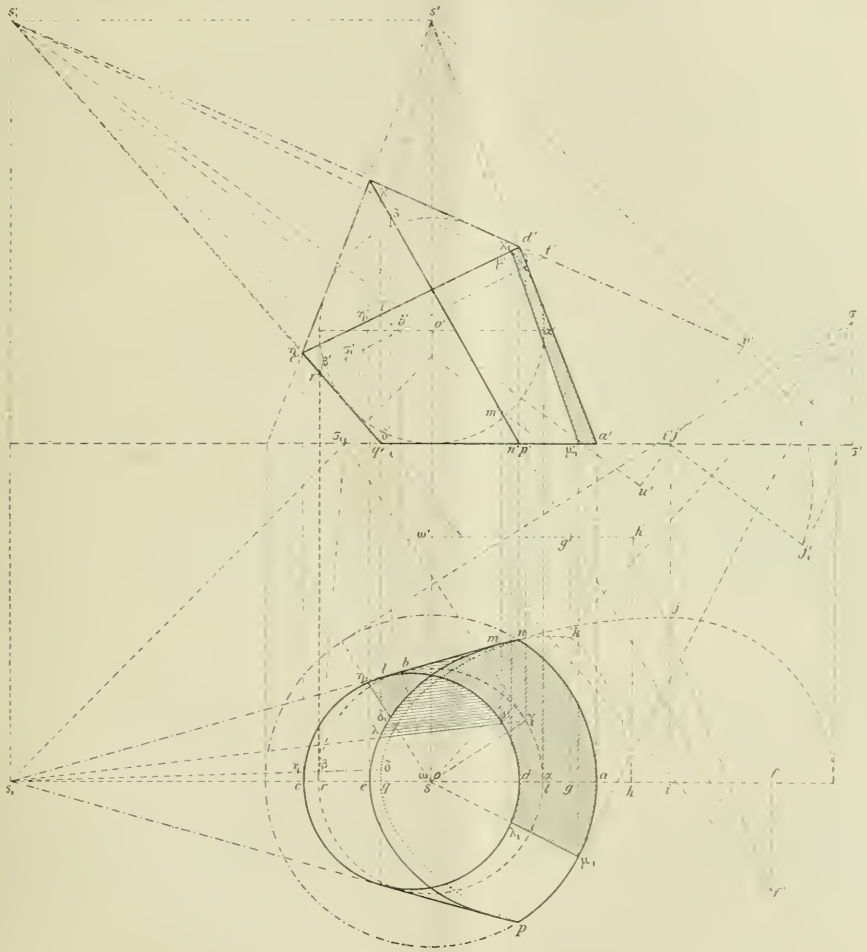
Contours apparents des deux cônes. — Il suffit de mener par les projections verticales s' et s'_1 des deux sommets les tangentes au contour apparent vertical de la sphère donnée o' pour obtenir le contour apparent vertical de chaque cône. Le cône S ayant son axe vertical n'a pas de contour apparent horizontal, mais sa surface sera limitée par sa trace sur le plan horizontal inférieur tangent à la sphère, plan que nous prendrons pour plan horizontal de projection ; cette trace est le cercle de rayon oa. Le cône S_1 a pour contour apparent horizontal les tangentes menées de s_1 au contour apparent horizontal de la sphère donnée.

Sa surface est limitée par sa section horizontale située dans le plan de projection. Nous avons un sommet de cette section, qui est ici une ellipse, au point q', q et nous avons le centre en projection verticale au milieu i' du segment intercepté sur la ligne de terre par les deux génératrices de contour apparent vertical. Le petit axe de l'ellipse est la corde de bout du cercle section droite $u'v'$ menée par le point i' et dont la moitié est rabattue en $i'j'_1$, ce qui détermine le sommet j du petit axe et par suite permet de tracer l'ellipse qnj.

Les génératrices de contour apparent vertical sont pour chaque cône dans le plan de front de leurs axes, qui contient le centre de la sphère, et par suite ont pour projections horizontales la droite s_1o ; les génératrices de contour apparent horizontal du cône S_1 ont pour projections verticales les droites joignant s'_1 aux projections verticales des points de contacts tel que b de chaque génératrice avec le cercle équateur de la sphère. Ces deux génératrices sont ici dans un plan de bout et ont même projection verticale s'_1b'.

Intersection. — Les deux cônes étant circonscrits à la même sphère, se coupent suivant des courbes planes dont les plans sont perpendiculaires au plan des axes, ce sont donc des plans de bout ; leurs traces passent par les points d'intersection des génératrices situées dans le plan méridien des deux cônes et les deux courbes sont des ellipses ayant pour projections verticales les droites $c'd'$ et $e'f'$. Les deux cônes admettant pour plan de symétrie commun le plan de front des axes, ces ellipses ont un axe de symétrie dans ce plan ; l'autre lui étant

perpendiculaire est une droite de bout se projetant horizontalement en vraie grandeur, et donnant l'un des axes de la projection horizontale ; le second est donc la projection horizontale du premier, soit cd pour l'une des



Échelle : $\frac{1}{2}$.

ellipses et ef pour l'autre. Pour avoir la longueur de l'axe de bout il suffit de mener par le milieu de l'autre axe, g, g' par exemple dans la seconde ellipse, la droite de bout qui perce le cône aux deux sommets de l'ellipse. On obtient ces points en menant la section droite du cône vertical par le point g, g', ce qui donne le cercle $\omega'h'$, ωh, dont l'axe cherché est la corde de bout passant par le point g. On a donc en k l'un des sommets de l'ellipse ef, qui est ainsi complètement déterminée.

On répète la même construction pour la seconde section, ce qui donne la seconde ellipse.

Il y a intérêt à déterminer directement les points où chaque ellipse touche le contour apparent horizontal du cône S_1 : ce sont évidemment les points où les génératrices du contour apparent horizontal traversent le plan de chaque section. On les a immédiatement en projection verticale l' et m', d'où les points l et m et leurs symétriques par rapport à s_1o.

Solide commun. — Le solide commun est limité par la portion de surface de chaque cône située dans celui des dièdres formés par les plans sécants qui ne contient pas son sommet et par le plan horizontal de projection ; chaque ellipse forme une sorte d'arête qui sépare la surface de l'un des cônes de la surface de l'autre ; l'ellipse CD est entièrement conservée, mais l'autre est entamée par le plan horizontal, qui la coupe suivant la corde pn qui sépare les faces planes du solide appartenant à chacun des cônes. Cette corde limite en même temps l'arc de cercle nap et l'arc d'ellipse caché nqp qui forment deux autres arêtes du solide commun. L'arc d'ellipse $nmep$ est entièrement vu en projection horizontale, parce qu'on doit seulement conserver la portion de génératrice lm et sa symétrique par rapport à s_1o ; l'autre ellipse cd est entièrement vue.

Il n'y a pas lieu de tracer la corde pn qui sépare les deux sections de chaque cône par le plan horizontal, parce qu'on n'indique pas que les cônes soient de substances différentes.

Ombre propre du solide commun. — Nous l'obtiendrons en cherchant sur chaque cône les deux génératrices d'ombre propre et en ne conservant que la portion qui appartient au solide commun. Il est bien évident en effet que la portion du cône S, par exemple, qui fait partie du solide commun ne peut porter d'ombre sur la surface de l'autre cône S_1, puisque cette surface S_1 est intérieure au cône S et par suite ne peut être entamée par aucun des plans tangents au cône S qui donneraient l'ombre portée.

Menons donc par le sommet de chaque cône une parallèle à la direction des rayons lumineux, et, par la trace de cette droite sur le plan de base correspondant, menons les tangentes à cette base ; elles donneront les deux génératrices de contact qui séparent la partie éclairée de la surface qui est dans l'ombre. Pour le cône S nous avons pris la base horizontale, et pour le cône S_1 nous avons pris comme base la section $r't'$ commune au cône et au cylindre vertical circonscrit à la sphère, parce qu'elle se projette horizontalement suivant le cercle ot. La trace du rayon lumineux issu de S_1 sur ce plan est τ'_1, σ_1, d'où les génératrices $s_1\beta$ et $s_1\gamma$, qu'il suffit de projeter verticalement en $s'_1\beta'$ et $s'_1\gamma'$. On n'en doit conserver que les segments $\tau_1\delta$, $\tau'\delta'$ et $\lambda\mu$, $\lambda'\mu'$.

Sur le cône vertical on ne conservera de même que les portions $\tau_1\delta_1$ et $\lambda_1\mu_1$.

Les génératrices de contour apparent séparant sur chaque surface la partie vue de la partie cachée en projection, la distinction des parties vues et cachées de l'ombre propre n'offre aucune difficulté.

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE (*Concours de 1906, suite.*)

1565. — *On fait détoner dans un appareil résistant, de volume intérieur égal à* 21 *litres et plongé dans une enceinte à température constante et à* 0°, *un mélange d'oxygène, d'hydrogène et de méthane dont la pression est de* 4kg,200 *avant l'explosion. On suppose que les gaz suivent rigoureusement les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, et qu'en fin d'explosion, il ne reste que de l'acide carbonique et de la vapeur d'eau.*

Déterminer :

1° *Les quantités des trois gaz entrant en réaction, sachant qu'il y a* 3 *fois plus d'oxygène que d'hydrogène en volume dans le mélange ;*

2° *La pression finale à l'intérieur de l'appareil quand la température intérieure est redevenue* 0°, *en admettant qu'à cette température la tension de la vapeur de la glace est nulle, qu'elle n'a dissous aucun gaz et que sa densité est* 0,900 *à cette température.*

On fait ensuite passer dans un tube à ponce sulfurique l'acide carbonique provenant de la réaction précédente et les gaz provenant de la décomposition, par de l'acide sulfurique concentré, de 252 *grammes*

d'acide oxalique pur à deux molécules d'eau. Après passage dans ce tube, les gaz sont reçus dans un ballon de 27 litres de capacité intérieure à la température de 27° et maintenus à cette température. On ajoute dans ce ballon de la potasse caustique en quantité suffisante pour absorber tout ce qui est absorbable et on fait passer le résidu final sur du chlorure cuivreux ammoniacal.

Déterminer l'augmentation de poids des tubes à ponce et à chlorure cuivreux et la pression à 27° des gaz dans le ballon avant et après addition à cette température de la potasse caustique, le volume de cette potasse en morceaux ajoutée est de 300^{cm^3}. *Elle est supposée ne pas varier de volume du fait de l'absorption.*

On s'appuiera sur la propriété qu'une molécule de gaz occupe $22^l,32$ *à* 0° *sous* 760^{mm} *de pression.* $C = 12$, $O = 16$, $H = 1$; *densité du mercure à* $0^\circ = 13,6$.

1° Les réactions produites sont représentées respectivement par les équations

$$H^2 + O = H^2O, \qquad CH^4 + 2O^2 = CO^2 + 2H^2O.$$

Représentons par n le nombre des molécules d'hydrogène contenues dans le mélange ; le nombre des molécules d'oxygène sera $3n$ et comme la combustion de l'hydrogène en a consommé $\frac{n}{2}$, il y en a eu $\frac{5}{2}n$ de consommées par la combustion du méthane. Le nombre des molécules de ce dernier gaz est donc $\frac{5}{4}n$. Les volumes des trois gaz : oxygène, hydrogène et méthane sont par suite entre eux comme 3. 1, $\frac{5}{4}$ ou 12. 4, 5. Or remarquons que $12 + 4 + 5 = 21$; on peut donc dire que l'appareil contient avant l'explosion 12 litres d'oxygène, 4 d'hydrogène et 5 de méthane sous la pression commune de $4^{kg},200$.

Sous la pression atmosphérique de $1^{kg},0336$, une molécule ou 32^g d'oxygène occupe le volume $22^l,32$. Le poids de l'oxygène est donc

$$32 \times \frac{12}{22,32} \times \frac{4200}{1033,6} = 69^g,91.$$

On trouve de même pour le poids de l'hydrogène $1^g,456$ et pour celui du méthane $14^g,56$.

2° D'après les poids d'hydrogène et de méthane brûlés, le poids de l'eau produite est

$$\frac{18}{2} \times 1,456 + \frac{36}{16} \times 14,56 = 45^g,864.$$

Son volume à l'état de glace est

$$\frac{45,864}{0,9} = 50,97 \quad \text{ou sensiblement} \quad 51^{cm^3}.$$

D'autre part, le volume de l'acide carbonique produit, égal, dans les mêmes conditions, à celui du méthane, serait de 5 litres sous la pression de $4^{kg},200$. Le volume étant $21 - 0,051 = 20,949$, la pression sera

$$4,200 \times \frac{5}{20,949} = 1^{kg},0025,$$

ce qui équivaut à une hauteur de mercure de $737^{mm},1$.

3° La décomposition de l'acide oxalique en présence de l'acide sulfurique est représentée par l'équation

$$C^2O^4H^2, 2H^2O = CO + CO^2 + 3H^2O,$$

qui montre qu'avec 252^g d'acide oxalique on a 56^g d'oxyde de carbone et 88^g d'acide carbonique.

L'augmentation de poids des tubes à ponce doit être à peu près nulle, l'eau ayant été retenue, dans l'appareil producteur, par l'acide sulfurique.

Le chlorure cuivreux ammoniacal absorbant l'oxyde de carbone, l'augmentation de poids des tubes à chlorure est de 56^g.

Le gaz carbonique provenant de la combustion de $14^g,56$ de méthane pèse $14,56 \times \frac{44}{16} = 40,04$. Nous avons donc maintenant un mélange de $40,04 + 88 = 128^g,04$ de gaz carbonique et de 56^g d'oxyde de carbone. Son volume sous la pression atmosphérique et à 0° serait

$$\left(\frac{128,04}{44} + \frac{56}{28}\right) \times 22,32 = 109^l,59.$$

En appliquant à ce mélange la loi de Mariotte, on trouve que sa pression x, à 27° et dans le ballon de 27 litres est

$$x = 760 \times \frac{109,59}{27} \times \left(1 + \frac{27}{273}\right) = 3389^{mm} \quad \text{ou} \quad 4^{atm},46.$$

Enfin si nous ajoutons 300^{cm3} de potasse, elle absorbe le gaz carbonique et il ne reste plus que 56^g, c'est-à-dire 2 molécules d'oxyde de carbone dans un volume de $26^l,7$. La pression devient

$$y = 760 \times \frac{2 \times 22,32}{26,7}\left(1 + \frac{27}{273}\right) = 1396^{mm} \quad \text{ou} \quad 1^{atm},837.$$

LÉON FROMENT.

QUESTIONS PROPOSÉES

1612. — Calculer

$$\int_0^{\pi} \frac{3x^4 dx}{(1+x^3)^3}.$$

P. TRIBIER

1613. — Construire la courbe

$$y \operatorname{tg} x - x = 0,$$

et montrer que les points d'inflexion de cette courbe sont en ligne droite. Montrer, en outre, que les tangentes en ces points sont tangentes à une parabole.

P. TRIBIER.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

17e Année. N° 11. Août 1907

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES FAISCEAUX TANGENTIELS D'ÉPICYCLOIDES,

par M. **L. Bickart**.

Soit n un nombre donné. La droite D,

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = \mathrm{R}\cos n\varphi,$$

enveloppe, lorsque φ varie, une épicycloïde (E) *d'espèce* n.

Le cercle de centre O et de rayon R est tangent à la courbe en tous les points communs avec elle. Nous l'appellerons le cercle inscrit. Le cercle de centre O et de rayon $n\mathrm{R}$ contient tous les points de rebroussement de la courbe. Nous l'appellerons cercle des rebroussements. Enfin nous désignerons par centre de l'épicycloïde le centre commun de ces deux cercles.

Le but de cette note est d'établir quelques propriétés des familles d'épicycloïdes d'espèce n qui touchent trois droites données, ou, d'une façon plus générale, qui coupent trois droites données sous des angles donnés.

Ces propriétés peuvent s'énoncer sans aucune ambigüité lorsque n est un nombre entier impair, et c'est dans cette hypothèse que nous les établirons, quitte à rendre ensuite à n toute sa généralité et à modifier nos énoncés en conséquence.

Pour justifier cette restriction, nous étudierons d'abord le problème suivant :

Problème. — *Exprimer que l'épicycloïde touche une droite donnée* $x\cos\alpha + y\sin\alpha = a$.

Autrement dit, étant donnés le centre et n, déterminer φ et R par les conditions d'identification

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha} = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha} = \frac{\mathrm{R}\cos n\varphi}{a}.$$

Nous allons remplacer les coordonnées ordinaires par les coordonnées imaginaires

$$\xi = x + iy, \qquad \eta = x - iy,$$

qui se prêtent mieux à la discussion du problème.

Dans ce système de coordonnées, l'équation de la droite D est $\xi e^{-i\varphi} + \eta e^{i\varphi} = \mathrm{R}(e^{ni\varphi} + e^{-ni\varphi})$.

Supposons d'abord n *commensurable*, et soit $n = \dfrac{p}{q}$,

p et q étant deux nombres entiers premiers entre eux.

Posons $t = e^{\frac{i\varphi}{q}}$; l'équation de D devient $\xi t^{-q} + \eta t^{q} = \mathrm{R}(t^{p} + t^{-p})$.

Ceci dit, deux cas se présentent :

1er cas. *p et q sont tous deux des nombres impairs.*

Nous pouvons donc poser $p = 2p' + 1, \qquad q = 2q' + 1$;

l'équation de D, mise sous la forme $\xi + \eta t^{2q} = \mathrm{R}(t^{2+p} + t^{2-p})$,

devient alors $\xi + \eta t_{2q} = \mathrm{R}(t^{2p'+q'+1} + t^{2q'-p'})$,

on, en posant $t^2 = u, \qquad \xi + \eta u^q = \mathrm{R}(u^{p'+q'+1} + u^{q'-p'})$.

Nous avons encore deux cas à distinguer :

Si $p<q$, les exposants de u dans notre équation sont tous entiers et positifs; le plus grand d'entre eux est q. Nous en déduisons que :

La classe de la courbe est égale à q. Il existe q tangentes à la courbe parallèles à une droite donnée ; on exprimera que la courbe touche une droite donnée, $\xi + \theta\eta = \rho$, par les équations

$$u^q = \theta, \qquad \mathrm{R}(u^{p'+q'+1} + u^{q'-p'}) = \rho\,;$$

la première de ces équations est de degré q en u ; elle admet q racines à chacune desquelles correspond, d'après la seconde, une valeur de R. Le probleme a donc q solutions.

Si $p>q$, nous mettrons l'équation de D sous forme entière en l'écrivant $\xi u^{p-q} + \eta_1 u^{p+q+1} = R(u^p + 1)$: nous déduisons de là que la classe de la courbe est le plus grand des exposants de u dans cette équation, c'est-à-dire p. Les autres conclusions formulées plus haut subsistent sans modification.

2e cas. *p et q sont de parités différentes.*

L'équation étant écrite sous la forme

$$\xi + \eta_1 t^{2q} = R(t^{q+p} + t^{q-p}),$$

nous voyons que la courbe admet $2q$ tangentes parallèles à une direction donnée. Le problème que nous nous posons admet $2q$ solutions.

Si $p<q$, tous les exposants de l'équation sont positifs. Le plus grand est $2q$. Donc la courbe est de classe $2q$.

Si $p>q$, mettons l'équation sous la forme $\xi u^{p-q} + \eta_1 t^{p+q} = R(t^{2p} + 1)$; nous en déduisons que la classe de la courbe est égale à $2p$.

En résumé :

Si p et q sont impairs, la courbe admet q tangentes parallèles à une droite donnée ; sa classe est égale au plus grand des deux nombres p et q, et il y a q façons d'exprimer qu'elle touche une droite donnée.

Si l'un des deux nombres p ou q est pair, la courbe admet $2q$ tangentes parallèles à une droite donnée ; sa classe est égale au plus grand des deux nombres $2p$ et $2q$ et il y a $2q$ façons d'exprimer qu'elle touche une droite donnée.

Nous pouvons ajouter que *dans le premier cas le degré de la courbe est égal à* $(p+q)$ et que *dans le deuxième cas il est égal à* $2(p+q)$.

Si n est incommensurable, la courbe devient transcendante et le problème posé admet une infinité de solutions.

Le cas le plus simple pour notre problème est donc celui où, n étant commensurable, les deux nombres p et q sont tous deux impairs, q ayant la plus petite valeur possible, c'est-à-dire étant égal à 1.

Dans ces conditions, n devient un nombre entier impair, et il n'y a qu'une façon d'exprimer que la courbe touche une droite donnée.

Dans l'étude que nous nous proposons, nous sommes donc certains d'obtenir les résultats avec leur maximum de simplicité en supposant n entier et impair, d'où la justification annoncée plus haut.

Avant d'aller plus loin, nous chercherons quel est le nombre des tangentes communes à deux épicycloïdes semblables d'espèce n, dans le cas où n est entier et impair.

Nous verrons plus bas que si l'on appelle ξ_0, η_0 les coordonnées du centre de la courbe, jusqu'ici supposé à l'origine, et λ, μ deux constantes, l'équation générale des tangentes à une épicycloïde d'espèce n est

$$\xi e^{-it} + \eta_1 e^{it} = \xi_0 e^{-it} + \eta_1 e^{+it} + \lambda e^{nit} + \mu e^{-nit},$$

d'où, si l'on suppose $n = 2m+1$ et en posant $u = e^{2it}$,

$$\xi + u\eta_1 = \xi_0 + u\eta_{1,0} + \frac{\lambda u^n + \mu}{u^m};$$

l'équation générale des tangentes à une autre épicycloïde de même espèce, c'est-à-dire semblable, sera de même de la forme

$$\xi + v\eta_1 = \xi_0' + v\eta_{1,0} + \frac{\lambda' v^n + \mu'}{v^m};$$

nous obtiendrons les tangentes communes en identifiant les deux équations, d'où nous déduisons d'abord

$$u = v, \qquad \text{puis} \qquad [\xi_0' - \xi_0 + u(\eta_0' - \eta_0)]u^m + (\lambda' - \lambda)u^n + \mu' - \mu = 0,$$

équation de degré n.

Donc les deux courbes admettent n tangentes communes à distance finie.

Nous verrons plus loin que quatre tangentes déterminent complètement l'épicycloïde. Trois tangentes laissent à l'épicycloïde un degré de liberté. Deux épicycloïdes tangentes à trois droites données admettent en outre $(n-3)$ tangentes communes, d'après ce qui précède. C'est la relation entre ces $(n-3)$ droites et les trois premières que nous déterminerons, ainsi que les variations de l'épicycloïde assujettie à toucher ces trois premières droites.

Nous rappelons enfin, en entrant dans notre sujet, que, jusqu'à nouvel ordre, n désignera un nombre entier impair.

Théorème. — *Si une épicycloïde d'espèce n coupe sous des angles donnés trois droites données, son centre décrit une droite, et son cercle inscrit reste bitangent à une conique fixe.*

Cherchons d'abord l'équation générale des droites qui coupent sous un angle donné V la courbe (E) enveloppe des droites D,

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = R\cos n\varphi\,;$$

le point de contact de la droite D avec son enveloppe est donné par les équations

$$x'\cos\varphi + y'\sin\varphi = R\cos n\varphi, \qquad -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi = -nR\sin n\varphi\,;$$

l'équation de la droite qui fait en ce point l'angle V avec D est

$$x\cos(\varphi + V) + y\sin(\varphi + V) = x'\cos(\varphi + V) + y'\sin(\varphi + V)$$
$$= (x'\cos\varphi + y'\sin\varphi)\cos V + (-x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)\sin V = R(\cos V\cos n\varphi - n\sin V\sin n\varphi)\,;$$

l'enveloppe de la droite ainsi obtenue est une certaine courbe, qui d'ailleurs est aussi une épicycloïde d'espèce n. Cherchons l'équation générale des tangentes aux courbes semblables. A cet effet, faisons tourner la dernière droite obtenue d'un angle φ_0 autour de l'origine. Son équation devient

$$x\cos(\varphi + V + \varphi_0) + y\sin(\varphi + V + \varphi_0) = R(\cos V\cos n\varphi - n\sin V\sin n\varphi).$$

Posons $\qquad \varphi + V + \varphi_0 = t, \qquad n(V + \varphi_0) = \theta\,;$

l'équation devient $\qquad x\cos t + y\sin t = R[\cos V\cos(nt - \theta) - n\sin V\sin(nt - \theta)].$

Posons $\qquad R\cos\theta = p, \qquad R\sin\theta = q, \qquad p - qi = \lambda, \qquad p + qi = \mu\,;$

l'équation peut se mettre sous la forme

$$x\cos t + y\sin t = \frac{\lambda}{2}(\cos V + ni\sin V)e^{nit} + \frac{\mu}{2}(\cos V - ni\sin V)e^{-nit}.$$

Posons

$$(V)\quad \begin{cases} \cos V + ni\sin V = 2H, \\ \cos V - ni\sin V = 2K. \end{cases}$$

et supposons enfin le centre de la courbe transporté en un point quelconque x_0, y_0. L'équation devient

$$x\cos t + y\sin t = x_0\cos t + y_0\sin t + \lambda He^{nit} + \mu Ke^{-nit}. \qquad (1)$$

La droite ainsi obtenue coupe constamment sous l'angle V une épicycloïde d'espèce n, de centre x_0, y_0, et de rayon $\sqrt{\lambda\mu}$, l'angle V étant donné par les équations (V).

Il nous est facile à présent, d'établir la proposition énoncée. Soient

$$X = x\cos\alpha + y\sin\alpha - a = 0,$$
$$Y = x\cos\beta + y\sin\beta - b = 0,$$
$$Z = x\cos\gamma + y\sin\gamma - c = 0$$

les équations des trois droites données, coupées respectivement par l'épicycloïde (E) sous des angles donnés V_1, V_2, V_3.

Si la droite $\qquad x\cos\varphi + y\sin\varphi - r = 0$

doit être coupée par la courbe sous l'angle V, on exprimera cette condition en faisant dans l'équation (1) $t = \varphi$ et en égalant le deuxième membre à r, d'où

$$x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi - r + \lambda He^{ni\varphi} + \mu Ke^{-ni\varphi} = 0\,;$$

les conditions données s'expriment donc par les équations

$$(\Gamma)\quad \begin{cases} X_0 + \lambda H_1e^{ni\alpha} + \mu K_1e^{-ni\alpha} = 0, \\ Y_0 + \lambda H_2e^{ni\beta} + \mu K_2e^{-ni\beta} = 0, \\ Z_0 + \lambda H_3e^{ni\gamma} + \mu K_3e^{-ni\gamma} = 0\,; \end{cases}$$

le lieu du centre se déduit de là par élimination de λ, μ ; ce lieu a pour équation

$$\begin{vmatrix} X_0 & H_1e^{ni\alpha} & K_1e^{-ni\alpha} \\ Y_0 & H_2e^{ni\beta} & K_2e^{-ni\beta} \\ Z_0 & H_3e^{ni\gamma} & K_3e^{-ni\gamma} \end{vmatrix} = 0,$$

équation d'une droite.

Le cercle inscrit a pour équation $\qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \lambda\mu.$

Les équations précédentes montrent que l'on peut exprimer linéairement λ, μ, x_0, y_0 en fonction d'un même paramètre. Or imaginons que par un changement d'axes nous prenions pour axe des x la droite lieu du centre x_0, y_0. Alors $y_0 = 0$, et λ et μ pourront s'exprimer linéairement en fonction de x_0. L'équation du cercle

$$x - x_0)^2 + y^2 = \lambda\mu \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 - 2x_0x + (x_0^2 - \lambda\mu) = 0$$

prendra la forme

$$x^2 + y^2 - 2x_0x + Ax_0^2 + 2Bx_0 + C = 0,$$

A, B, C étant des constantes.

Cette équation étant ordonnée devient $\quad Ax_0^2 - 2(x - B)x_0 + x^2 + y^2 + C = 0,$

d'où l'on voit que l'enveloppe du cercle est la courbe $\quad A(x^2 + y^2 + C) = (x - B)^2,$

c'est-à-dire une conique d'axe $y = 0$.

Comme le cercle a son centre sur cet axe, il reste constamment bitangent à la conique.

Notre proposition est donc démontrée.

Nous allons à présent établir la suivante :

Si les trois angles donnés sont égaux à un même angle V, la droite lieu du centre reste fixe quel que soit cet angle, et la conique enveloppe du cercle reste homofocale à une conique tangente aux trois droites données.

Si les trois angles sont égaux : $V_1 = V_2 = V_3 = V$, les équations conditionnelles deviennent

$$\begin{cases} X_0 + \lambda He^{ni\alpha} + \mu Ke^{-ni\alpha} = 0, \\ Y_0 + \lambda He^{ni\beta} + \mu Ke^{-ni\beta} = 0, \\ Z_0 + \lambda He^{ni\gamma} + \mu Ke^{-ni\gamma} = 0. \end{cases}$$

H et K s'éliminent en même temps que λ et μ. La droite lieu du centre est donc indépendante de l'angle V. Son équation est

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_0 & e^{ni\alpha} & e^{-ni\alpha} \\ Y_0 & e^{ni\beta} & e^{-ni\beta} \\ Z_0 & e^{ni\gamma} & e^{-ni\gamma} \end{vmatrix} = 0.$$

Le cercle inscrit reste bitangent à une conique d'axe Δ. Nous allons démontrer que cette conique est homofocale à une conique inscrite au triangle XYZ. Nous démontrerons pour cela que ses foyers sont inverses par rapport au triangle, et nous ferons la démonstration sur les foyers imaginaires. Ceux-ci sont des cercles de rayon nul. Soient (x', y'), (x'', y'') leurs coordonnées, (λ', μ') et (λ'', μ'') les valeurs correspondantes de λ et μ.

La condition $R = 0$ équivaut à $\lambda\mu = 0$. Donc, pour l'un des foyers $\lambda = 0$ et pour l'autre $\mu = 0$.

Soit donc $\mu' = 0$ et $\lambda'' = 0$. Les équations conditionnelles deviennent

$$\begin{cases} X' + \lambda' He^{ni\alpha} = 0, \\ Y' + \lambda' He^{ni\beta} = 0, \\ Z' + \lambda' He^{ni\gamma} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} X'' + \mu'' Ke^{-ni\alpha} = 0, \\ Y'' + \mu'' Ke^{-ni\beta} = 0, \\ Z'' + \mu'' Ke^{-ni\gamma} = 0, \end{cases}$$

d'où

$$X'X'' = Y'Y'' = Z'Z'' = \lambda'\mu'' HK,$$

équations qui expriment la propriété énoncée.

D'ailleurs

$$X'e^{-ni\alpha} = Y'e^{-ni\beta} = Z'e^{-ni\gamma}, \qquad X''e^{ni\alpha} = Y''e^{ni\beta} = Z''e^{ni\gamma},$$

donc lorsque l'angle V varie, les foyers restent fixes, puisque les dernières équations ne dépendent pas de V.

Nous allons vérifier par un calcul direct que *si l'angle V est nul, c'est-à-dire si l'épicycloïde touche les trois droites, la conique est inscrite au triangle.*

Les équations conditionnelles étant alors

$$(\Gamma) \qquad \begin{cases} X_0 + p\cos n\alpha + q\sin n\alpha = 0, \\ Y_0 + p\cos n\beta + q\sin n\beta = 0, \\ Z_0 + p\cos n\gamma + q\sin n\gamma = 0. \end{cases}$$

Cherchons le point d'intersection avec la droite $X = 0$ de l'enveloppe du cercle

$$(C) \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = p^2 + q^2;$$

autrement dit, cherchons un centre x_0, y_0, tel que le contact du cercle correspondant avec son enveloppe se fasse sur $X = 0$, ou encore, cherchons les valeurs correspondantes de p et q.

L'enveloppe s'obtient par l'élimination des divers paramètres entre les équations (Γ), l'équation (C) et cette dernière différentiée, ou

$$(C') \qquad x dx_0 + y dy_0 + p dp + q dq = x_0 dx_0 + y_0 dy_0,$$

équations auxquelles il faut joindre

$$(X) \qquad x\cos\alpha + y\sin\alpha - a = 0;$$

les deux dernières peuvent s'écrire

$$(x - x_0)dx_0 + (y - y_0)dy_0 = -(pdp + qdq),$$

$$(x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha = -X_0 = p\cos n\alpha + q\sin n\alpha,$$

d'ou

$$\begin{cases} x - x_0 = \dfrac{-(pdp + qdq)\sin\alpha + X_0 dy_0}{\sin\alpha\, dx_0 - \cos\alpha\, dy_0}, \\ y - y_0 = \dfrac{-X_0 dx_0 + (pdp + qdq)\cos\alpha}{\sin\alpha\, dx_0 - \cos\alpha\, dy_0}, \end{cases}$$

d'où, en portant ces valeurs dans l'équation (C) du cercle et en ordonnant par rapport à X_0,

$$(X_0)\quad (dx_0^2+dy_0^2)X_0^2-2(pdp+qdq\ dx_0\cos\alpha+dy_0\sin\alpha)^2+(pdp+qdq)^2=(p^2+q^2)(\sin\alpha dx_0-\cos\alpha dy_0)^2,$$

d'ailleurs

$$X_0=-p\cos n\alpha+q\sin n\alpha),\qquad \cos\alpha dx_0+\sin\alpha dy_0=-(\cos n\alpha dp+\sin n\alpha dq),$$

$$dx_0^2+dy_0^2=(\cos\alpha dx_0+\sin\alpha dy_0)^2+(\sin\alpha dx_0-\cos\alpha dy_0)^2=\cos n\alpha dp+\sin n\alpha dq)^2+(\sin\alpha dx_0-\cos\alpha dy_0)^2;$$

l'equation (X_0) devient alors, en tenant compte des dernières écrites et en remarquant que

$$p^2+q^2=(p\cos n\alpha+q\sin n\alpha)^2+(p\sin n\alpha-q\cos n\alpha)^2\times$$
$$(\cos n\alpha dp+\sin n\alpha dq)(p\cos n\alpha+q\sin n\alpha)-(pdp+qdq)^2=(p\sin n\alpha-q\cos n\alpha)^2(\sin\alpha dx_0-\cos\alpha dy_0)^2.$$

La quantité entre crochets au premier membre est identiquement égale à

$$(p\sin n\alpha-q\cos n\alpha)\sin n\alpha dp-\cos n\alpha dq).$$

Notre équation devient donc enfin

$$[(\sin n\alpha dp-\cos n\alpha dq)^2-(\sin\alpha dx_0-\cos\alpha dy_0)^2](p\sin n\alpha-q\cos n\alpha)^2=0.$$

La quantité entre crochets au premier membre n'est pas nulle. En effet, elle se décompose en deux facteurs, et l'annulation de l'un d'eux équivaudrait à une relation linéaire et homogène entre dx_0, dy_0, dp, dq.

Or il n'y a pas d'autres relations de cette forme que celles que l'on obtient en différentiant les équations conditionnelles (Γ). Donc enfin

$$(p\sin n\alpha-q\cos n\alpha)^2=0.$$

L'élimination de x_0 et y_0 entre les équations conditionnelles donne une relation linéaire entre p et q

$$\begin{vmatrix} p\cos n\alpha+q\sin n\alpha-a & \cos\alpha & \sin\alpha \\ p\cos n\beta+q\sin n\beta-b & \cos\beta & \sin\beta \\ p\cos n\gamma+q\sin n\gamma-c & \cos\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}=0.$$

Cette équation, et celle que nous venons d'obtenir,

$$(p\sin n\alpha-q\cos n\alpha)^2=0,$$

déterminent les valeurs cherchées de p et q. Ces deux systèmes de valeurs, correspondant aux deux points d'intersection de la conique enveloppe avec $X=0$, sont confondus. Donc ces deux points le sont aussi, et la conique est bien tangente à $X=0$.

Les calculs précédents vont nous permettre de trouver les coordonnées des points de contact et l'équation de la conique.

Soit x_0, y_0 le centre du cercle (C) qui correspond au point de contact x_1, y_1 de la conique avec $X=0$.

Nous pouvons poser

$$\frac{p}{\cos n\alpha}=\frac{q}{\sin n\alpha}=\rho,$$

d'où

$$\begin{cases} X_0+\rho=0, \\ Y_0+\rho\cos n(\alpha-\beta)=0, \\ Z_0+\rho\cos n(\alpha-\gamma)=0. \end{cases}$$

D'ailleurs la droite qui joint les points x_1, y_1 et x_0, y_0 est perpendiculaire à la droite

$$X=x\cos\alpha+y\sin\alpha-a=0$$

et la distance entre le centre x_0, y_0 et le contact x_1, y_1, est égale au rayon $\sqrt{p^2+q^2}=\rho$, d'où

$$\frac{x_1-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y_1-y_0}{\sin\alpha}=\rho,$$

d'où

$$X_1=0,$$
$$Y_1=x_1\cos\beta+y_1\sin\beta-b=(x_0+\rho\cos\alpha)\cos\beta+(y_0+\rho\sin\alpha)\sin\beta-b$$
$$=Y_0+\rho\cos(\alpha-\beta)=\rho[\cos(\alpha-\beta)-\cos n(\alpha-\beta)]$$

et de même

$$Z_1=\rho[\cos(\alpha-\gamma)-\cos n(\alpha-\gamma)],$$

ou bien,

$$\frac{X_1}{0}=\frac{Y_1}{\left(\dfrac{1}{\cos n(\alpha-\gamma)-\cos(\alpha-\gamma)}\right)}=\frac{Z_1}{\left(\dfrac{1}{\cos n(\alpha-\beta)-\cos(\alpha-\beta)}\right)}.$$

Or l'équation de la conique, sous forme tangentielle, et rapportée au triangle XYZ pris comme triangle de référence, est de la forme

$$Auv+Bvu+Cuv=0;$$

les coordonnées des points de contact avec les côtés sont données par

$$\frac{X_1}{0} = \frac{Y_1}{\left(\frac{1}{B}\right)} = \frac{Z_1}{\left(\frac{1}{C}\right)}, \text{ etc...}$$

d'où, par comparaison, l'équation cherchée :

$$[\cos n(\beta - \gamma) - \cos(\beta - \gamma)]vw + [\cos n(\gamma - \alpha) - \cos(\gamma - \alpha)]wu + [\cos n(\alpha - \beta) - \cos(\alpha - \beta)]uv = 0.$$

Cette équation permettra, pour chaque valeur de n, d'étudier complètement la conique. On devra tenir compte des relations

$$X = x\cos\alpha + y\sin\alpha - a, \ \ldots \text{ etc.}$$

d'où l'on déduit la relation

$$\begin{vmatrix} X + a & \cos\alpha & \sin\alpha \\ Y + b & \cos\beta & \sin\beta \\ Z + c & \cos\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix} = 0$$

et l'équation de la droite de l'infini

$$X\sin(\beta - \gamma) + Y\sin(\gamma - \alpha) + Z\sin(\alpha - \beta) = 0.$$

Avant de chercher de nouvelles propriétés, nous indiquerons comment il convient d'interpréter les équations conditionnelles

$$(\Gamma)\left\{\begin{array}{ll} X_0 + \lambda H_1 e^{ni\alpha} + \mu K_1 e^{-ni\alpha} & = 0, \\ Y_0 + \cdots & = 0, \\ Z_0 + \ldots & = 0; \end{array}\right.$$

λ et μ définissent la grandeur et l'orientation de l'épicycloïde.

Si nous posons $\lambda_1 = \lambda H_1$, $\mu_1 = \mu K_1$, la première des équations (Γ) exprime que l'épicycloïde E_1 caractérisée par λ_1 et μ_1 est tangente à la droite X.

Si nous posons de même $\lambda_2 = \lambda H_2$, $\mu_2 = \mu K_2$, la deuxième équation exprimera que l'épicycloïde (E_2) caractérisée par λ_2 et μ_2 est tangente à la droite Y.

Résultat analogue pour la droite Z.

Or $\qquad \lambda_2 = \frac{H_2}{H_1}\lambda_1, \qquad \mu_2 = \frac{K_2}{K_1}\mu_1, \qquad \lambda = Re^{-i\theta}, \qquad \mu = Re^{i\theta},$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} R_2^2 = \frac{H_2K_2}{H_1K_1}R_1^2, \\ \frac{\mu_2}{\lambda_2} = e^{2i\theta_2} = \frac{K_2H_1}{H_2K_1}\cdot\frac{\mu_1}{\lambda_1} = \frac{K_2H_1}{H_2K_1}e^{2i\theta_1}, \end{array}\right.$$

équations que l'on peut écrire sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} R_2 = m_2R_1, \\ \theta_2 = \theta_1 + \omega_2, \end{array}\right.$$

m_2 et ω_2 étant un nombre et un angle constants

Donc l'épicycloïde E_2 se déduit de E_1 par une homothétie autour du centre commun dans le rapport m_2, suivie d'une rotation de l'angle ω_2 autour du même centre.

Résultat analogue pour l'épicycloïde E_3.

Donc les trois épicycloïdes E_1, E_2, E_3, concentriques, forment une figure F qui reste constamment semblable à elle-même.

Donc si nous considérons une pareille figure, assujettie à la condition que chacune des épicycloïdes qui la composent touche une droite donnée, nous voyons que le centre commun décrira une ligne droite.

Ce résultat peut encore être généralisé.

Posons $\lambda H_1 = \lambda' H_1'$, $\mu K_1 = \mu' K_1'$.

La première des équations (Γ) exprimera qu'une certaine épicycloïde E_1' coupe à angle constant la droite X. La deuxième équation exprimera qu'une autre épicycloïde, E_2', coupe sous un autre angle constant la droite Y, et la troisième équation exprimera un résultat analogue pour Z. Les trois courbes concentriques E_1', E_2', E_3' forment encore une figure semblable à une figure donnée.

L'interprétation généralisée des équations Γ est donc la suivante :

Si trois épicycloïdes de même espèce, concentriques, forment une figure semblable à une figure donnée et si les trois courbes coupent à angles constants respectivement trois droites données, le centre commun décrit une ligne droite.

Si l'on considère comme faisant partie de la figure un cercle concentrique aux trois courbes, ce cercle restera bitangent à une conique fixe.

Nous allons également interpréter ce fait que λ et μ sont liés linéairement.

La relation linéaire déduite des équations (Γ) peut se mettre sous la forme

$$\lambda e^{-i\omega} + \mu e^{i\omega} = 2\rho,$$

ω et ρ étant des constantes ; ou $R\,e^{i(\omega-\theta)} + e^{-i(\omega-\theta)} = 2\rho$, ou $R\cos(\theta+\omega) = \rho$.

A un angle donné θ, c'est-à-dire à une orientation donnée de la figure, correspond une seule valeur de R, c'est-à-dire une seule grandeur de la figure.

A une même valeur de R, c'est-à-dire à une grandeur donnée de la figure, correspondent deux valeurs θ' et θ'' de θ, données par une équation de la forme

$$\cos(\theta+\omega) = \cos\Phi,$$

d'où

$$\theta' + \omega = \Phi, \qquad \theta'' + \omega = -\Phi, \qquad \theta' + \theta'' + 2\omega = 0,$$

ou encore

$$\frac{\theta' + \theta''}{2} = \text{c}^{\text{te}},$$

équation d'après laquelle les deux positions F′ et F″ correspondantes de la figure sont symétriques par rapport à une droite de direction fixe.

D'ailleurs le cercle mobile de rayon R reste bitangent à une conique fixe dont son centre décrit l'axe non focal. Donc à une même valeur de R correspondent deux cercles égaux C′, C″ symétriques par rapport à l'axe focal.

Donc enfin :

La figure F *dans son mouvement passe deux fois par un même état de grandeur. Les deux positions correspondantes sont symétriques par rapport à une droite fixe.*

Nous allons montrer maintenant que le cas général peut toujours se ramener à celui d'une épicycloïde tangente à trois droites.

Pour cela nous chercherons s'il est possible de déduire des équations (Γ) que la courbe touche trois droites ; ou encore nous chercherons s'il est possible de trouver des droites qui soient constamment tangentes à la courbe.

Si une droite $x\cos\varphi + y\sin\varphi - r = 0$ est tangente à la courbe, on pourra écrire

$$F = x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi - r + \frac{\lambda}{2}e^{n\varphi i} + \frac{\mu}{2}e^{-n\varphi i} = 0.$$

Il s'agit de voir si, des équations conditionnelles on peut déduire une relation de cette forme.

On peut écrire les équations (Γ) sous la forme

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - a + A_1\lambda + B_1\mu = 0,\\
\mathcal{B} &= x_0\cos\beta + y_0\sin\beta - b + A_2\lambda + B_2\mu = 0,\\
\mathcal{C} &= x_0\cos\gamma + y_0\sin\gamma - c + A_3\lambda + B_3\mu = 0.
\end{aligned}$$

Toute équation déduite de celles-là en sera une combinaison linéaire et homogène. Donc on devra pouvoir déterminer quatre nombres u, v, w, ρ tels que

$$u\mathcal{A} + v\mathcal{B} + w\mathcal{C} = \rho F,$$

d'où

$$(\Phi)\quad\left\{\begin{aligned}
&u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = \rho\cos\varphi,\\
&u\sin\alpha + v\sin\beta + w\sin\gamma = \rho\sin\varphi,\\
&A_1u + A_2v + A_3w = \frac{1}{2}\rho e^{n\varphi i},\\
&B_1u + B_2v + B_3w = \frac{1}{2}\rho e^{-n\varphi i},\\
&au + bv + cw = \rho r.
\end{aligned}\right.$$

Faisons abstraction momentanément de la dernière de ces équations ; elle donnera r quand nous aurons déterminé les valeurs de u, v, w, ρ ou des valeurs proportionnelles.

Posons

$$\left\{\begin{aligned}
&ue^{-i\alpha} + ve^{-i\beta} + we^{-i\gamma} = \Gamma,\\
&ue^{i\alpha} + ve^{i\beta} + we^{i\gamma} = V,\\
&2(B_1u + B_2v + B_3w) = \Gamma,\\
&2(A_1u + A_2v + A_3w) = V;
\end{aligned}\right.$$

les équations (Φ) deviennent

$$\left|\begin{array}{ll} U = \rho e^{-i\varphi}, & U' = \rho e^{-ni\varphi}, \\ V = \rho e^{i\varphi}, & V' = \rho e^{ni\varphi}, \end{array}\right.$$

d'où

$$\left|\begin{array}{l} U^n V' = \rho^{n+1}, \\ V^n U' = \rho^{n+1}, \\ \rho^2 = UV = U'V', \end{array}\right. \qquad \text{d'où} \qquad (\Phi') \begin{cases} U^{\frac{n-1}{2}} = U'V'^{\frac{n-1}{2}}, \\ V^{\frac{n+1}{2}} = V'U^{\frac{n-1}{2}}, \end{cases}$$

équations tangentielles de deux courbes dont les tangentes communes sont les droites cherchées.

Ainsi le problème que nous nous sommes posé admet des solutions. Essayons d'en compter le nombre.

Observons d'abord que, dans le système de coordonnées adopté, la droite de l'infini a pour coordonnées

$$U = 0, \quad V = 0.$$

En effet, une droite quelconque $\qquad uX + vY + wZ = 0 \quad$ devient

$$(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\,x + (u\sin\alpha + v\sin\beta + w\sin\gamma)\,y + \ldots = 0.$$

Elle s'éloigne à l'infini si les coefficients de x et de y s'annulent, d'où

$$u(\cos\alpha + i\sin\alpha) + \ldots = 0 \qquad \text{ou} \qquad V = 0,$$
$$v(\cos\alpha - i\sin\alpha) + \ldots = 0 \qquad \text{ou} \qquad U = 0.$$

Ceci dit, posons $\quad n = 2m + 1, \quad$ les équations (Φ') deviennent

$$\begin{cases} U^{m+1} = U'V^m, \\ V^{m+1} = V'U^m, \end{cases}$$

équations de deux courbes de classe $(m+1)$. Le nombre total de leurs tangentes communes est donc $(m+1)^2$.

Mais chacune de ces courbes est m fois tangente à la droite de l'infini, comme le montrent les équations. Donc la droite de l'infini compte pour m^2 tangentes communes et le nombre des solutions à distance finie est

$$(m+1)^2 - m^2 = 2m + 1 = n.$$

Ainsi les droites cherchées sont au nombre de n, c'est-à-dire en nombre précisément égal à celui des tangentes communes à deux épicycloïdes d'espèce n, et à la classe de ces courbes.

De plus :

Toutes ces droites sont tangentes à une même conique, en vertu de l'équation $UV = U'V'$.

Si donc l'épicycloïde (E) *varie en touchant trois droites données, elle en touchera constamment* $(n-3)$ *autres, l'ensemble des* n *droites constituant les tangentes communes à deux courbes du faisceau et ces* n *droites étant toutes tangentes à une même conique.*

Les raisonnements ci-dessus s'appliquent entièrement au cas où les droites cherchées devraient, non plus toucher la courbe, mais la couper sous un angle donné V.

Nous remarquons enfin que, d'après ce qui précède, le mouvement de la figure F peut toujours être ramené à celui d'une épicycloïde tangente à trois droites données.

Remarque. — Nous venons de voir que toutes les droites constamment tangentes à la courbe touchent une même conique. On pouvait le prévoir *a priori*. En effet, nous avons vu que le cercle inscrit à la courbe restait bitangent à une conique fixe, tangente elle-même aux trois droites données.

Inversement, toutes les droites à laquelle l'épicycloïde restera tangente devront évidemment toucher la même conique.

Nous pouvons du reste nous assurer par une vérification directe de l'identité de la conique S

$$UV = U'V'$$

avec la conique

$$\big(\cos n(\alpha - \beta) - \cos(\alpha - \beta)\big)uv + \cdots = 0.$$

Il suffit de récrire les équations de définition

$$U = e^{-i\alpha}u + e^{-i\beta}v + e^{-i\gamma}w, \qquad U' = e^{-ni\alpha}u + e^{-ni\beta}v + e^{-ni\gamma}w,$$
$$V = e^{i\alpha}u + \cdots, \qquad V' = e^{ni\alpha}u + \cdots$$

et d'effectuer les opérations, pour constater immédiatement l'identité.

(*A suivre.*)

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (*Concours de 1906.*)

1544. — 1° *On considère la courbe dont l'équation est, en coordonnées rectangulaires,*

$$(x^2+y^2)^2 - ax(x^2+y^2) - a^2y^2 = 0,$$

et on demande d'exprimer x et y en fonction rationnelle d'un paramètre, de construire la courbe et de trouver les relations qui lient les valeurs de ce paramètre correspondant à quatre points situés, soit sur un cercle ne passant pas par l'origine, soit sur une droite ne passant pas par l'origine.

2° *Soient M_1 le point où le cercle osculateur en un point M rencontre de nouveau la courbe, M_2 le point où le cercle osculateur en M_1 rencontre de nouveau la courbe, etc.; démontrer que si quatre points M sont sur une droite D, les points M_1 correspondants sont en général sur un cercle, orthogonal à un cercle fixe si D varie. Si les points M_1 sont sur une droite D_1, les points M_2 sont sur une droite D_2 et ainsi de suite; trouver la position limite des droites D, D_1, D_2 ...*

Si quatre points M sont sur un cercle C, les points M_1 correspondants sont, en général, sur un cercle C_1: démontrer que s'ils sont sur une droite il existe deux points fixes P et P' d'où l'on voit sous un angle droit les segments déterminés sur ox par les cercles C. Dans le cas général, les points M_2 sont sur un cercle C_2, etc.; quelles conditions doit remplir le cercle C pour que les points M_p soient sur une droite? Dans l'hypothèse où tous les points obtenus successivement sont sur des cercles C_1, C_2 ..., trouver vers quelle limite tendent les puissances, par rapport à ces cercles, des points de la courbe situés sur ox; en déduire la limite de ces cercles.

3° *Trouver le lieu d'un point A tel que quatre des points de contact des tangentes issues de ce point soient sur un cercle Γ; quel est le nombre des tangentes réelles menées de A?*

Démontrer que le cercle Γ est orthogonal à un cercle fixe et trouver le lieu de son centre.

1. La courbe représentée par l'équation

$$(1) \qquad (x^2+y^2)^2 - ax(x^2+y^2) - a^2y^2 = 0$$

admet comme points doubles les points cycliques et l'origine; comme elle est du quatrième degré, elle est unicursale, et pour exprimer les coordonnées d'un point de cette courbe en fonction rationnelle d'un paramètre, il suffit de la couper par un cercle, tangent à l'origine à Ox, et ayant pour équation

$$(2) \qquad t(x^2+y^2) - ay = 0.$$

Ce cercle rencontre la courbe en sept points fixes : deux points confondus en chaque point cyclique, et trois points confondus à l'origine. Il reste donc un seul point d'intersection M, et les coordonnées de ce point sont des fonctions rationnelles de t. Pour calculer ces coordonnées, nous formerons l'équation de l'ensemble des droites joignant l'origine aux points de rencontre de la courbe et du cercle; cet ensemble se compose des droites isotropes, de l'axe des x et de la droite OM, qui a pour équation

$$(3) \qquad y(1-t^2) - tx = 0,$$

et en résolvant les équations (2) et (3), nous obtenons les coordonnées du point M,

$$(4) \qquad x = -\frac{a(t^2-1)}{t^4-t^2+1}, \qquad y = \frac{at}{t^4-t^2+1};$$

ce sont les coordonnées d'un point de la courbe en fonction rationnelle du paramètre t.

Pour construire la courbe, nous discuterons ces fonctions.

En changeant t en $-t$, x ne change pas et y change de signe, donc la courbe est symétrique par rapport à Ox; c'est ce que montrait d'ailleurs l'équation (1). Pour obtenir toute la courbe il suffit de faire varier t de 0 à $+\infty$, de construire la branche de courbe correspondante et de tracer la symétrique de cette branche par rapport à Ox.

Les fonctions x et y sont continues pour toutes les valeurs de t; leurs dérivées sont

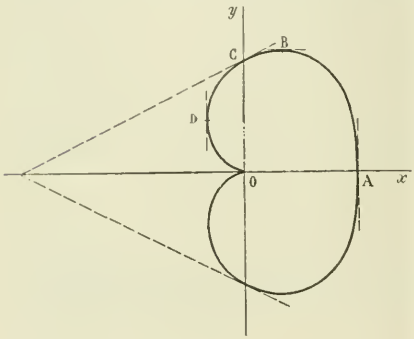
$$\frac{dx}{dt} = \frac{2at^3(t^2-2)}{(t^4-t^2+1)^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{a(3t^4-t^2-1)}{(t^4-t^2+1)^2}.$$

$\frac{dx}{dt}$ s'annule en changeant de signe pour $t = \sqrt{2}$. et $\frac{dy}{dt}$ s'annule en changeant de signe pour $t = \sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{6}}$; nous désignerons cette valeur par α.

Les variations de x et de y sont indiquées dans le tableau suivant :

t	0		α		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x	a	décroît	décroît	0	décroît		$-\frac{a}{3}$ (*min.*)	croît	0
y	0	croît	*max.* décroît		a	décroît	$\frac{a\sqrt{2}}{3}$	décroît	0

On obtient ainsi la branche de courbe ABCDO. Le coefficient angulaire de la tangente en chaque point est donné par



$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3t^4 - t^2 - 1}{2t^3(t^2 - 2)}.$$

Au point $A(a, 0)$ la tangente est parallèle à Oy ; au point $C(0, a)$ la tangente a pour coefficient angulaire $\frac{1}{2}$. Enfin, l'origine est un point de rebroussement.

Remarques I. — L'équation (1) peut s'écrire

$$\left(\frac{a^2y}{x^2+y^2}\right)^2 + a \cdot \frac{a^2x}{x^2+y^2} - a^2 = 0\,;$$

il en résulte que la courbe donnée est la transformée par inversion de la parabole

$$y^2 + ax - a^2 = 0,$$

le pôle d'inversion étant l'origine, et la puissance d'inversion étant égale à a^2.

II. — On sait que toute équation homogène par rapport à x, y, x^2+y^2, $f(x, y, x^2+y^2) = 0$ représente la podaire par rapport à l'origine de la courbe qui a pour équation tangentielle

$$f(u, v, -w) = 0.$$

On en conclut que la courbe donnée est la podaire de la conique dont l'équation tangentielle est

$$w^2 + auw - a^2v^2 = 0.$$

Cette équation représente une ellipse dont l'équation ponctuelle est

$$4x^2 + y^2 - 4ax = 0.$$

Soit $A(x^2+y^2) + Bx + Cy + 1 = 0$ l'équation d'un cercle ne passant pas par l'origine.

Remplaçons dans cette équation x et y par leurs valeurs (4), nous obtenons, en remarquant que $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{t^4 - t^2 + 1}$,

$$\frac{Aa^2}{t^4 - t^2 + 1} - \frac{Ba(t^2 - 1)}{t^4 - t^2 + 1} + \frac{Cat}{t^4 - t^2 + 1} + 1 = 0,$$

ou

$$t^4 - (Ba + 1)t^2 + Cat + Aa^2 + Ba + 1 = 0\,; \tag{5}$$

c'est l'équation qui admet pour racines les valeurs de t relatives aux points de rencontre de la courbe donnée et du cercle.

La somme des racines de cette équation est nulle ; donc, si quatre points de la courbe, correspondant aux valeurs t, t', t'', t''', sont sur un cercle, on a

$$t + t' + t'' + t''' = 0.$$

Je dis que, *réciproquement*, si on a cette relation, les points correspondants sont sur un cercle, à condition toutefois que trois d'entre eux ne soient pas en ligne droite. En effet, par les points t, t', t'' faisons passer un cercle ; celui-ci rencontre la courbe en un quatrième point correspondant à la valeur θ du paramètre. Les quatre points t, t', t'', θ étant sur un cercle, on a

$$t + t' + t'' + \theta = 0,$$

et, en comparant à la relation précédente, on voit que $\theta = t'''$.

Donc la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points de la courbe soient sur un cercle est que les valeurs du paramètre relatives à ces points vérifient la relation

$$t + t' + t'' + t''' = 0.$$

Considérons maintenant une droite ne passant pas par l'origine, $Bx + Cy + 1 = 0$; elle rencontre la courbe en quatre points dont les t sont racines de l'équation

$$(6) \qquad t^4 - (Ba + 1)t^2 + Cat + Ba + 1 = 0,$$

qui se déduit d'ailleurs de l'équation (5) en y faisant $A = 0$.

Les racines de cette équation vérifient les deux relations

$$t + t' + t'' + t''' = 0,$$

et

$$\sum \frac{1}{tt'} = -1, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{tt'} + \frac{1}{t''t'''} + \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t'}\right)\left(\frac{1}{t''} + \frac{1}{t'''}\right) = -1.$$

Je dis que, réciproquement, si ces deux relations sont vérifiées, les points correspondants sont sur une droite. En effet, la droite qui joint les points t et t' rencontre la courbe en deux autres points θ et θ', et l'on a

$$t + t' + \theta + \theta' = 0, \qquad \frac{1}{tt'} + \frac{1}{\theta\theta'} + \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t'}\right)\left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'}\right) = -1.$$

On a donc $\theta + \theta' = t'' + t''' = -(t + t')$, et

$$\frac{1}{tt'} + \frac{1}{t''t'''} - \frac{(t + t')^2}{tt'.t''t'''} = -1, \qquad \frac{1}{tt'} + \frac{1}{\theta\theta'} - \frac{(t + t')^2}{tt'.\theta\theta'} = -1 ;$$

ou, en retranchant ces deux dernières, $\left(\frac{1}{t''t'''} - \frac{1}{\theta\theta'}\right)\left[1 - \frac{(t + t')^2}{tt'}\right] = 0.$

Si $1 - \frac{(t + t')^2}{tt'}$ n'est pas nul, on a $\theta\theta' = t''t'''$, $\theta + \theta' = t'' + t'''$, les points θ et θ' coïncident avec les points t'' et t''', et les quatre points t, t', t'', t''' sont en ligne droite.

Supposons maintenant qu'on ait $1 - \frac{(t + t')^2}{tt'} = 0$; des relations précédentes on tire $tt' = -1$, et par suite $(t + t')^2 = -1$, ou $t + t' = \varepsilon i$ $(\varepsilon = \pm 1)$. Donc t et t' sont racines de l'équation $t^2 - \varepsilon it - 1 = 0$.

Or, nous avons vu plus haut que la droite qui joint l'origine à un point t de la courbe a pour équation $y(1 - t^2) - tx = 0$, ou $y = \frac{t}{1 - t^2}x$. Pour les deux racines de l'équation $t^2 - \varepsilon it - 1 = 0$, on a $\frac{t}{1 - t^2} = \frac{-1}{\varepsilon i} = \varepsilon i$. Il en résulte que les deux points de la courbe correspondant aux valeurs t et t', racines de l'équation $t^2 - \varepsilon it - 1 = 0$, coïncident avec l'un des points cycliques.

Comme nous supposons que ces deux points sont distincts, l'hypothèse $1 - \frac{(t+t')^2}{tt'} = 0$ ne se réalisera pas, et l'on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que les quatre points distincts t, t', t'', t''' soient en ligne droite est qu'on ait les deux relations

$$t + t' + t'' + t''' = 0, \qquad \sum \frac{1}{tt'} = -1.$$

2. Le cercle osculateur en un point M de la courbe rencontre cette courbe en trois points confondus au point M et en un autre point M_1. La relation $t + t' + t'' + t''' = 0$ nous donne alors $3t + t_1 = 0$, en désignant par t et t_1 les paramètres des points M et M_1.

Supposons que quatre points M soient sur une droite D, ayant pour équation $Bx + Cy + 1 = 0$, leurs t sont racines de l'équation

$$(6) \qquad t^4 - (Ba + 1)t^2 + Cat + Ba + 1 = 0.$$

Remplaçons t par $-\frac{t_1}{3}$; nous avons

$$t_1^4 - 9t_1^2(Ba + 1) - 27Cat_1 + 81(Ba + 1) = 0,$$

et cette équation admet pour racines les t des points M_1 correspondants.

Comparons cette équation à celle qui donne les t des quatre points situés sur le cercle

$$A_1(x^2 + y^2) + B_1x + C_1y + 1 = 0,$$

c'est-à-dire à l'équation suivante, analogue à l'équation (5),

$$t_1^4 - t_1^2(B_1a + 1) + C_1at_1 + A_1a^2 + B_1a + 1 = 0.$$

En écrivant que ces deux équations ont mêmes racines, on a

$$(7) \qquad B_1a + 1 = 9(Ba + 1), \qquad C_1 = -27C, \qquad A_1a^2 + B_1a + 1 = 81(Ba + 1),$$

et ces trois relations permettent de calculer A_1, B_1 et C_1.

D'ailleurs il existe entre ces trois quantités une relation indépendante de B et C,

$$A_1a^2 - 8(B_1a + 1) = 0,$$

et qui est linéaire par rapport à A_1 et B_1; donc le cercle (A_1, B_1, C_1) est orthogonal à un cercle fixe, qu'il est d'ailleurs facile de déterminer.

En effet, la condition pour que les deux cercles

$$A_1(x^2 + y^2) + B_1x + C_1y + 1 = 0, \qquad A'(x^2 + y^2) + B'x + C'y + D' = 0$$

soient orthogonaux est

$$-2A_1D' + B_1B' + C_1C' - 2A' = 0,$$

et en comparant avec la relation $A_1a^2 - 8(B_1a + 1) = 0$, on trouve aisément $A' = 1$, $B' = -2a$, $C' = 0$, $D' = -\frac{a^2}{8}$; par suite le cercle (A_1, B_1, C_1) est orthogonal au cercle fixe

$$x^2 + y^2 - 2ax - \frac{a^2}{8} = 0.$$

Des relations (7) on tire $\qquad A_1 = 72(Ba + 1)$;

or, pour que les points M_1 soient sur une droite D_1, il faut qu'on ait $A_1 = 0$, ou $Ba + 1 = 0$.

Cette condition exprime que la droite D passe par le point $(a, 0)$. Les relations (7) donnent alors

$$B_1a + 1 = 0, \qquad C_1 = -27C;$$

ce qui montre que la droite D_1 passe aussi par le point $(a, 0)$; il en résulte que les points M_2 seront sur une droite D_2 définie par

$$B_2a + 1 = 0, \qquad C_2 = (-27)^2C, \qquad \ldots$$

et les points M_n seront sur une droite D_n dont les coordonnées B_n et C_n seront données par les équations

$$B_na + 1 = 0, \qquad C_n = (-27)^nC.$$

Par suite, l'équation de D_n est

$$-\frac{x}{a} + (-27)^nCy + 1 = 0.$$

Si $C \neq 0$, cette droite a pour limite l'axe des x quand n augmente indéfiniment.

Si $C = 0$, toutes les droites $D_1, D_2, \ldots, D_n$ sont confondues avec la droite $x = a$.

Supposons maintenant que les quatre points M soient sur un cercle (C),

$$(C) \qquad A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + 1 = 0;$$

leurs t sont racines de l'équation

$$(5) \qquad t^4 - t^2(Ba + 1) + Cat + Aa^2 + Ba + 1 = 0.$$

Les points M_1 sont alors en général sur un cercle (C_1)

$$(C_1) \qquad A_1(x^2 + y^2) + B_1x + C_1y + 1 = 0,$$

défini par les relations

$$(8) \qquad B_1a + 1 = 9(Ba + 1), \qquad C_1 = -27C, \qquad A_1a^2 + B_1a + 1 = 81(Aa^2 + Ba + 1).$$

Ces relations nous donnent $\quad A_1a^2 = 9[9Aa^2 + 8(Ba + 1)]$.

Pour que les points M_1 soient sur une droite, il faut qu'on ait

$$A_1 = 0, \qquad \text{ou} \qquad 9Aa^2 + 8(Ba + 1) = 0.$$

Or le cercle (C) rencontre Ox en deux points H et K dont les abscisses vérifient l'équation $Ax^2 + Bx + 1 = 0$; le cercle (C') décrit sur HK comme diamètre a pour équation

$$(C') \qquad A(x^2 + y^2) + Bx + 1 = 0.$$

Remplaçons dans cette équation A par $-\dfrac{8(Ba + 1)}{9a^2}$; nous obtenons

$$Ba[8(x^2 + y^2) - 9ax] + 8(x^2 + y^2) - 9a^2 = 0:$$

et nous voyons ainsi que le cercle (C') passe par l'intersection des deux cercles

$$8(x^2 + y^2) - 9ax = 0, \qquad 8(x^2 + y^2) - 9a^2 = 0,$$

qui ont deux points communs P et P', $x = a$, $y = \pm \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$. Les segments HK sont vus des points P et P' sous un angle droit.

D'ailleurs la relation $9Aa^2 + 8(Ba + 1) = 0$, linéaire en A et B exprime aussi que le cercle (C) est orthogonal à un cercle fixe, qui est imaginaire. On pourrait le montrer analytiquement comme on l'a fait plus haut. Mais il est plus simple de remarquer que les points H et K décrivent sur Ox des divisions en involution, dont le point central est le point de rencontre de PP' et de Ox. Tout cercle passant par HK est orthogonal au cercle fixe dont les points doubles sont les extrémités d'un même diamètre. Ces points doubles étant imaginaires, le cercle lui-même est imaginaire.

Revenons au cas général. Les points M_2 seront sur un cercle (C_2), défini par les équations

$$B_2a + 1 = 9(B_1a + 1) = 9^2(Ba + 1),$$
$$C_2 = -27C_1 = (-27)^2C,$$
$$A_2a^2 + B_2a + 1 = 81(A_1a^2 + B_1a + 1) = 81^2(Aa^2 + Ba + 1),$$

et les points M_p seront sur un cercle (C_p) dont les coordonnées A_p, B_p, C_p sont fournies par les équations

$$B_pa + 1 = 9^p(Ba + 1), \qquad C_p = (-27)^pC = (-1)^p3^p.9^pC, \qquad A_pa^2 + B_pa + 1 = 9^{2p}(Aa^2 + Ba + 1).$$

Nous en tirons

$$B_pa = 9^p(Ba + 1) - 1, \qquad C_p = (-1)^p3^p.9^pC, \qquad A_pa^2 = 9^p[9^pAa^2 + (9^p - 1)(Ba + 1)].$$

Pour que les points M_p soient sur une droite, il faut qu'on ait $A_p = 0$, ou

$$9^pAa^2 + (9^p - 1)(Ba + 1) = 0;$$

et cette condition exprime que le cercle (C) est orthogonal à un cercle fixe, ou qu'il existe deux points d'où l'on voit sous un angle droit les segments déterminés sur Ox par le cercle (C).

Supposons que les points $M_1, M_2, \ldots$ soient sur des cercles $(C_1), (C_2), \ldots$ Le cercle (C_p) a pour équation

$$A_p(x^2 + y^2) + B_px + C_py + 1 = 0.$$

La puissance de l'origine par rapport à ce cercle est égale à $\frac{1}{A_p}$, ou à

$$\frac{a^2}{9^p[9^pAa^2+(9^p-1)(Ba+1)]};$$

cette quantité a pour limite zéro, quand p augmente indéfiniment.

D'autre part, la puissance du point $(a, 0)$ est

$$\frac{A_pa^2+B_pa+1}{A_p}=\frac{a^29^p(Aa^2+Ba+1)}{9^p[9^pAa^2+(9^p-1)(Ba+1)]}=\frac{a^2(Aa^2+Ba+1)}{Aa^2+\left(1-\frac{1}{9^p}\right)(Ba+1)};$$

sa limite est a^2.

Nous voyons ainsi que si le cercle (C_p) a pour limite un cercle (γ), celui-ci est tangent à Ox au point O. Cherchons l'ordonnée du centre du cercle (γ) ; c'est la limite de

$$-\frac{C_p}{2A_p}=-\frac{(-1)^p3^p.9^pCa^2}{9^p[9^pAa^2+(9^p-1)(Ba+1)]}=-\frac{(-1)^pCa^2}{3^p\left[Aa^2+\left(1-\frac{1}{9^p}\right)(Ba+1)\right]};$$

cette limite est nulle.

Donc le cercle (C_p) a pour limite le cercle de rayon nul qui a pour centre le point O.

3. Revenons aux équations paramétriques de la courbe donnée

$$x=\frac{a(1-t^2)}{t^4-t^2+1}, \qquad y=\frac{at}{t^4-t^2+1}.$$

La tangente en un point quelconque a pour équation

$$\frac{x-\frac{a(1-t^2)}{t^4-t^2+1}}{\frac{2t^3(t^2-2)}{(t^4-t^2+1)^2}}=\frac{y-\frac{at}{t^4-t^2+1}}{-\frac{3t^4-t^2-1}{(t^4-t^2+1)^2}}$$

ou, en simplifiant, $$x(3t^4-t^2-1)+2t^3(t^2-2)y+a(t^2+1)=0.$$

Écrivons que cette tangente passe par le point $A(x_0, y_0)$; nous obtenons

$$f(t)=2t^5y_0+3t^4x_0-4t^3y_0-(x_0-a)t_0^2-(x_0-a)=0,$$

équation du cinquième degré qui admet pour racines les t des points de contact des tangentes issues du point A.

On en conclut que la courbe est de cinquième classe. On pouvait le prévoir en appliquant la formule de Plücker $$c=m(m-1)-2d-3r.$$

Le degré $m=4$; il y a deux points doubles, les points cycliques, donc $d=2$, et un point de rebroussement, l'origine, $r=1$. Donc $c=12-4-3=5$.

Pour que quatre des points de contact des tangentes issues du point A soient sur un cercle, il faut que la somme de quatre racines de l'équation $f(t)=0$ soit nulle.

Or la somme des cinq racines est égale à $-\frac{3x_0}{2y_0}$; pour que la somme de quatre racines soit nulle, il faut et il suffit que l'une des racines soit égale à $-\frac{3x_0}{2y_0}$, ou que $f(t)$ soit divisible par $2ty_0+3x_0$.

En faisant la division, on trouve pour quotient

$$\varphi(t)=t^4-2t^2+\frac{5x_0+a}{2y_0}t-\frac{3x_0(5x_0+a)}{4y_0^2}, \qquad \text{et pour reste} \qquad -(x_0-a)+\frac{9x_0^2(5x_0+a)}{4y_0^2}.$$

Écrivons que ce reste est nul, nous obtenons l'équation du lieu du point A

$$9x_0^2(5x_0+a)-4y_0^2(x_0-a)=0.$$

C'est une courbe du troisième degré, symétrique par rapport à Ox et ayant un point double à l'origine. La construction de cette courbe n'offre aucune difficulté.

En posant $y_0 = \lambda x_0$, nous pouvons exprimer les coordonnées d'un point A de cette courbe en fonction rationnelle de λ. Nous obtenons ainsi

$$x_0 = \frac{a(4\lambda^2+9)}{4\lambda^2-45}, \qquad y_0 = \frac{a\lambda(4\lambda^2+9)}{4\lambda^2-45}.$$

Nous en déduisons

$$\frac{5x_0+a}{2y_0} = \frac{12\lambda}{4\lambda^2+9}, \qquad -\frac{3x_0(5x_0+a)}{4y_0^2} = -\frac{18}{4\lambda^2+9},$$

et par suite

$$\varphi(t) = t^4 - 2t^2 + \frac{12\lambda t}{4\lambda^2+9} - \frac{18}{4\lambda^2+9}.$$

L'équation $f(t) = 0$ admet d'abord la racine réelle $-\dfrac{3x_0}{2y_0}$, et les racines de l'équation $\varphi(t) = 0$.

Pour étudier la réalité des racines de cette équation, formons l'équation aux inverses

$$\psi(u) \equiv \frac{18u^4}{4\lambda^2+9} - \frac{12\lambda u^3}{4\lambda^2+9} + 2u^2 - 1 = 0.$$

L'équation dérivée

$$\psi'(u) \equiv 4u\left[\frac{18u^2}{4\lambda^2+9} - \frac{9\lambda u}{4\lambda^2+9} + 1\right] = 0$$

admet la racine zéro et deux racines imaginaires ; on en conclut immédiatement que l'équation $\psi(u) = 0$ admet seulement deux racines réelles. Donc du point A on peut mener trois tangentes réelles.

Pour obtenir l'équation du cercle (Γ), revenons à l'équation (5)

$$t^4 - t^2(Ba+1) + Cat + Aa^2 + Ba + 1 = 0$$

et identifions-la à l'équation $\varphi(t) = 0$; nous avons

$$Ba + 1 = 2, \qquad Ca = \frac{12\lambda}{4\lambda^2+9}, \qquad Aa^2 + Ba + 1 = -\frac{18}{4\lambda^2+9},$$

ou

$$A = -\frac{4(2\lambda^2+9)}{(4\lambda^2+9)a^2}, \qquad B = \frac{1}{a}, \qquad C = \frac{12\lambda}{a(4\lambda^2+9)}.$$

L'équation du cercle (Γ) est donc

$$-\frac{4(2\lambda^2+9)}{(4\lambda^2+9)a^2}(x^2+y^2) + \frac{x}{a} + \frac{12\lambda y}{a(4\lambda^2+9)} + 1 = 0,$$

ou

$$4(2\lambda^2+9)(x^2+y^2) - (4\lambda^2+9)ax - 12a\lambda y - (4\lambda^2+9)a^2 = 0.$$

Ce cercle rencontre Ox en deux points dont les abscisses sont racines de l'équation

$$4(2\lambda^2+9)x^2 - (4\lambda^2+9)a(x+a) = 0 \qquad \text{ou} \qquad x^2 + \mu(x-a) = 0,$$

en posant $\mu = -\dfrac{(4\lambda^2+9)a}{4(2\lambda^2+9)}$.

Quand μ varie, ces deux points tracent sur Ox des divisions en involution dont les points doubles sont $x = 0$ et $x = -2a$; par suite le cercle (Γ) est orthogonal au cercle fixe $x^2 + y^2 + 2ax = 0$.

Enfin, les coordonnées du centre du cercle (Γ) sont

$$x = \frac{(4\lambda^2-9)a}{8(2\lambda^2+9)}, \qquad y = \frac{3a\lambda}{2(2\lambda^2+9)};$$

ceci montre que le lieu du centre est une ellipse, dont l'équation cartésienne, facile à former, est

$$4y^2 + (4x-a)(8x-a) = 0.$$

Georges GONTHIEZ, lycée d'Amiens.

Solutions satisfaisantes par MM. L. Ballif ; G. Bresse, à Nancy ; P. Le Secq des Tournelles, lycée de Dijon : P. Brizard, à Paris ; E. Audebert, à Marseille.

1593. — *Un paraboloïde hyperbolique a un plan directeur horizontal ; il admet comme génératrices deux horizontales* AA′, BB′.

AA′ *a pour éloignement* 2cm *et sa projection verticale passe par le point de cote* 10cm *du grand axe de la feuille et par le point de la ligne de terre situé à* 10cm *à droite du grand axe.*

BB′ *a pour éloignement* 10cm *et sa projection verticale est symétrique de celle de* AA′ *par rapport au grand axe de la feuille.*

Un ellipsoïde de révolution a pour axe de révolution BB′ ; *le petit axe de la méridienne, dirigé suivant* BB′, *a pour longueur* 8cm ; *son grand axe a pour longueur* $8\sqrt{3}$ *et le centre est le point de cote* 10cm.

Représenter le solide commun aux deux corps en supposant que le point le plus haut de l'ellipsoïde est intérieur au paraboloïde.

Nota. — *On indiquera les constructions faites pour obtenir :* 1° *le contour apparent horizontal de l'ellipsoïde ;* 2° *un point de l'intersection et la tangente en ce point ;* 3° *les points sur les contours apparents ;* 4° *les points doubles en projection.*

Une notice explicative justifiera ces constructions.

On a le grand axe de l'ellipse méridienne de front en remarquant que sa longueur est le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle qui a pour rayon le petit axe. Si donc nous prolongeons le demi-petit axe $o'b'$ d'une longueur égale à sa moitié et que nous menions en ce point i une perpendiculaire à $o'i$ jusqu'à sa rencontre avec la circonférence de rayon $b'o'$, nous aurons en $o'j$ la longueur du demi-grand axe de l'ellipse. On peut alors construire cette ellipse, qui est le contour apparent vertical de l'ellipsoïde.

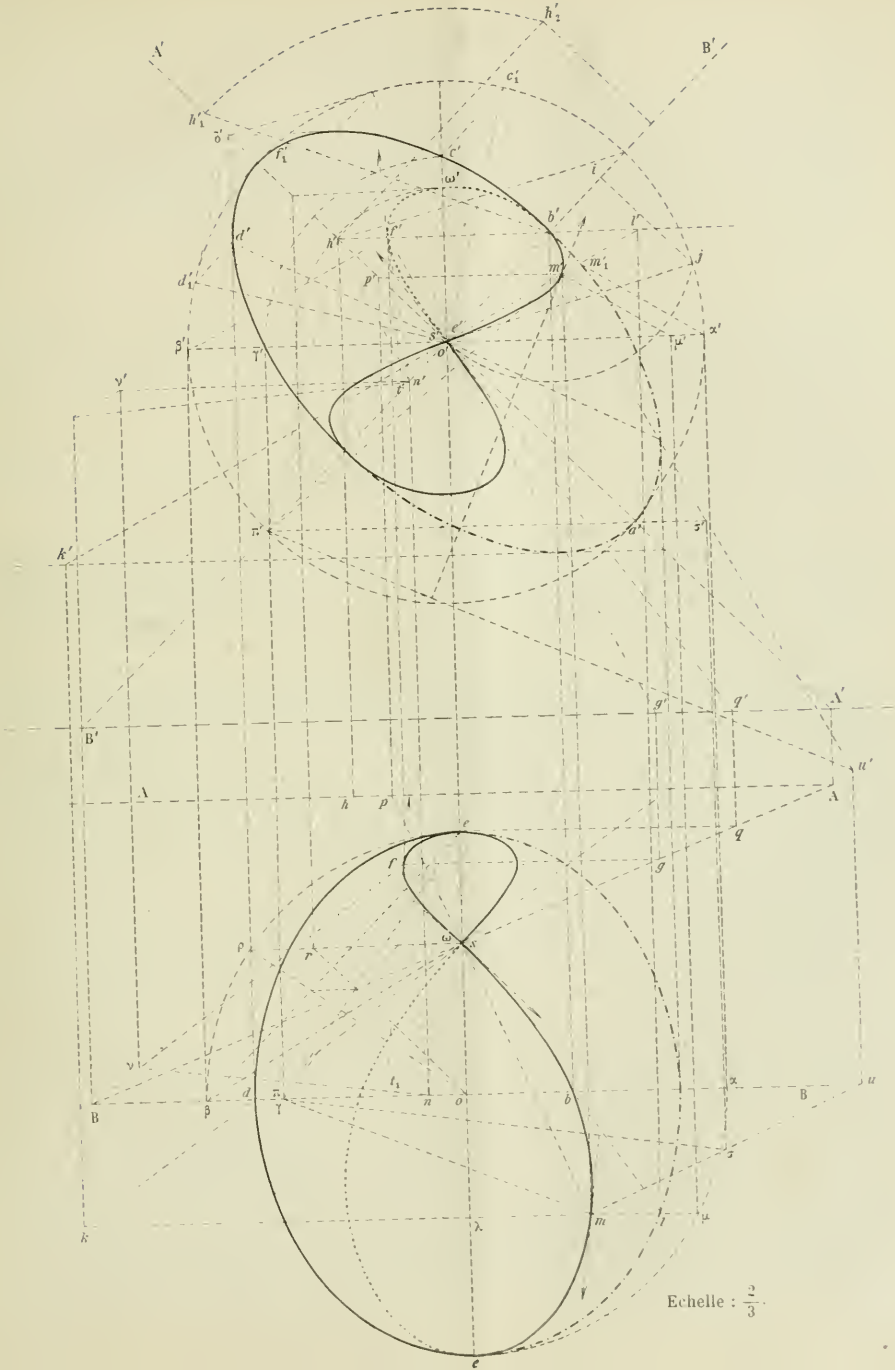
Le paraboloïde ayant un plan directeur horizontal et l'autre de front a pour axe une parallèle à la ligne de terre. Son sommet est le point de la surface où le plan tangent est de profil. Or la droite de bout oc qui se projette verticalement à l'intersection o' de A′ et de B′ est une génératrice horizontale de la surface, et la droite qui joint les traces horizontales des génératrices A et B en est une autre ; leurs projections horizontales se coupent en un point ω, qui définit une droite verticale située sur le paraboloïde et qui coupe oe, $o'e'$ en un point s, s' de la surface où le plan tangent est de profil ; c'est donc le sommet du paraboloïde.

Contour apparent horizontal de l'ellipsoïde. — C'est la trace horizontale du cylindre vertical circonscrit à la surface, ou la projection horizontale de la courbe de contact de ce cylindre avec l'ellipsoïde. Cette courbe n'est autre que la section par le plan diamétral conjugué des cordes verticales de l'ellipsoïde ; comme celui-ci admet pour plan de symétrie le plan méridien de front, ce plan diamétral est un plan de bout et sa trace sur le méridien est le diamètre conjugué du diamètre vertical dans l'ellipse méridienne. Nous aurons les extrémités de ce diamètre en considérant cette ellipse comme la projection de son cercle principal de rayon $o'a'$ et en menant à celui-ci les tangentes parallèles à la direction $o'e'_1$, rabattement du diamètre vertical $o'e'$ autour de $o'a'$ sur le plan du cercle principal. On a ainsi le demi-diamètre $o'd'$ dont la projection horizontale od donne l'un des demi-axes du contour apparent horizontal. L'autre axe est le diamètre de bout de la section, et coïncide avec la position du grand axe de l'ellipse méridienne de bout de la surface ; on connaît donc sa longueur $2oe = 2o'a'$. On peut alors tracer l'ellipse contour apparent horizontal de demi-axes od et oe.

Point courant de l'intersection et tangente. — Pour construire un point de l'intersection de l'ellipsoïde et du paraboloïde, on peut prendre des plans auxiliaires passant par l'axe de révolution ; ils coupent l'ellipsoïde suivant une méridienne et le paraboloïde suivant une seconde génératrice dont on prend les points d'intersection avec l'ellipse : à cet effet on fait tourner le plan auxiliaire autour de l'axe de manière à le rendre de front et utiliser l'ellipse méridienne de front qu'on aura tracée une fois pour toutes, en sorte qu'on n'a à effectuer la rotation que pour la génératrice du paraboloïde ; on relève ensuite les points d'intersection. Nous avons appliqué cette construction au plan auxiliaire passant par la génératrice BH dont le rabattement $b'h'_1$ coupe l'ellipse en f'_1, d'où le point f' de l'intersection, et sa projection horizontale f sur bh. La tangente en ce point est la perpendiculaire au plan des normales à chaque surface au point F. On a la normale à l'ellipsoïde en joignant le point F au point où la normale en f'_1 à la méridienne coupe l'axe de révolution, d'où $n'f'$, nf ; pour le paraboloïde, remarquons que la génératrice de front $f'g'$ nous donne une ligne de front du plan tangent en F, et la génératrice bh une horizontale. Nous avons donc les deux projections $f'v'$ et fv de la normale à la surface. Connaissant les deux normales on détermine une horizontale et une frontale de leur plan et on a immédiatement la tangente cherchée $t'f'$, tf.

On peut encore, pour trouver un point courant de l'intersection, prendre des plans auxiliaires de front qui coupent l'ellipsoïde suivant les ellipses homothétiques à la méridienne de front et dont les projections verticales sont concentriques ; chacun d'eux coupe le paraboloïde suivant une génératrice de front dont l'intersection avec l'ellipse donne deux points de la courbe.

Nous avons donné les constructions pour le plan auxiliaire KL dont l'intersection avec la génératrice FB


Echelle : $\frac{2}{3}$

nous a donné le point l, l' et par suite en projection verticale la génératrice $l'o'k'$, dont nous connaissions déjà le point o' commun aux projections verticales de toutes les génératrices de front. Pour connaître le rapport d'homothétie des deux ellipses, il suffit d'avoir le rapport des ordonnées $\frac{\lambda\mu}{o\alpha}$ des deux points du cercle principal qui ont pour abscisses zéro et $o\lambda$, car ce rapport est égal à celui des petits axes des ellipses sections de la surface par le plan de front $o\alpha$ et le plan KL. On devra donc construire sur le diamètre $o'm'_1l'$ de l'ellipse méridienne le point m'_1 tel que

$$\frac{o'm'}{o'm'_1} = \frac{o'\mu'}{o'\alpha'};$$

pour cela, il suffit de mener la parallèle $\mu'm'$ à $\alpha'm'_1$. On aurait encore ainsi un second point symétrique de m' par rapport au point o'. En répétant cette construction pour les différents diamètres de l'ellipse méridienne qui définissent autant de génératrices de front, et en se limitant aux deux diamètres qui correspondent aux plans limités menés par les extrémités de l'axe de bout du contour apparent horizontal, on a autant de points de la section que l'on veut. Cette construction montre que le point o' est un centre de la projection verticale de la courbe.

La tangente au point m, m' a été obtenue en prenant, comme dans la première méthode, la perpendiculaire au plan des normales aux deux surfaces au point M. Pour cela on a mené la seconde génératrice de ce point $m\omega p$, $m'p'$, d'où la normale $mn, m'n'$ au paraboloïde, puis la normale $m\pi$, $m'\pi'$ à l'ellipsoïde, et on a pris une horizontale $\pi\sigma$ et une frontale $\pi'u'$ du plan de ces normales.

Points sur les contours apparents. — On a des points sur le contour apparent vertical aux extrémités du petit axe de l'ellipse méridienne, et il n'y en a pas d'autre, puisque le plan de front correspondant ne contient d'autre ligne sur le paraboloïde que la génératrice BB' : en ces points la courbe est tangente à la méridienne. Sur le contour apparent horizontal, on a les points d'intersection de la génératrice horizontale de bout EO avec l'ellipse, c'est-à-dire les sommets du grand axe, et ce sont les seuls, car le plan de bout qui définit cette ellipse ne donne pas dans le paraboloïde d'autre génératrice qui puisse la rencontrer.

Points doubles et tangentes en ces points. — La courbe d'intersection ne peut présenter de points doubles dans l'espace puisque les deux quadriques données ne se touchent en aucun point. Mais le paraboloïde ayant une génératrice verticale et une génératrice de bout, nous aurons sur chaque projection un point double au point sur lequel se projette chacune de ces génératrices. En projection verticale, ce point est précisément le centre o' de l'ellipse de contour apparent, et il est la projection des points e où la génératrice horizontale de bout perce l'ellipsoïde ; en chacun de ces points le plan tangent à cette surface est de front, et par suite la tangente à la section n'est autre que la génératrice de front du paraboloïde situé dans le plan de front qui la contient. On a ainsi $q'e'$ pour le point de moindre éloignement, par exemple. C'est une tangente d'inflexion, car d'après ce qui a été dit plus haut, le point o' étant un centre de symétrie, quand la sécante $o'f'$ tourne autour de o' jusqu'à ce que f' vienne se confondre avec o', son symétrique vient en même temps au point o', en sorte que la tangente a trois points confondus sur la branche de courbe considérée au point o'.

En projection horizontale, le point double est la projection des points où la génératrice verticale perce l'ellipsoïde. Nous connaissons la projection horizontale de ces points, car c'est le point ω commun aux projections horizontales de toutes les génératrices horizontales du paraboloïde, mais il faut trouver leur cote.

On pourrait à cet effet prendre un cône auxiliaire ayant pour sommet l'ombilic b, b' de l'ellipsoïde et pour base la section de cette surface par un plan contenant la verticale considérée, puisqu'on connaît la direction des plans cycliques de ce cône, le plan de bout A' par exemple ; mais il est plus simple ici de couper l'ellipsoïde par le plan de front ω. Ce plan de front donne une section homothétique de la méridienne, pour laquelle on détermine le rapport d'homothétie, comme il a été dit plus haut. L'éloignement étant précisément égal, mais opposé par rapport au centre de la surface, à celui de la génératrice kl, $k'l'$ que nous avions choisie, il suffit de réduire le diamètre vertical $o'c'$ de la méridienne dans le rapport $\frac{o'm'}{o'm'_1}$ et pour cela de mener $m'\omega'$ parallèle à m'_1c'; on a ainsi la projection verticale du point le plus haut qui se projette horizontalement au point double.

On peut aussi pour déterminer le point ω', prendre la section de l'ellipsoïde par le plan de profil $o\omega$; c'est une ellipse dont le petit axe a pour longueur $o\gamma = o'\nu'$, et qu'on peut regarder comme la projection de son cercle principal $o\beta$. On obtient alors sans peine le point r de cette ellipse qui se projetait en ω et dont l'ordonnée ωr fait connaître la cote $o'\omega'$ du point cherché.

Les tangentes au point double ω peuvent être construites comme pour un point ordinaire, puisqu'en réalité chacun d'eux est la projection de deux points simples.

Mais on peut remarquer que la tangente en ω à l'arc $\omega f'$, par exemple, n'est autre que la position limite de

la sécante ωf quand f vient se confondre avec ω ; c'est donc la projection de la génératrice horizontale qui passe par le point ω, ω' où la génératrice verticale coupe l'ellipsoïde, et pareillement pour le point le plus bas. Ces deux points étant les points le plus haut et le plus bas de la courbe, on voit que la projection horizontale de la génératrice qui s'appuierait sur cette courbe devra à ce moment changer le sens de sa rotation autour du point ω, ce qui montre que le point ω est un point d'inflexion.

La ponctuation n'offre aucune difficulté.

CONCOURS DE 1907 (*Suite*)

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Groupe I

Mathématiques.

1614. — 1. Ox, Oy, Oz étant trois axes de coordonnées rectangulaires, montrer que l'équation

$$y^2z^2 + 2kxyz + k^2x^2 - 2ak^2y = 0,$$

où a et k désignent deux longueurs données, définit une surface réglée (Σ). Trouver les traces et les contours apparents de cette surface sur les plans de coordonnées. Indiquer une construction géométrique des génératrices rectilignes de la surface.

2. A quelle condition les coefficients de l'équation

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

doivent-ils satisfaire, pour que le plan représenté par cette équation contienne une génératrice de la surface? Quelles sont, en supposant cette condition vérifiée, les coordonnées du point de contact du plan et de la surface?

3. L'intersection de la surface (Σ) et du cylindre dont l'équation est

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0$$

se compose de l'axe Oz et d'une courbe gauche (C) ; exprimer en fonction rationnelle d'un paramètre les coordonnées d'un point quelconque de (C). Une génératrice du cylindre rencontre la courbe (C) en deux points : lieu du milieu de ces deux points.

4. La section de (Σ) par un plan parallèle à xOy est une parabole (P) ; exprimer, en fonction de la cote de son plan, le paramètre de cette parabole ; trouver le lieu de son foyer et celui de son sommet ; construire les projections de ces courbes sur les plans de coordonnées.

5. La parabole (P) se projette sur xOy, suivant une parabole (Q) ; chercher les enveloppes de l'axe et de la directrice de (Q).

Indiquer, dans le plan xOy, une définition géométrique des paraboles (Q).

6. Il existe, sur chacune des paraboles (Q), un point M tel que le cercle osculateur en M passe par O : trouver le lieu du point M.

Physique.

I. 1615. — Une balance de précision juste est supposée réaliser les conditions d'une sensibilité indépendante de la charge dans les limites où on l'utilise. La longueur des bras du fléau est 20 centimètres ; le poids du fléau et des plateaux vides est 500 grammes. L'aiguille, longue de 50 centimètres, se déplace devant une graduation en millimètres dont le zéro correspond à la position d'équilibre de la balance. La durée d'une oscillation simple de la balance est, en secondes, $t = 7{,}1$ lorsque les plateaux sont vides et $t' = 16{,}3$ lorsqu'on y met des poids égaux de 100 grammes.

On admet que tout se passe comme si la masse des plateaux et de ce qu'ils contiennent était condensée sur les couteaux.

1° Calculer la distance d de l'arête de suspension au centre de gravité et le rayon de gyration ρ du système formé par le fléau et les plateaux vides. (Dans ce calcul, on négligera partout d^2 devant ρ^2.)

La distance d sera supposée constante dans tout ce qui suit.

2° Si on mesure les durées d'une oscillation simple de la balance pour des charges égales et croissantes des

plateaux, quelle relation doit exister nécessairement entre les charges et les durées d'oscillation correspondantes ?

3° Calculer la sensibilité de la balance par la fraction de milligramme dont il faut surcharger l'un des plateaux pour que l'aiguille, d'abord au zéro, dévie d'une division de la graduation. En supposant qu'on apprécie le 1/20 de millimètre dans la position d'équilibre de l'aiguille, quelle est l'erreur maximum d'une pesée, les autres causes d'erreur étant supposées éliminées ?

4° La balance étant en équilibre quand on met sur les plateaux des poids de platine de 1 kilogramme, on dispose le kilogramme de droite à 1 mètre au-dessous du plateau correspondant, à l'aide d'un étrier et d'un fil dont l'ensemble a une masse très petite par rapport au kilogramme, et cette masse est équilibrée dans le plateau de gauche par une masse égale ; on constate alors que l'aiguille, malgré la justesse de la balance, n'est plus au zéro : elle a dévié vers la gauche d'une division environ. Calculer cette déviation, en supposant d'abord que la pesée est faite dans le vide, puis qu'elle est faite dans l'air.

Accélération de la pesanteur : $g = 980$ C.G.S.

Densité du mercure $= 13,6$.

Densité du platine $= 21$.

Poids du litre d'air à la température ordinaire et sous la pression normale $= 1^g,3$.

Rayon de la terre $= R = 6\,300$ kilomètres.

II. — Appareils d'électrostatique dont l'emploi comporte une pesée.

Groupe II.

Physique.

I. — Qu'est-ce que la lumière polarisée ? En quoi diffère-t-elle de la lumière naturelle ? Comment la caractérise-t-on ?

Passer en revue successivement les phénomènes physiques qui permettent de l'obtenir et d'étudier ses propriétés.

II. — **1616**. Un aréomètre à poids constant flotte verticalement dans un liquide de densité δ et de constante capillaire A, contenu dans une éprouvette à pied ; le poids total de l'aréomètre est de P grammes. Sa partie régulière est un cylindre de rayon R portant une graduation en millimètres, dont le zéro est à la partie inférieure ; sa partie irrégulière, ou réservoir, commence au zéro de la graduation et a un volume extérieur de V centimètres cubes.

1° Écrire l'équation d'équilibre de l'aréomètre et déterminer le numéro d'ordre n de la division à laquelle affleure le liquide de l'éprouvette.

On suppose $P = 50$ grammes, $V = 50$ centimètres cubes, $R = 2$ millimètres.

Calculer n dans le cas de l'eau $\left(\delta = 1,\ A = 80\ \frac{dynes}{cm}\right)$ et d'un liquide pour lequel on aurait $\delta = 0,95$ et $A = 50\ \frac{dynes}{cm}$.

2° L'expérience étant supposée faite avec de l'eau pure, on touche la surface libre du liquide de l'éprouvette avec un agitateur de verre porteur de traces d'huile $\left(A = 36\ \frac{dynes}{cm}\right)$; l'aréomètre remonte brusquement de plusieurs divisions. Expliquer ce phénomène, le calculer et en tirer des conclusions sur la façon dont on doit s'y prendre pour observer l'affleurement des aréomètres et sur la précision qu'on peut en attendre dans la mesure des densités de liquide à l'aide de ces instruments.

3° On suppose maintenant que l'aréomètre en question flotte verticalement dans un système formé par deux liquides superposés : le liquide inférieur, de densité δ et de constante capillaire A *au contact de l'air* (qui donnerait l'affleurement n s'il était seul) affleure à la division n_1, tandis que le liquide supérieur, de densité δ' et de constante capillaire A' *au contact de l'air* (qui donnerait l'affleurement n' s'il était seul) affleure à la division n_2. Écrire l'équation d'équilibre de l'aréomètre, A_1 étant la constante capillaire du liquide inférieur au contact du liquide supérieur.

Que devient cette équation d'équilibre quand on suppose que la différence $\delta - \delta'$ tend vers zéro ? En déduire un moyen simple de mesurer rapidement la constante capillaire A_1 au contact de deux liquides non miscibles dont les densités sont extrêmement voisines.

Tous les liquides dont il est question dans l'énoncé sont supposés mouiller parfaitement le verre.

Donnée numérique : accélération de la pesanteur $= g = 980$ C. G. S.

Chimie.

Acides lactiques, maliques, tartriques. — Indiquer pour chacun de ces corps la préparation usuelle, la formule, les fonctions qu'il possède et les réactions montrant qu'il les possède, enfin les synthèses qui en ont été faites.

Indiquer et interpréter les isoméries que l'on rencontre chez ces acides.

Sciences naturelles.

Parasitisme et Symbiose. — Le candidat exposera les principaux faits de parasitisme et de symbiose qui lui sont connus, et il montrera, par des exemples précis, pris aussi bien chez les végétaux que chez les animaux, l'influence réciproque des êtres qui se sont adaptés à de telles conditions d'existence.

Groupes I et II.

Mathématiques.

I. — **1617.** Étudier la variation de la fonction $y = e^{-x} \sin x$.

Représenter cette variation par une courbe rapportée à deux axes rectangulaires Ox et Oy. Déterminer les points d'inflexion de la courbe.

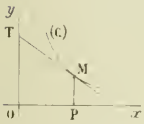
Calculer l'intégrale :

$$I_k = \int_0^{k\pi} e^{-x} \sin x \, dx$$

où k désigne un entier positif $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ et indiquer la signification géométrique de cette intégrale.

Déterminer la limite de I_k pour $k = +\infty$.

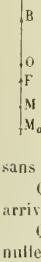
II. — **1618.** 1° Étant donnés deux axes rectangulaires Ox et Oy, on demande de trouver une courbe (C) possédant la propriété suivante. Si, en un point quelconque M de cette courbe, on mène la tangente MT qui rencontre Oy en T, et si on abaisse du point M la perpendiculaire MP sur Ox, l'aire du trapèze OTMP est équivalente à un carré donné de côté a.



On établira l'équation de la courbe en supposant que l'arc de courbe considéré ait, par rapport aux axes, la disposition indiquée sur la figure ; on tracera la courbe dont on aura obtenu ainsi l'équation et l'on énoncera la propriété géométrique qui remplace celle de l'énoncé pour les arcs qui présentent une disposition différente de celle de la figure.

2° Parmi les courbes trouvées on construira en particulier celle qui passe par le point $x = a$, $y = a$, et on calculera les rayons de courbure de cette courbe aux points d'abscisses $x = \pm a$.

III. — **1619.** Un fil élastique, de masse négligeable, est attaché à un point fixe A ; quand ce fil pend librement sous l'action de la pesanteur, sans être tiré, il a une longueur $AB = l$ et une tension nulle. Quand le fil est tiré, à son extrémité libre, de façon à prendre une longueur $AM = r$, plus grande que l, la tension F du fil est une force, dirigée de M vers A, ayant une intensité proportionnelle à l'allongement :



$$F = k(r - l)$$

où k est une constante positive.

1° Ceci posé, on attache au bout du fil un point pesant ; déterminer la masse m de ce point, de façon qu'il soit en équilibre sous l'action de son poids et de la tension du fil, dans la position O telle que

$$AO = 2l.$$

2° On tire sur le fil portant à son extrémité ce point matériel m et on amène le point dans une position M_0 telle que $AM_0 = r_0$ ait une longueur supérieure à $2l$, puis on abandonne le système à lui-même sans vitesse initiale. Étudier le mouvement du point matériel m.

Quelle doit être la valeur de r_0 pour que le point m remonte jusqu'au point B, où la tension s'annule, et arrive au point B avec une vitesse nulle ?

Quelle doit être la valeur de r_0 pour que le point m remonte jusqu'en A et arrive en A avec une vitesse nulle ?

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

1559. — *Trouver la condition pour que les quatre racines de l'équation*

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f = 0$$

vérifient la relation $\alpha + \beta = 2(\gamma + \delta)$ *et résoudre l'équation dans ce cas*

Appliquer à $$2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 1 = 0.$$

Désignons par $x^2 - mx + n = 0$ l'équation du second degré qui admet pour racines γ et δ, et par $x^2 - m'x + n' = 0$, celle qui admet pour racines α et β; nous aurons $m' = 2m$, puisque $\alpha + \beta = 2(\gamma + \delta)$. En outre, nous aurons l'identité

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f \equiv a(x^2 - mx + n)(x^2 - 2mx + n'),$$

et, par suite,

$$3m = -\frac{b}{a}, \qquad n + n' + 2m^2 = \frac{c}{a}, \qquad m(2n + n') = -\frac{d}{a}, \qquad nn' = \frac{f}{a}.$$

Nous déduisons de là successivement

$$m = -\frac{b}{3a}, \qquad n + n' = \frac{c}{a} - \frac{2b^2}{9a^2}, \qquad 2n + n' = \frac{3d}{b},$$

puis,

$$n = \frac{3d}{b} + \frac{2b^2}{9a^2} - \frac{c}{a}, \qquad n' = -\frac{3d}{b} - \frac{4b^2}{9a^2} + \frac{2c}{a}.$$

Il n'y a plus qu'à porter dans la relation $nn' = \frac{f}{a}$ pour avoir la condition demandée :

$$(1) \qquad \left(\frac{3d}{b} + \frac{2b^2}{9a^2} - \frac{c}{a}\right)\left(\frac{3d}{b} + \frac{4b^2}{9a^2} - \frac{2c}{a}\right) + \frac{f}{a} = 0,$$

et alors on a plus haut les valeurs de n, n' et m, de sorte que α, β, γ, δ sont les racines des deux équations

$$x^2 + \frac{b}{3a}x + \frac{3d}{b} + \frac{2b^2}{9a^2} - \frac{c}{a} = 0$$

et

$$x^2 + \frac{2b}{3a}x + \frac{2c}{a} - \frac{3d}{b} - \frac{4b^2}{9a^2} = 0.$$

Application. — Dans l'exemple signalé, $a = 2$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 0$, $f = -1$; alors

$$m = -\frac{1}{2}, \qquad n = -\frac{1}{2}, \qquad n' = 1.$$

On a donc bien d'abord la relation $nn' = \frac{f}{a}$, puis, les deux équations du second degré

$$x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0, \qquad \text{et} \qquad x^2 + x + 1 = 0,$$

dont les racines sont

$$-1, \qquad \frac{1}{2}, \qquad \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \qquad \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

JACQUES PARY.

Bonnes solutions : MM. G. Pélissier, à Toulouse ; A. Cotty, à Dijon ; G. Polly, Point-du-Jour, à Lyon ; M. Bajma, à Nice ; R. Manen, à Albi ; A. Gaunard, lycée de Reims ; G. Fouchy, à Roanne ; A. Darmon ; E. N. Barisien ; H. Janois, à Nantes ; M. Lamotte, lycée Janson ; L. Aubry ; Y. Duval, lycée Hoche ; Ambland, à Ruines ; L. Simon, à Doudeville ; P. Brizard ; Albertini, lycée de Nice ; Rebouillat, à Langres ; G. Coupé, à Paris.

Assez bonnes solutions : Mlle Madeleine Janemian ; MM. Torski, Lyon, Point-du-Jour ; J. Soudet, lycée de Rouen.

CONCOURS DE 1907

ÉCOLE CENTRALE

Mathématiques.

STATIQUE.

1620. — Etablir la condition d'équilibre du treuil (On ne décrira aucune espèce de treuil).

APPLICATION.— Pour soulever une pierre de poids P un carrier, pesant 70kg, utilise un treuil d'axe horizontal dont le cylindre, autour duquel s'enroule la corde soutenant la pierre, a 30cm de diamètre et dont la grande roue, le long de la périphérie de laquelle monte le carrier pour faire équilibre à la pierre, a 6m de diamètre.

Lorsque l'équilibre est établi, le poids du carrier est appliqué en un point A de la circonférence de la roue tel que le rayon OA de ce point fasse 60° avec la verticale descendante du centre de O.

On place alors une surcharge p en un point B de la circonférence de la roue, situé au-dessous de A et tel que $\widehat{AOB} = 15°$. Dans la nouvelle position d'équilibre, AO fait 45° avec la verticale descendante O.

On demande de calculer P et p et d'évaluer en kilogrammètres les travaux effectués par le poids P, le poids p et le poids du carrier dans le passage de la première position d'équilibre à la seconde.

On négligera le poids de la corde et les frottements ; on supposera que le centre de gravité du treuil est sur l'axe horizontal de rotation.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET CINÉMATIQUE.

1621. — Les axes oxy sont rectangulaires.

A tout point m du plan on fait correspondre un point M tel que mM soit parallèle à oy et que la distance de M à ox soit égale à la distance de o à m.

1° Etant données en grandeurs, directions et sens la vitesse et l'accélération de l'un des deux points m et M, déterminer et construire la vitesse et l'accélération de l'autre.

2° Quand la trajectoire de m est une droite, quelle est celle de M ?

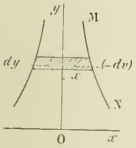
3° Quelle doit être la trajectoire de m pour que M ait un mouvement rectiligne ?

(12 juin, de 7 h. à 11 h.)

Physique et chimie.

I. — Vérifier la loi de la vitesse de la chute des corps à l'aide de l'appareil du général Morin.

II. — **1622.** Les gaz soumis à l'étude de la loi de Mariotte sont enfermés dans un tube laboratoire de révolution dont la méridienne est une courbe MN.



La sensibilité de l'appareil étant exprimée par le rapport $\frac{dy}{dp}$ de la variation de la colonne de mercure dans le tube à gaz à la variation de pression correspondante, on cherchera les relations qui lient cette sensibilité à la pression dans les trois cas particuliers suivants :

1° tube cylindrique ; 2° tube conique ; 3° tube dont la méridienne est une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes.

III. — Phosphure d'hydrogène gazeux.

IV. — **1623.** Dans l'eau acidulée par une quantité suffisante d'acide sulfurique, on dissout 25g,28 de sulfate ferreux (à 7 molécules d'eau). Dans cette liqueur on fait passer les gaz provenant de l'attaque, à température modérée, du permanganate de potassium (MnO^4K) par un excès d'acide chlorhydrique concentré. On arrête l'expérience quand il n'y a plus de sulfate ferreux dans la dissolution.

On demande d'expliquer et d'écrire les réactions, et de calculer la masse de permanganate nécessaire pour obtenir ce résultat.

2° Dans la nouvelle liqueur, qui contient maintenant le fer à un état différent de l'état initial, on reçoit le produit de la réaction de l'argent pur sur l'acide sulfurique concentré et chaud, employé en excès, et, on arrête l'expérience quand le gaz ainsi obtenu cesse de réagir.

Expliquer les réactions, les écrire et calculer la masse d'argent nécessaire pour que la réaction soit complète. On supposera les pertes nulles et on ne fera pas de corrections.

Chaque candidat reçoit un tableau des poids atomiques.

(12 juin, de 2 h. 1/2 à 5 h. 1/2.)

Epure de Géométrie Descriptive.

(Plans cotés).

1624. — Etablir sur un terrain formant plan incliné une plate-forme horizontale avec sa rampe d'accès.

Echelle graphique du dessin $= \frac{1}{100}$. Toutes les dimensions, même celles du cadre, sont exprimées en mètres. Cadre $= \frac{45^m}{27^m}$.

Le plan incliné, c'est-à-dire le sol naturel, est défini par deux horizontales ; l'une, le petit côté inférieur du cadre ; l'autre, le petit côté supérieur, ayant respectivement pour cotes, 0 mètre et 15 mètres.

La ligne a, b, c, d, e, a, formée par les 3 cotés d'un rectangle et par une demi-circonférence, est la projection horizontale de la plate-forme à établir à la cote de 6 mètres.

$$ab = 10^m, \qquad ae = bc = 14^m, \qquad af = bg = 3^m,5.$$

La partie de la plate-forme, qui est au-dessus du sol naturel, est obtenue par un apport de terre, ou remblai ; les talus (*) de ce remblai ont une inclinaison, sur l'horizon, de un de hauteur pour un et demi de base.

La rampe d'accès part de fg et a une pente de $\frac{2}{5}$.

La partie de la plate-forme, qui est au-dessous du sol naturel, est obtenue par un enlèvement de terre, ou déblai ; les talus (*) de ce déblai ont une inclinaison de 45 degrés.

Après avoir déterminé les intersections des talus entre eux et avec le sol incliné, on tracera, en traits noirs continus, les lignes de niveau de mètre en mètre, en les limitant au cadre.

Toutes les constructions seront indiquées à l'encre rouge et les points principaux cotés en mètres.

Titre extérieur : Géométrie cotée. — Titre intérieur : Plate-forme horizontale.

(*) On appelle talus les surfaces inclinées, planes ou non, qui relient les arrêts d'un ouvrage en terre (tel que la plate-forme et la rampe d'accès) au sol naturel.

(13 juin, de 7 h. à 11 h.)

Trigonométrie.

Problème.

1625. — Dans le triangle ABC la bissectrice de l'angle intérieur BAC rencontre en D le côté BC.

On connaît les longueurs $DC = m$, $DB = p$ ainsi que la somme q^2 des carrés des côtés AB et AC.

1° Calcul de l'angle A.

2° Conditions de possibilité.

3° Étant données les longueurs m, p, q, construire le triangle ABC.

4° Discussion.

Calcul logarithmique.

1626. — Calculer les arcs x, compris entre 0 et 180°, qui vérifient l'équation :

$$\cos^3(5x - 2\alpha) = \frac{\sqrt[5]{m^3} \times \cot g \frac{\beta}{3}}{\sin \frac{2\gamma}{5}}.$$

Données : $\alpha = 44° 2'43'',5$, $\beta = 131°17'25'',2$, $\gamma = 278°14'13'',5$, $m = -0,069175$.

(Emploi des tables à 5 décimales au moins. Le résultat pourra être exprimé en degrés ou en grades.)

(13 juin, de 2 h. 1/2 à 5 h. 1/2.)

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

17e Année. N° 12. Septembre 1907

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES FAISCEAUX TANGENTIELS D'ÉPICYCLOIDES (*suite*),

par M. **L. Bickart**.

Équations du mouvement rapporté à la conique S. — Ayant établi l'existence de la conique S, nous allons en profiter pour en déduire des équations plus simples que les précédentes : nous trouverons en même temps la confirmation des résultats établis.

Donnons-nous *a priori* la conique, définie par ses foyers et une tangente X_0, à laquelle la courbe E devra rester constamment tangente.

Soient $y = 0$, $x \pm c = 0$ les foyers de la conique, et $x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0 = r_0$ l'équation de la droite X_0.

L'équation tangentielle de la conique S s'obtient facilement ; elle est

$$(S) \qquad (c^2 \sin^2 \varphi_0 + r_0^2)u^2 + (r_0^2 - c^2 \cos^2 \varphi_0)v^2 = w^2.$$

Cherchons les relations fondamentales de la forme $x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - r + p \cos n\varphi + q \sin n\varphi = 0$, ou celles qui peuvent les remplacer.

Remarquons d'abord que $x_0 = 0$, puisque l'épicycloïde doit avoir son centre sur l'axe non focal. Dès lors y_0 étant donné, on doit pouvoir en déduire R et θ.

L'équation de la conique étant mise sous la forme $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, celle du cercle bitangent de centre $x = 0$, $y = y_0$ s'obtient facilement sous la forme

$$x^2 + (y - y_0)^2 = \frac{a^2(y_0^2 + c^2)}{c^2},$$

d'où
$$y_0 \sin \varphi_0 - r_0 + p \cos n\varphi_0 + q \sin n\varphi_0 = 0, \qquad p^2 + q^2 = a^2 \frac{y_0^2 + c^2}{c^2},$$

ou

$$(p \sin n\varphi_0 - q \cos n\varphi_0)^2 + (y_0 \sin \varphi_0 - r_0)^2 = a^2 \frac{y_0^2 + c^2}{c^2},$$

d'où l'on déduit, en tenant compte de ce que $a^2 = c^2 \sin^2 \varphi_0 + r_0^2$,

la relation
$$(p \sin n\varphi_0 - q \cos n\varphi_0)^2 = \frac{(r_0 y_0 + c^2 \sin \varphi_0)^2}{c^2},$$

équation qui se décompose en deux autres qui ne diffèrent que par le signe de c. On peut en retenir seulement l'une ou l'autre, suivant le choix qu'on aura fait de la direction des abscisses positives.

Conservons celle qui correspond à $+c$; nous pourrons alors écrire nos équations comme suit :

$$(\Gamma) \qquad \begin{cases} p \sin n\varphi_0 - q \cos n\varphi_0 = \dfrac{r_0 y_0 + c^2 \sin \varphi_0}{c}, \\ p \cos n\varphi_0 + q \sin n\varphi_0 = r_0 - y_0 \sin \varphi_0, \\ x_0 = 0. \end{cases}$$

Ceci fait, cherchons à exprimer le contact de la courbe E avec une nouvelle tangente $x \cos \varphi + y \sin \varphi = r$ à la conique S.

L'équation à vérifier est $y_0 \sin \varphi - r + p \cos n\varphi + q \sin n\varphi = 0$.

Si nous portons dans cette équation les valeurs de p et q déduites des équations (Γ), nous obtiendrons une relation qui contiendra y_0 et qui devra être vérifiée quel que soit y_0. On obtient ainsi, tous calculs faits deux équations d'identification :

$$\begin{cases} c \sin \varphi_0 \sin n(\varphi - \varphi_0) + r_0 \cos n(\varphi - \varphi_0) = r, \\ c \sin \varphi_0 \cos n(\varphi - \varphi_0) - r_0 \sin n(\varphi - \varphi_0) = c \sin \varphi. \end{cases}$$

Ces deux équations sont d'ailleurs compatibles : en effet, en élevant au carré et ajoutant, il vient

$$a^2 = c^2 \sin^2 \varphi_0 + r_0^2 = c^2 \sin^2 \varphi + r^2,$$

relation vérifiée puisque les droites $\varphi_0 r_0$, φr touchent toutes deux la conique S.

Posons
$$\begin{cases} c \sin \varphi_0 = a \sin u_0, \\ r_0 = a \cos u_0; \end{cases} \qquad \begin{cases} c \sin \varphi = a \sin u, \\ r = a \cos u. \end{cases}$$

Nos relations deviennent

$$\begin{cases} \cos [u_0 - n(\varphi_0 - \varphi)] = \cos u, \\ \sin [u_0 - n(\varphi_0 - \varphi)] = \sin u, \end{cases}$$

d'où

$$u_0 - n(\varphi_0 - \varphi) = u + 2k\pi, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \qquad \text{ou} \qquad n\varphi - u = n\varphi_0 - u_0 + 2k\pi.$$

Posons
$$\alpha = n\varphi_0 - u_0;$$

nous voyons que les équations peuvent être remplacées par $n\varphi - u = \alpha + 2k\pi$, $c \sin \varphi = a \sin u$.

Soit $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ l'excentricité de la conique, $u = n\varphi - \alpha - 2k\pi$, $\sin u = \sin (n\varphi - \alpha)$,

d'où enfin

(φ) $\sin (n\varphi - \alpha) = \varepsilon \sin \varphi$, équation qui donne les arguments φ des tangentes cherchées à la conique S.

D'ailleurs $r = a \cos u = a \cos (n\varphi - \alpha)$;

les équations des droites cherchées seront donc de la forme $x \cos \varphi + y \sin \varphi = a \cos (n\varphi - \alpha)$,

φ étant déterminé par l'équation (φ).

L'équation des droites que nous venons d'obtenir montre que toutes ces droites sont tangentes à une même épicycloïde d'espèce n ayant l'origine pour centre. Ce résultat pouvait être prévu *a priori*; on aurait donc pu écrire *a priori* les dernières équations. Nous avons préféré les déduire du calcul et nous les obtenons ainsi comme confirmation des résultats déjà énoncés.

La relation entre p et q s'obtient facilement : elle est $p \cos \alpha + q \sin \alpha = a$ ou $R \cos (\theta - \alpha) = a$.

Nous pouvons profiter des équations précédentes pour chercher le lieu des sommets de la courbe, ou de ses rebroussements, ou d'un point quelconque lié à la courbe par voie de similitude.

Nous ne donnerons pas le détail des calculs, qui sont d'ailleurs faciles; nous indiquerons seulement le résultat.

Les sommets sont donnés par les relations

$$\begin{cases} x = R \cos \dfrac{\theta}{n}, & y_0 = \varepsilon R \sin (\alpha - \theta), \\ y = y_0 + R \sin \dfrac{\theta}{n}, & R \cos (\alpha - \theta) = a. \end{cases}$$

Dans l'étude du mouvement, nous pouvons d'ailleurs remplacer le cercle bitangent à la conique par le cercle de même centre qui passe aux foyers : les rayons de ces cercles sont dans un rapport constant, égal à l'excentricité ε. Soit R' le rayon du cercle concentrique à l'épicycloïde et passant aux foyers. Les équations peuvent s'écrire

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\varepsilon} R' \cos \dfrac{\theta}{n}, & y_0 = R' \sin (\alpha - \theta), \\ y = y_0 + \dfrac{1}{\varepsilon} R' \sin \dfrac{\theta}{n}, & R' \cos (\alpha - \theta) = c. \end{cases}$$

Dans la figure mobile, le point x, y est homothétique par rapport au centre mobile du point $x' = R' \cos \dfrac{\theta}{n}$, $y' = y_0 + R' \sin \dfrac{\theta}{n}$ dans un rapport constant.

Le point x, y peut donc être remplacé par le point x', y'. Nous pouvons donc remplacer les équations, en enlevant les indices, par

$$\begin{cases} x = R \cos \dfrac{\theta}{n}, & y_0 = R \sin (\alpha - \theta), \\ y = y_0 + R \sin \dfrac{\theta}{n}, & R \cos (\alpha - \theta) = c. \end{cases}$$

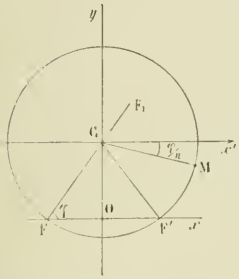
L'argument du point ainsi défini sur le cercle mobile passant par les foyers, est égal à $\dfrac{\theta}{n}$. Considérons un autre point du cercle, formant avec le précédent et le centre mobile, un triangle d'angles constants, et soit θ' l'argument de ce nouveau point.

On pourra écrire $\theta' = \dfrac{\theta}{n} + \beta$, β étant un angle constant.

Mais, soit $\alpha - \theta = \varphi$, d'où $\theta' = \beta + \frac{\alpha - \varphi}{n}$.

Déterminons β par la condition $\beta + \frac{\alpha}{n} = 0$. Le nouveau point mobile sera donné par les équations

$$\begin{cases} x = R\cos\frac{\varphi}{n}, \\ y = y_0 - R\sin\frac{\varphi}{n}, \end{cases} \qquad \begin{aligned} y_0 &= R\sin\varphi, \\ R\cos\varphi &= c. \end{aligned}$$



Soit C le centre du cercle mobile passant aux foyers fixes F, F'. L'angle φ n'est autre que l'angle CFF'.

Le point mobile s'obtient dès lors par la construction suivante :

Le centre C étant donné, mener par ce point la parallèle à FF' et une droite faisant avec cette parallèle l'angle $\frac{CFF'}{n}$. On obtient ainsi, sur le cercle de centre C qui passe en F, le point M.

Tout point de la figure sera le sommet d'un triangle semblable à un triangle donné construit sur CM.

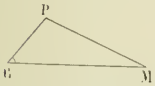
Si l'on veut traiter la question par le calcul, les coordonnées des deux points mobiles C et M seront données par

$$\begin{cases} x_C = 0, \\ y_C = c\,\mathrm{tg}\,\varphi\,; \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_M &= \frac{c}{\cos\varphi}\cos\frac{\varphi}{n}, \\ y_M &= y_C - \frac{c}{\cos\varphi}\sin\frac{\varphi}{n}. \end{aligned}$$

Soit CF_1 le prolongement de FC. L'angle F_1CM est égal à $\varphi + \frac{\varphi}{n} = \frac{n+1}{n}\varphi$. On peut donc remplacer la construction précédente par la suivante : mener par le point C une droite faisant avec FCF_1 l'angle $n'\varphi = n'\widehat{CFF'}$, n' étant un nombre constant.

Lieu d'un point quelconque de la figure. — Posons, suivant des notations déjà employées dans cette revue,

$$x + iy = \xi, \qquad x - iy = \eta \qquad \text{et} \qquad \varphi = n'\psi.$$



Le sommet d'un triangle semblable à un triangle donné construit sur CM aura pour coordonnées

$$\xi_P = h\xi_M + (1-h)\xi_C, \qquad \eta_P = k\eta_M + (1-k)\eta_C,$$

équations où

$$h = \frac{CP}{CM}e^{i\widehat{MCP}}, \qquad k = \frac{CP}{CM}e^{-i\widehat{MCP}}.$$

On déduit de là, après quelques calculs faciles et en posant $t = e^{i\psi}$,

$$\begin{cases} \xi = c\dfrac{2ht^{n-1} + t^{2n} - 1}{t^{2n} + 1}, \\ \eta = c\dfrac{2kt^{n+1} - t^{2n} + 1}{t^{2n} + 1}. \end{cases}$$

On en déduit le degré de la trajectoire : n étant un entier impair, $(n-1)$ et $(n+1)$ sont pairs ; ξ et η sont donc exprimées par des fractions d'ordre n par rapport au paramètre t^2. *Donc la trajectoire est une courbe unicursale d'ordre n.*

Remarque. — *Sur le mouvement inverse du proposé.*

Nous pouvons profiter de la figure précédente pour définir le mouvement inverse du proposé, c'est-à-dire celui d'une figure liée par similitude à un triangle semblable à un triangle donné, et dont les côtés coupent sous des angles constants une épicycloïde donnée.

Dans la figure mobile, les deux points F, F' sont fixes, et ils décrivent chacun le cercle C qui est fixe dans la figure fixe.

Prenons dans cette figure fixe, sur le cercle C, le point M pour origine des arcs. Soient f et f' les arguments des points F et F',

$$f = \widehat{FCM} = \widehat{FCx'} - \frac{\varphi}{n} = \pi - \varphi - \frac{\varphi}{n}, \qquad f' = \widehat{F'CM} = \widehat{F'Cx'} - \frac{\varphi}{n} = \varphi - \frac{\varphi}{n},$$

d'où, par élimination de φ,

$$(n+1)f' + (n-1)f = (n-1)\pi \qquad \text{ou} \qquad f - f' = n(f + f') - (n-1)\pi.$$

Or l'équation de la droite FF′ dans la figure fixe est, en appelant R le rayon du cercle C,

$$x\cos\frac{f+f'}{2}+y\sin\frac{f+f}{2}=\mathrm{R}\cos\frac{f-f'}{2}.$$

Posons $$\frac{f+f'}{2}=t \qquad \text{et} \qquad \frac{n-1}{2}\pi=\alpha,$$

l'équation devient $$x\cos t+y\sin t=\mathrm{R}\cos(nt-\alpha),$$

équation d'une épicycloïde d'espèce n définie par ses tangentes.

Donc le mouvement inverse est un mouvement épicycloïdal d'espèce n.

Cas particuliers.

Nous n'étudierons pas sous ce titre les cas correspondants à des valeurs particulières de n, mais ceux qui correspondent à des formes particulières du triangle formé par les trois droites données.

I. — **Le triangle est isocèle ; l'angle au sommet est quelconque.**

Plaçons l'origine au sommet du triangle, et prenons la hauteur pour axe des x. Les équations des trois droites prennent la forme

$$X=x-a, \qquad Y=x\cos\alpha+y\sin\alpha, \qquad Z=x\cos\alpha-y\sin\alpha.$$

On trouve pour équations conditionnelles

$$x_0=\frac{a\cos n\alpha}{\cos n\alpha-\cos\alpha}, \qquad p=\frac{a\cos\alpha}{\cos\alpha-\cos n\alpha}, \qquad y_0\sin\alpha+q\sin n\alpha=0.$$

Ainsi, *le centre de la courbe décrit une droite parallèle à la base.*

La conique enveloppe du cercle inscrit reste tangente aux trois côtés du triangle ; la hauteur en est l'axe focal ; le point de contact avec la base est fixe au milieu de cette base : c'est un sommet de la conique.

Nous n'insisterons pas davantage sur ce cas.

II. — **Le triangle donné est équilatéral.**

Les équations précédentes s'appliquent en faisant $\alpha=\frac{\pi}{3}$. Mais elles conduisent à un résultat dissymétrique, et il est évident que nous devons trouver des résultats symétriques par rapport au centre du triangle.

Si nous transportons l'origine à ce centre, et si nous prenons pour axe des x une des hauteurs, les équations des côtés sont de la forme

$$x=r, \qquad x\cos\frac{2\pi}{3}+y\sin\frac{2\pi}{3}=r, \qquad x\cos\frac{2\pi}{3}-y\sin\frac{2\pi}{3}=r,$$

ou bien, en prenant des coordonnées imaginaires et posant $\beta=e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $\gamma=e^{\frac{-2\pi i}{3}}$,

$$\xi+\eta=2r, \qquad \beta\xi+\gamma\eta=2r, \qquad \gamma\xi+\beta\eta=2r.$$

C'est d'après les coordonnées ainsi choisies que le lecteur pourra étudier la question. Nous ne faisons que la signaler, en indiquant qu'il convient d'étudier successivement les cas où n, étant entier, est de la forme $3m$, ou $(3m+1)$, ou $(3m+2)$.

III. — **Les trois droites données sont concourantes.**

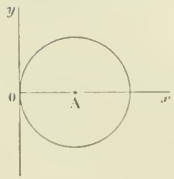
Si dans ce cas on prend pour origine le point de concours commun, on trouve que :

Le centre de la courbe décrit une droite passant par ce point O ; le cercle inscrit reste tangent à deux droites issues de O.

Toute la figure se déplace homothétiquement à elle-même par rapport au point O.

IV. — **Les trois droites données sont confondues,** *c'est-à-dire :* **l'épicycloïde reste osculatrice à un cercle donné en un point donné.**

Nous étudierons plus complètement ce cas, auquel d'ailleurs les équations générales ne s'appliquent plus qu'au moyen d'artifices *a posteriori*.



Nous devons tout d'abord chercher l'équation générale des cercles osculateurs à l'épicycloïde définie par l'équation de sa tangente

(1) $$(x-x_0)\cos\varphi+(y-y_0)\sin\varphi=\mathrm{R}\cos(n\varphi-\theta).$$

Posons comme précédemment, $\mathrm{R}\cos\theta=p$, $\mathrm{R}\sin\theta=q$.

Le point de contact de la tangente (1) avec son enveloppe est déterminé par les deux équations

(1) $$(x-x_0)\cos\varphi+(y-y_0)\sin\varphi=p\cos n\varphi+q\sin n\varphi,$$

(2) $$-(x-x_0)\sin\varphi+(y-y_0)\cos\varphi=-n(p\sin n\varphi-q\cos n\varphi).$$

Le centre de courbure correspondant est déterminé par la deuxième de ces équations, qui est celle de la normale, et par celle qu'on obtient en dérivant ses deux membres par rapport à φ, ou

(3) $$(x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi = n^2(p\cos n\varphi + q\sin n\varphi).$$

Soit A le centre du cercle auquel la courbe doit être constamment osculatrice en un point donné O. Prenons OA pour axe des x et O pour origine. Soit $OA = a$. L'équation du cercle est $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

Nous exprimerons les conditions données en écrivant que, pour $\varphi = 0$, l'équation (1) se réduit à $x = 0$, l'équation (2), à $y = 0$, l'équation (3), à $x = a$,
d'où

(Γ) $$x_0 + p = 0, \qquad y_0 + nq = 0, \qquad x_0 + n^2p = a.$$

Lieu du centre de la courbe. — Les équations (Γ) ainsi obtenues donnent $x_0 = \dfrac{a}{1 - n^2}$;
le lieu est une droite normale à OA.

Enveloppe du cercle inscrit. — Ce cercle a pour équation $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = p^2 + q^2$,
ou, en tenant compte des équations (Γ) et en ordonnant par rapport à y_0,

$$\frac{n^2 - 1}{n^2}\, y_0^2 - 2yy_0 + x^2 + y^2 - 2x_0x = 0,$$

d'où l'on déduit l'équation de son enveloppe $(n^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2x_0x) = n^2y^2$,
équation d'une conique d'axe focal Ox, à laquelle le cercle reste constamment bitangent. Cette équation s'écrit, en tenant compte de la valeur de x_0, $(1 - n^2)x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

On voit sous cette forme qu'elle est constamment osculatrice au cercle donné au point O, lequel en est un sommet.

Foyers. — On vérifie sans difficulté que les foyers sont donnés sur Ox par l'équation

$$(n^2 - 1)x^2 + 2ax - a^2 = 0,$$

dont les racines satisfont à la relation $$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{2}{a}.$$

Donc les foyers sont conjugués harmoniques par rapport aux points O et A.

Cercle des rebroussements. — On obtiendra les points de rebroussement de l'épicycloïde en exprimant que la tangente passe au centre, d'où $\cos(n\varphi - \theta) = 0$;
les équations de la tangente et de la normale deviennent alors, en prenant la solution $n\varphi - \theta = \dfrac{\pi}{2}$,

$$(x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi = 0, \qquad -(x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi = -nR,$$

d'où $$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = n^2R^2 = n^2(p^2 + q^2),$$

équation du cercle concentrique à la courbe et qui contient tous les points de rebroussement.

Si l'on tient compte des équations (Γ), celle de ce cercle devient $(x - x_0)^2 + y^2 - 2y_0y = n^2x_0^2$,
d'où il résulte que *le cercle des rebroussements passe par deux points fixes, qui sont les foyers de la conique enveloppe du cercle inscrit.*

Trajectoire d'un point quelconque de la figure. — Si l'on répète les calculs que nous avons faits dans le cas général, on trouve exactement les mêmes équations.

Droites tangentes à la courbe. — Pour qu'une droite

(D) $$x\cos\varphi + y\sin\varphi = r$$

soit constamment tangente à la courbe mobile, il faut que l'équation

$$x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi - r + p\cos n\varphi + q\sin n\varphi = 0$$

soit une identité résultant des équations conditionnelles

$$x_0 = \frac{a}{1 - n^2}, \qquad p + x_0 = 0, \qquad y_0 + nq = 0.$$

On déduit de là $$r = x_0(\cos\varphi - \cos n\varphi), \qquad \sin n\varphi = n\sin\varphi;$$
l'élimination de $n\varphi$ entre ces deux équations donne une relation entre r et φ, qui exprime que la droite est tangente à la conique ci-dessus, enveloppe du cercle inscrit.

L'équation $\sin n\varphi - n\sin\varphi = 0$ admet $\varphi = 0$ comme racine triple, ainsi qu'on peut s'en assurer par trois dérivations successives. Cette solution donne pour droite (D) la tangente donnée Oy, comme on devait s'y attendre.

De plus, si n est entier, l'équation admet la solution $\varphi = \pi$. Si *n est pair*, cette solution donne la droite $x = 2x_0$, c'est-à-dire la tangente à la conique en son sommet distinct de O.

Si *n est impair*, on retombe avec la solution $\varphi = \pi$ sur la droite donnée $x = 0$.

Les autres solutions de l'équation sont toutes imaginaires. On peut les étudier de la façon suivante : Si l'on pose $e^{i\varphi} = t$, l'équation à résoudre s'écrit $t^{2n} - 1 = n t^{n-1}(t^2 - 1)$.

Si l'on débarrasse cette équation du facteur $(t-1)^3(t+1)$, il reste une équation d'ordre $(2n-4)$ qui est réciproque, et se ramène par suite à une équation d'ordre $n-2$.

Nous n'entrerons pas dans le détail de cette étude.

Remarque sur le procédé de calcul employé. — Si l'on pose $e^{i\varphi} = t$, l'équation générale des tangentes à une épicycloïde d'espèce n, de centre ξ_0, η_0, de grandeur et d'orientation définies par $\lambda = Re^{-i\theta}$, $\mu = Re^{i\theta}$, est

$$t^{n-1}(\xi + t^2\eta) = t^{n-1}(\xi_0 + t^2\eta_0) + \lambda t^{2n} + \mu.$$

Si l'on identifie cette équation avec celle d'une droite quelconque $u\xi + v\eta + w = 0$, on obtient l'équation tangentielle générale des épicycloïdes d'espèce n, $(uv)^{\frac{n-1}{2}}(\xi_0 u + \eta_0 v + w) + \mu u^n + \lambda v^n = 0$.

Nous aurions pu partir directement de cette équation, qui n'est autre que la forme générale des équations conditionnelles ci-dessus. Nous avons préféré garder la forme que nous avons adoptée, et qui nous a permis de mettre directement en évidence l'existence de la conique à laquelle sont tangentes toutes les tangentes communes aux épicycloïdes considérées.

Cas général : *n commensurable* $= \dfrac{p}{q}$.

Nous résoudrons d'abord le problème suivant :

Problème. — *Trouver le nombre des tangentes communes à deux épicycloïdes d'espèce* $n = \dfrac{p}{q}$.

L'équation générale des tangentes à une épicycloïde d'espèce $\dfrac{p}{q}$ et de centre x_0, y_0 est de la forme

$$(x - x_0)\cos q\varphi + (y - y_0)\sin q\varphi = R\cos(p\varphi - \theta)$$

et, pour une autre épicycloïde semblable, $(x - x_0')\cos q\psi + (y - y_0')\sin q\psi = R'\cos(p\psi - \theta')$.

Nous pouvons toujours choisir les axes et l'unité de longueur de telle sorte que

$$x_0' = y_0' = 0, \qquad \theta' = 0, \qquad R' = 1\,;$$

d'où, en posant $\qquad e^{i\varphi} = t, \qquad e^{i\psi} = u$

et en passant aux coordonnées imaginaires, les deux équations

$$\xi + \eta t^{2q} = \frac{\lambda t^{2p} + \eta_0 t^{p+q} + \xi_0 t^{p-q} + \mu}{t^{p-q}}, \qquad \xi + \eta u^{2q} = \frac{u^{2p} + 1}{u^{p-q}}.$$

Le problème sera résolu par l'identification de ces deux équations.

Deux cas se présentent :

1er Cas : *p et q sont tous deux impairs.*

Soit $\qquad p = 2p' + 1, \qquad q = 2q' + 1.$

Dans ce cas, si l'on pose $\qquad t^2 = \theta, \qquad u^2 = \varepsilon,$

les deux équations ci-dessus deviennent

$$\xi + \eta\theta^q = \frac{\lambda\theta^p + \eta_0\theta^{p'+q'+1} + \xi_0\theta^{p'-q'} + \mu}{\theta^{p'-q'}}, \qquad \xi + \eta\varepsilon^q = \frac{\varepsilon^p + 1}{\varepsilon^{p'-q'}},$$

et l'identification donne les deux équations

(1) $$\theta^q = \varepsilon^q,$$

(2) $$(\lambda\theta^p + \eta_0\theta^{p'+q'+1} + \xi_0\theta^{p'-q'} + \mu)\varepsilon^{p'-q'} = (\varepsilon^p + 1)\theta^{p'-q'}.$$

Nous avons encore à distinguer deux cas :

a) $p > q$. Posons $\qquad \varepsilon = s\theta,$

nos équations deviennent

(1) $$s^q = 1,$$

(2) $$(\lambda\theta^p + \eta_0\theta^{p'+q'+1} + \xi_0\theta^{p'-q'} + \mu)s^{p'-q'} = s^p\theta^p + 1\,;$$

à chaque racine s de l'équation (1) correspond une équation (2) de degré p par rapport à θ.

Les racines de l'équation (1) sont distinctes et au nombre de q ; les racines de l'équation (2) sont en général distinctes et au nombre de p ; le nombre des valeurs de θ qui résolvent la question est donc égal à pq.

b) $p < q$. L'équation (1) ne change pas. Pour mettre l'équation (2) sous forme entière, il faut l'écrire

$$(\lambda\theta^{p+q'+1} + \eta_0\theta^{2q'+1} + \xi_0 + \mu\theta^{q-p'})s^{p'-q'} = s^p\theta^{p+q'+1} + \theta^{q-p'}\,;$$

son degré par rapport à θ devient égal à $2q' + 1 = q$; donc le nombre des valeurs cherchées de θ est égal à q'.

2e Cas : *p et q sont de parités différentes.*

L'identification des équations des deux tangentes donne

$$t^{2q} = u^{2q}, \qquad (\lambda t^{2p} + \eta_0 t^{p+q} + \xi_0 t^{p-q} + \mu u^{p-q} = (u^{2p} + 1)t^{p-q},$$

ou, en posant

$$u = zt,$$

(1) $$z^{2q} = 1,$$

(2) $$\lambda t^{2p} + \eta_0 t^{p+q} + \xi_0 t^{p-q} + \mu z^{p-q} = z^{2p} t^{2p} + 1.$$

La première de ces équations donne pour z $2q$ valeurs. A chacune d'elles correspond une équation (2).

Si $p > q$ cette équation (2) se trouve écrite sous forme entière par rapport à t et est de degré $2p$.

Le nombre des valeurs cherchées pour t est donc $2p \times 2q = 4pq$.

Si $p < q$ on mettra l'équation (2) sous forme entière en multipliant ses deux membres par t^{q-p}. On obtient ainsi

$$(\lambda t^{p+q} + \eta_0 t^{2q} + \xi_0 + \mu t^{q-p}) z^{p-q} = z^{2p} t^{p+q} + t^{q-p},$$

équation de degré $2q$.

Donc le nombre des valeurs cherchées pour t est

$$2q \times 2q = 4q^2.$$

Nous pouvons résumer les résultats ainsi trouvés dans le tableau ci-contre :

	$p > q$	$p < q$
$(p+q)$ pair	pq	q^2
$(p+q)$ impair	$4pq$	$4q^2$

T

Ceci posé, nous allons chercher de combien de façons il est possible d'exprimer que la courbe (E) est tangente à trois droites données.

A chacune de ces façons correspondra une famille de courbes E qui auront en commun les trois tangentes données et un certain nombre d'autres. Dans chacune de ces familles, le centre décrira une droite, le cercle inscrit restera bitangent à une conique fixe, etc.; en un mot, on pourra appliquer à chacune de ces familles les résultats que nous avons trouvés pour n entier et impair.

Nous avons établi au début de cette note que :

1) Si p et q sont tous deux impairs, il y a q façons d'exprimer que la courbe (E) touche une droite donnée X.

Autrement dit, la condition de contact peut être exprimée par q équations distinctes que nous écrirons sous la forme

(X) $$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \ldots, X_q = 0;$$

pour exprimer que la courbe touche les deux autres droites données, nous aurons de même, pour l'une, les q équations

(Y) $$Y_1 = 0, \qquad Y_2 = 0, \ldots, Y_q = 0$$

et pour l'autre

(Z) $$Z_1 = 0, \qquad Z_2 = 0, \ldots, Z_q = 0.$$

Si l'on associe ensemble une équation quelconque du groupe X, une autre du groupe Y, et une autre du groupe Z, on aura un système de trois équations conditionnelles sur lesquelles on pourra répéter tout ce que nous avons dit.

Il y a évidemment q^3 systèmes, tous distincts les uns des autres

Par conséquent il y a q^3 familles d'épicycloïdes, donnant lieu à q^3 droites lieux des centres, à q^3 coniques, etc.

2) *Si p et q sont de parités différentes*, il y a $2q$ façons d'exprimer que la courbe (E) touche une droite donnée.

Les conditions de contact avec trois droites données s'expriment donc par un système de trois équations prises respectivement dans trois groupes de $2q$ équations :

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \ldots X_{2q} = 0,$$
$$Y_1 = 0, \qquad Y_2 = 0, \ldots Y_{2q} = 0,$$
$$Z_1 = 0, \qquad Z_2 = 0, \ldots Z_{2q} = 0;$$

le nombre des systèmes que l'on peut ainsi former est donc, à première vue, égal à $(2q)^3 = 8q^3$.

Mais nous allons voir que le nombre de droites lieux de centres se réduit à $4q^3$.

En effet, reprenons l'équation générale des tangentes à (E),

$$\xi + \eta t^{2q} = \frac{\lambda t^{2p} + \eta_0 t^{p+q} + \xi_0 t^{p-q} + \mu}{t^{p-q}}.$$

Il s'agit d'exprimer que cette droite peut coïncider avec chacune des trois droites :

$$X = \xi + \alpha\eta - a = 0, \qquad Y = \xi + \beta\eta - b = 0, \qquad Z = \xi + \gamma\eta - c = 0;$$

d'où trois systèmes de deux équations de la forme

$$t^{2q} = \alpha, \qquad \lambda t^{2p} + \eta_0 t^{p-q} + \xi_0 t^{p-q} + \mu = a t^{p-q};$$

la seconde pouvant s'écrire

$$\lambda t^{p-q} + \eta_0 t^{2q} + \xi_0 + \mu t^{q-p} = a, \qquad \text{ou} \qquad \lambda t^{p+q} + \mu t^{q-p} + \xi_0 + \alpha\eta_0 - a = 0.$$

ou, en posant

$$X_0 = \xi_0 + \alpha\eta_0 - a,$$

$$\begin{cases} t^{2q} = \alpha, & (1') \\ X_0 + \lambda t^{q+p} + \mu t^{q-p} = 0. & (2') \end{cases}$$

Soit t_0 l'une des racines de l'équation (1'). Cette équation admet également la racine $t_0' = -t_0$ et, puisque p et q sont de parités différentes,

$$t_0'^{q+p} = -t_0^{q+p}, \qquad t_0'^{q-p} = -t_0^{q-p},$$

donc, si l'on peut écrire

$$X_0 + \lambda t_0^{q+p} + \mu t_0^{q-p} = 0,$$

on pourra également écrire

$$X_0 - \lambda t_0^{q+p} - \mu t_0^{q-p} = 0,$$

soit deux équations distinctes du groupe (X) que l'on peut réunir sous la forme

$$\pm X_0 = \lambda t_0^{q+p} + \mu t_0^{q-p},$$

t_0 étant susceptible de prendre q valeurs différentes.

Les contacts avec Y et Z donnent lieu de même à des équations de la forme

$$\pm Y_0 = \lambda t_1^{q+p} + \mu t_1^{q-p}, \qquad \pm Z_0 = \lambda t_2^{q+p} + \mu t_2^{q-p}.$$

L'élimination de λ et de μ donne pour lieu de ξ_0, η_0 :

$$\begin{vmatrix} \pm X_0 & t_0^{q+p} & t_0^{q-p} \\ \pm Y_0 & t_1^{q+p} & t_1^{q-p} \\ \pm Z_0 & t_2^{q+p} & t_2^{q-p} \end{vmatrix} = 0.$$

A une détermination de t_0, t_1, t_2 correspondent tous les arrangements de signes que l'on peut réaliser dans la première colonne.

Ces arrangements sont au nombre de 8, mais à l'un quelconque d'entre eux en correspond un autre dans lequel les trois signes sont respectivement différents : à l'arrangement $(+--)$ par exemple correspond l'arrangement $(-++)$ qui a simplement pour effet de changer de signe tous les termes de la première colonne, et qui par suite ne change pas l'équation.

Donc le nombre 8 des arrangements possibles ne donne lieu qu'à quatre équations distinctes. Autrement dit, les $8q^3$ droites se confondent deux à deux et le nombre effectif s'en réduit à $4q^3$, comme nous l'avions annoncé.

Il n'en reste pas moins vrai que le nombre des systèmes de trois équations conditionnelles est $8q^3$; à chacun d'eux en correspond un autre où rien n'est changé, sauf les signes de λ et μ. Mais considérons les deux courbes concentriques enveloppes de :

$$\xi + \eta_1 t^{2q} = \lambda t^{p-q} + \mu t^{q-p} \qquad \text{et} \qquad \xi + \eta_1 t^{2q} = -\lambda t^{p+q} - \mu t^{q-p}.$$

Ces deux courbes coïncident, car, pour passer de l'une à l'autre, il suffit de changer t en $-t$.

Donc le nombre des familles distinctes d'épicycloïdes dans le cas considéré se réduit à $4q^3$.

Ayant trouvé dans tous les cas le nombre des familles distinctes de courbes, nous allons chercher à combien de droites fixes les courbes de chacune des familles restent tangentes.

Dans chaque famille, le système des trois équations conditionnelles permet d'exprimer ξ_0, η_0, λ, μ en fonctions linéaires d'un seul et même paramètre z,

$$\xi_0 = \xi_1 + z\xi_2, \qquad \lambda = \lambda_1 + z\lambda_2,$$
$$\eta_0 = \eta_1 + z\eta_2, \qquad \mu = \mu_1 + z\mu_2.$$

Reprenons la distinction des deux cas ci-dessus :

1) *p et q sont tous deux impairs.* — L'équation générale des tangentes aux courbes E est

$$\xi + \eta\theta^q = \lambda\theta^{p+q+1} + \eta_0\theta^q + \xi_0 + \mu\theta^{q-p},$$

équation de la forme

$$\xi + \eta\theta^q = f(\theta), \qquad \text{avec la condition} \qquad f = f_1 + zf_2.$$

Nous devons chercher avec combien de droites fixes peut coïncider la droite (D).

Soit $\xi + \alpha\eta = a$ une de ces droites fixes.

L'identification donne

$$\theta^q = \alpha, \qquad f_1 + zf_2 = a,$$

la seconde équation doit être vérifiée quel que soit z. D'où

$$f_2 = 0, \qquad a = f_1, \qquad \alpha = \theta^q.$$

La première de ces conditions est une équation en θ ; les deux autres donnent a et α connaissant θ. Le nombre cherché sera donc celui des racines de l'équation $f_2 = 0$ ou

$$\lambda_2\theta^{p'+q'+1} + \gamma_2\theta^q + \xi_2 + \mu_2\theta^{q'-p'} = 0.$$

Si $q - p > 0$, cette équation se trouve écrite sous forme entière et son degré est q.

Si $p - q > 0$, l'équation sous forme entière s'écrit $\lambda_2\theta^p + \gamma_2\theta^{p'+q'+1} + \xi_2\theta^{p-q'} + \mu_2 = 0$ et son degré est p.

Donc le nombre des droites cherchées est égal au plus grand des deux nombres p, q.

2) *p et q sont de parités différentes.* — L'équation des tangentes est alors

$$\xi + \gamma_1 t^{2q} = f(t), \qquad f = \lambda t^{p+q} + \gamma_0 t^{2q} + \xi_0 + \mu t^{q-p} = f_1 + zf_2.$$

Le nombre des droites cherchées est celui des racines de l'équation $f_2 = 0$, et l'on reconnait comme plus haut que ce nombre est égal au plus grand des deux nombres $2p$, $2q$.

En résumé, si nous nous reportons au calcul de la classe établi au début de cette note, nous voyons que, dans tous les cas, *le nombre des droites fixes auxquelles les courbes d'une même famille restent tangentes est égal à la classe de la courbe* (Y compris, bien entendu, les trois droites données.)

Si l'on appelle T le nombre total des tangentes communes à 2 courbes de la même famille, nombre déterminé par le tableau ci-dessus, nous voyons donc que ces deux courbes ont en commun un certain nombre de tangentes fixes, nombre égal à leur classe C, et (T — C) tangentes variables.

Les C tangentes fixes touchent une même conique, et les cercles inscrits des courbes de la famille sont bitangents à cette conique.

Répartition des points de contact. — Nous allons faire voir maintenant que, *pour chacune des épicycloïdes d'une famille donnée, les points de contact avec les* C *droites fixes sont sur une quartique bicirculaire unicursale.*

Soient, d'une façon générale, deux épicycloïdes d'espèce n définies par leurs tangentes

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi + \mathrm{R}\cos(n\varphi - \theta),$$
$$x\cos\psi + y\sin\psi = x'_0\cos\psi + y'_0\sin\psi + \mathrm{R}'\cos(n\psi - \theta'),$$

les tangentes communes sont définies par les conditions

$$\text{(T)} \qquad \frac{\cos\psi}{\cos\varphi} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{x_0\cos\psi + y'_0\sin\psi + \mathrm{R}'\cos(n\psi - \theta')}{x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi + \mathrm{R}\cos(n\varphi - \theta)}$$

et les points de contact de ces tangentes avec la première des deux courbes sont définis par les deux équations :

$$(xy) \qquad \left\{\begin{aligned} &(x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi = \mathrm{R}\cos(n\varphi - \theta),\\ &-(x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi = -n\mathrm{R}\sin(n\varphi - \theta);\end{aligned}\right.$$

les équations T donnent d'abord $\psi = \varphi + k\pi$,
k étant un entier, puis

$$\pm(x'_0\cos\varphi + y'_0\sin\varphi) + \mathrm{R}'\cos(n\varphi + nk\pi - \theta') = \pm(x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi + \mathrm{R}\cos(n\varphi - \theta)),$$

ou

$$(x'_0 - x_0)\cos\varphi + (y'_0 - y_0)\sin\varphi - \mathrm{R}\cos(n\varphi - \theta) \pm \mathrm{R}'\cos(n\varphi + nk\pi - \theta') = 0,$$

le signe $+$ correspondant au cas où k est pair, et le signe $-$ au cas où k est impair.

Nous avons vu plus haut, d'ailleurs, que si $n = \frac{p}{q}$, il y a lieu de conserver le double signe quand p et q sont de parités différentes, et que le degré des conditions diminuait de moitié quand p et q sont tous deux impairs. Nous avons vu aussi combien de valeurs différentes on peut donner à k, chaque valeur donnant un groupe de tangentes communes.

Donnons à k une valeur déterminée et posons

$$nk\pi - \theta' = -\theta_1;$$

la première des équations (xy), combinée avec l'équation qui donne φ permet d'écrire

$$(\varphi) \qquad (x - x'_0)\cos\varphi + (y - y'_0)\sin\varphi = \pm\mathrm{R}'\cos(n\varphi - \theta_1).$$

Multiplions par n les deux membres de la première des équations (xy), puis élevons les deux équations au carré et ajoutons membre à membre ; nous obtenons

$$(f) \qquad (x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi]^2 n^2 + [-(x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi]^2 = n\mathrm{R}^2.$$

Ecrivons ensuite les deux équations (xy) et l'équation (φ) sous la forme suivante :

$$(x - x'_0)\cos\varphi + (y - y'_0)\sin\varphi = \mathrm{R}'\cos\theta_1\cos n\varphi + \mathrm{R}'\sin\theta_1\sin n\varphi,$$
$$(x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi = \mathrm{R}\cos\theta\cos n\varphi + \mathrm{R}\sin\theta\sin n\varphi,$$
$$-(x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi = -n\mathrm{R}\sin\theta\cos n\varphi + n\mathrm{R}\cos\theta\sin n\varphi,$$

et, entre ces trois équations, éliminons $\cos n\varphi$ et $\sin n\varphi$. Il vient :

$$\begin{vmatrix} (x-x'_0)\cos\varphi+(y-y'_0)\sin\varphi & R'\cos\theta_1 & R'\sin\theta_1 \\ (x-x_0)\cos\varphi+(y-y_0)\sin\varphi & R\cos\theta & R\sin\theta \\ -(x-x_0)\sin\varphi+(y-y_0)\cos\varphi & -nR\sin\theta & nR\cos\theta \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant et en posant $\theta-\theta_1=\delta$,

$$P = nR(x-x'_0) - nR'\cos\delta(x-x_0) + R'\sin\delta(y-y_0),$$
$$Q = nR(y-y'_0) - nR'\cos\delta(y-y_0) - R'\sin\delta(x-x_0),$$

il vient $\qquad P\cos\varphi + Q\sin\varphi = 0 \qquad$ ou $\qquad \dfrac{\cos\varphi}{Q} = \dfrac{\sin\varphi}{-P}$;

rendons l'équation (f) homogène par rapport à $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ en multipliant le second membre par $(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)$ et remplaçons $-y$ ensuite $\cos\varphi$ par Q et $\sin\varphi$ par $-P$; elle devient :

$$[Q(x-x_0)-P(y-y_0)]^2 + \frac{1}{n^2}[P(x-x_0)+Q(y-y_0)]^2 = R^2(P^2+Q^2),$$

équation d'une courbe du 4e degré qui admet pour point double le point donné par $P=0$, $Q=0$.

D'ailleurs
$$P = n(R-R'\cos\delta)x + R'\sin\delta\, y + \cdots,$$
$$Q = -R'\sin\delta\, x + n(R-R'\cos\delta)y + \cdots;$$

les termes du quatrième degré se réduisent alors à

$$(R^2+R'^2-2RR'\cos\delta)(x^2+y^2)^2,$$

ainsi qu'on le vérifie par un calcul facile.

Donc enfin :

Étant données deux épicycloïdes semblables, d'espèce $n=\dfrac{p}{q}$, leurs tangentes communes se partagent en q groupes ou en $2q$ groupes suivant que $(p+q)$ est pair ou impair. Les points de contact de l'un des groupes avec l'une des deux courbes sont sur une même courbe du quatrième degré, bicirculaire et pourvue d'un point double.

On reconnaîtrait aisément, de plus, et comme vérification de ce qui précède, que :

Toutes les tangentes d'un même groupe touchent une même conique.

Nous n'insisterons pas davantage sur l'étude de cette quartique, bien qu'elle présente quelques points intéressants, et nous examinerons ce que deviennent nos théorèmes dans le cas où les épicycloïdes dégénèrent, soit en développantes de cercle, soit en cycloïdes.

(A suivre.)

ALGÈBRE ET ANALYSE

1550. — 1° *On considère la fonction* $y = x^p(\lambda Lx+\mu)$.

Tracer les différentes formes de la courbe qui représente ses variations, les nombres p, λ, μ variant.

2° *Former l'équation différentielle à laquelle la fonction y satisfait, p étant donné, λ et μ variant.*

3° *Montrer que l'équation différentielle*

$$(1) \qquad ax^2y'' + bxy' + cy = 0,$$

a, b, c étant des constantes, admet toujours une solution de la forme x^r.

En déduire l'intégration de l'équation (1).

Retrouver les résultats obtenus en faisant le changement de variable $x=e^t$.

4° *Chercher, a, b, c, α étant des nombres fixes, et α différent de zéro, le terme général de la série entière la plus générale satisfaisant à l'équation différentielle*

$$(2) \qquad (ax^2+\alpha)y'' + bxy' + cy = 0.$$

Que peut-on dire de la convergence de cette série ?

Dans quels cas particuliers l'équation différentielle (2) est-elle satisfaite par un polynome ou bien n'admet-elle pour intégrales que des polynomes ?

1. Nous écarterons les cas faciles de $\lambda = 0$ et $p = 0$; pour préciser, nous supposerons λ positif.

On ne donnera à la variable que des valeurs positives.

La dérivée est $$y' = x^{p-1}[\lambda p \mathrm{L}x + \lambda + p\mu].$$

Elle s'annule une fois. Elle passe du négatif au positif si $p > 0$, du positif au négatif si $p < 0$.

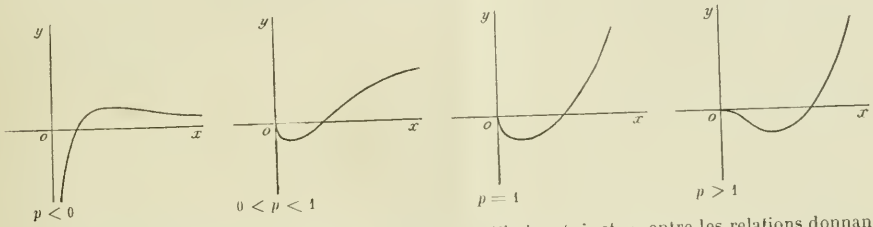
Si $p < 0$, y s'annule pour une valeur inférieure à la racine de la dérivée. y croît indéfiniment par valeurs < 0 quand x tend vers zéro; y tend vers zéro quand x croît indéfiniment, car on a

$$y = \frac{\lambda \mathrm{L}x + \mu}{x^{-p}} = \frac{\lambda \mathrm{L}x + \mu}{\mathrm{L}x} \cdot \frac{\mathrm{L}x}{x^{-p}}.$$

Si $p > 0$, la racine de y est supérieure à la racine de y', y tend vers zéro quand x tend vers zéro. y croît indéfiniment par valeurs positives quand x croît indéfiniment.

Si $p \leqslant 1$, $\frac{y}{x}$ croît indéfiniment quand x tend vers zéro; si $p > 1$, $\frac{y}{x}$ tend vers zéro quand x tend vers zéro.

On voit de même que la direction asymptotique est ox si $p < 1$ et oy si $p \geqslant 1$. De là les formes de courbes



2. L'équation différentielle cherchée s'obtiendrait en éliminant λ et μ entre les relations donnant y, y', y''.

On peut l'obtenir plus rapidement en écrivant $y.x^{-p} = \lambda \mathrm{L}x + \mu$.

D'où $(yx^{-p})'_x = \frac{\lambda}{x}$ ou $x(yx^{-p})'_x = \lambda$ ou enfin $x(yx^{-p})'_x - \lambda = 0$.

Développons $(yx^{-p})'_x = y'x^{-p} - px^{-p-1}y$, $x(yx^{-p})'_x = y'x^{1-p} - px^{-p}y$.

L'équation différentielle est donc $y''x^{1-p} + (1-p)y'x^{-p} - px^{-p}y' - p^2x^{-p-1}y = 0$,

ce qui s'écrit encore $$y''x^2 + (1-2p)y'x + p^2y = 0.$$

3. Cette équation différentielle est un cas particulier de la suivante :

(1) $$ax^2y'' + bxy' + cy = 0,$$ que nous allons intégrer.

Posons $y = x^r$, $y' = rx^{r-1}$, $y'' = r(r-1)x^{r-2}$.

Donc $$ax^2y'' + bxy' + cy = x^r[ar(r-1) + br + c].$$

x^r est donc intégrale particulière si r est racine de l'équation

(2) $$ar^2 + (b-a)r + c = 0.$$

Supposons cette condition réalisée et faisons le changement de variables $y = ux^r$.

$$y' = u'x^r + rux^{r-1}, \qquad y'' = u''x^r + 2rx^{r-1}u' + r(r-1)ux^{r-2}.$$

L'équation différentielle devient $$ax^{r+2}u'' + x^{r+1}(2ar + b)u' = 0$$

et, après simplifications. $$axu'' + (2ar + b)u' = 0.$$

En appelant r' la seconde racine de l'équation (2), l'équation différentielle s'écrit encore

$$xu'' + (r - r' + 1)u' = 0, \qquad \frac{u''}{u'} + \frac{r - r' + 1}{x} = 0$$

et, en intégrant $\quad u' = \dfrac{\lambda}{x^{r-r'+1}} = \lambda x^{r'-r-1}, \qquad u = \dfrac{\lambda}{r'-r-1} x^{r'-r} + \mu, \qquad y = \lambda_1 x^{r'} + \mu x^r.$

Ce calcul suppose r et r' différents. Si l'on a $\quad r = r'$,

$$u' = \frac{\lambda}{x}, \qquad u = \lambda \mathrm{L}x + \mu, \qquad y = x^r(\lambda \mathrm{L}x + \mu).$$

C'est le cas particulier rencontré plus haut.

Tout ce calcul se poursuit parallèlement à celui qu'on fait pour intégrer l'équation

(3) $\qquad \alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0, \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ nombres constants})$

en tenant compte de ce qu'elle a toujours une intégrale de la forme e^{rt}.

Nous allons montrer que l'équation différentielle (1) se ramène à une équation de la forme (3) par le changement de variable $\quad x = e^t$, qui donne

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = y'_t \frac{1}{e^t}, \qquad y''_{t^2} = \frac{d(y'_t)}{dx} = \frac{d\left(\dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{1}{e^t}\right)}{dt} \cdot \frac{1}{e^t} = \frac{e^t y''_{t^2} - e^t y'_t}{(e^t)^3}.$$

L'équation différentielle devient alors à coefficients constants $\quad ay''_{t^2} + (b - a)y'_t + cy = 0$ et l'on peut immédiatement écrire ses intégrales :

Si r et r' sont distincts, $\qquad y = \lambda e^{rt} + \mu e^{r't} = \lambda(e^t)^r + \mu(e^t)^{r'} = \lambda x^r + \mu x^{r'}$;

Si r et r' sont confondus, $\qquad y = e^{rt}(\lambda t + \mu) = x^r(\lambda \mathrm{L}x + \mu)$.

Peut-être y a-t-il lieu de remarquer que si r et r' sont imaginaires, par exemple $\quad r = p + iq$, on a

$$x^{p+iq} = e^{(p+iq)\mathrm{L}x} = e^{p\mathrm{L}x}(\cos q\mathrm{L}x + i \sin q\mathrm{L}x).$$

4. Nous considérons l'équation différentielle $\quad (ax^2 + \alpha)y'' + bxy' + cy = 0, \quad (\alpha \neq 0)$.

Exprimons que la série entière $\quad y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n + \cdots \quad$ y satisfait.

L'identification donne $\qquad \alpha_{n+2} = -\dfrac{\alpha_n\, c + bn + an(n-1)}{\alpha(n+1)(n+2)}$

Tous les coefficients à indice pair s'exprimeront au moyen de α_0 ; ceux à indice impair au moyen de α_1. On obtient

$$\alpha_{2p} = \frac{(-1)^p \alpha_0 [(2p-2)(2p-3)a + (2p-2)b + c][(2p-4)(2p-5)a + (2p-4)b + c] \cdots [2a + 2b + c]c}{\alpha^p (2p)!},$$

$$\alpha_{2p+1} = \frac{(-1)^p \alpha_1 [(2p-1)(2p-2)a + (2p-1)b + c] \cdots [b + c]}{\alpha^p (2p+1)!}.$$

D'où l'intégrale générale sous la forme $\qquad y = \alpha_0 f(x) + \alpha_1 g(x)$,

$f(x)$ et $g(x)$ étant deux séries entières dont nous allons chercher l'intervalle de convergence.

Pour $f(x)$, le rapport d'un terme au précédent est

$$\frac{\alpha_{2p+2}}{\alpha_{2p}} x^2 = -\frac{2p(2p-1)a + 2pb + c}{(2p+1)(2p+2)\alpha} x^2 ;$$

Pour $g(x)$, il est $\quad \dfrac{\alpha_{2p+1}}{\alpha_{2p-1}} x^2 = -\dfrac{(2p-1)(2p-2)a + (2p-1)b + c}{2p(2p+1)} x^2.$

La limite, quand p croît indéfiniment, de l'un et l'autre de ces rapports est $\quad -\dfrac{a}{\alpha} x^2$.

L'intervalle de convergence de chacune de ces séries est donc $\quad -\sqrt{\left|\dfrac{\alpha}{a}\right|}, \quad -\sqrt{\left|\dfrac{\alpha}{a}\right|}.$

C'est aussi l'intervalle de convergence de l'intégrale générale ; cet intervalle pouvant s'étendre pour des intégrales particulières.

$f(x)$ se réduira à un polynome de degré $2p$ si a_{2p+2} est nul, car les coefficients suivants seront aussi nuls. Cela se produira si l'on a $2p(2p-1)a+2pb+c=0$.

On a un résultat analogue pour $g(x)$ qui se réduit à un polynome de degré $(2p+1)$ si l'on a

$$2p(2p+1)a+(2p+1)b+c=0.$$

En résumé, si l'équation $ar(r-1)+br+c=0$

a une racine entière et positive, l'équation différentielle admet pour intégrales des polynomes déterminés à un facteur constant près.

Si cette équation a deux racines entières et positives, il y a deux cas à considérer :

1° Elles sont de même parité. L'équation différentielle admet parmi ses intégrales des polynomes déterminés à un facteur constant près, dont le degré est la plus petite des racines ;

2° Elles sont de parité différente $f(x)$ et $g(x)$ sont alors des polynomes et toutes les intégrales de l'équation différentielle sont des polynomes

Prenons, comme exemple, l'équation bien connue $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0.$ (n entier)

L'équation du second degré à étudier est

$$-r(r-1)-r+n^2=0, \quad \text{de racines} \quad \pm n.$$

L'équation différentielle considérée admet donc pour intégrales des polynomes de degré n, à coefficients proportionnels.

C'est un résultat classique et ces polynomes sont $\lambda \cos n \operatorname{arc}\cos x$.

Bonnes solutions : MM. Parrod, à Vesoul ; Fougry, à Roanne ; Le Secq des Tournelles, à Lyon ; E. Audibert, à Marseille.

1551. — *Montrer que le polynome* $x^m+mx^{m-1}+m(m-1)x^{m-2}+\cdots+m!\,x+m!$ *n'a pas de racine réelle si* m *est pair et a une seule racine réelle et négative si* m *est impair.*

Posons $f(x)\equiv x^m+mx^{m-1}+m(m-1)x^{m-2}+\cdots+m!\,x+m!$; il est facile de voir que la fonction $e^{-x}f(x)$ est une des primitives de la fonction $-e^{-x}x^m$.

En effet, si nous intégrons par parties, en partant de $\int e^{-x}x^m\,dx$, nous avons successivement

$$\begin{aligned}
\int e^{-x}x^m\,dx &= -x^me^{-x}+m\int x^{m-1}e^{-x}\,dx,\\
\int x^{m-1}e^{-x}\,dx &= -x^{m-1}e^{-x}+(m-1)\int x^{m-2}e^{-x}\,dx,\\
\int x^{m-2}e^{-x}\,dx &= -x^{m-2}e^{-x}+(m-2)\int x^{m-3}e^{-x}\,dx,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\int xe^{-x}\,dx &= -xe^{-x}+\int e^{-x}\,dx,\\
\int e^{-x}\,dx &= -e^{-x}+C.
\end{aligned}$$

Multiplions alors la première par 1, la seconde par m, la troisième par $m(m-1)$, ..., la m^e et la dernière chacune par $m!$ et ajoutons, nous aurons

$$\int x^me^{-x}\,dx=-e^{-x}f(x)+C,$$

ce qui justifie notre assertion.

Alors, si le polynome $f(x)$ avait deux racines distinctes ou une racine multiple, ce seraient des racines négatives, et, d'après le théorème de Rolle, la dérivée de la fonction $e^{-x}f(x)$ admettrait une racine négative aussi, ce qui n'est pas.

On verrait de même que si u désigne un polynome quelconque de degré m, on a

$$\int ue^{-x}\,dx=-e^{-x}(u+u'+u''+\cdots+u^{(m)})+C.$$

Bonnes solutions : MM. J. et G., à Poitiers ; A. Darmon ; L. Simon ; G. Fougry, à Roanne ; A. Gaunard ; M. Lamotte ; Amblard ; P. Beteille ; I. de Saint-Sernin ; P. Brizard ; A. Cotty ; D. Georgescu.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1536. — *On donne dans un plan trois points* A, B, C. *Par chacun des points* B *et* C, *on mène une droite parallèle à une direction* Δ, *et on considère la polaire du point* A *par rapport à la conique dégénérée constituée par ces deux droites. Quand la direction* Δ *varie, cette polaire enveloppe une parabole* P_A. *Il existe de même deux autres paraboles* P_B, P_C.

2° *Les trois points* A, B, C *et les trois foyers* F_A, F_B, F_C *sont six points d'un même cercle.*

3° *Les trois paraboles sont inscrites dans le triangle* ABC. *Il existe en outre quatre coniques inscrites dans ce même triangle et tangentes chacune aux trois paraboles. Ce sont trois hyperboles et une ellipse. Les centres des hyperboles sont sur l'ellipse. Soit* G *le centre de cette ellipse.*

4° *Le diamètre conjugué de la direction d'un des côtés du triangle* ABC *dans la parabole relative au sommet opposé est un axe de symétrie oblique relatif à la même direction de la figure constituée par les deux autres paraboles. On déduira de là que, si l'on considère le triangle curviligne limité à la parabole* P_A *et aux tangentes* AB *et* BC, *puis le triangle limité à la même parabole et aux tangentes* AC *et* BC *et enfin les quatre autres triangles analogues relatifs aux deux autres paraboles, le centre de gravité de l'aire des six triangles envisagés ensemble est le point* G.

1. Il est désirable de pouvoir passer des éléments de l'une des trois paraboles aux éléments correspondants des deux autres, sans nouveaux calculs, par permutation circulaire. Nous le pouvons en faisant jouer aux trois points A, B, C des rôles entièrement symétriques, c'est-à-dire en prenant le triangle ABC pour triangle de référence. Soient alors

$$X \equiv a_1x + b_1y + c_1z = 0, \qquad Y \equiv a_2x + b_2y + c_2z = 0, \qquad Z \equiv a_3x + b_3y + c_3z = 0$$

les équations des côtés BC, CA, AB par rapport à un système d'axes xOy du plan. Nous appellerons D le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

et nous désignerons le coefficient de chaque élément par la même lettre que lui, majuscule, et affectée du même indice.

Les équations $Y + \lambda X = 0$, $Z + \mu X = 0$, dont les développements sont respectivement

$$(a_2 + \lambda a_1)x + (b_2 + \lambda b_1)y + (c_2 + \lambda c_1)z = 0 \qquad \text{et} \qquad (a_3 + \mu a_1)x + (b_3 + \mu b_1)y + (c_3 + \mu c_1)z = 0$$

représentent deux droites passant respectivement par les points C et B. Ces droites seront parallèles à la condition que

$$\frac{a_2 + \lambda a_1}{b_2 + \lambda b_1} = \frac{a_3 + \mu a_1}{b_3 + \mu b_1}, \qquad \text{ce qui s'écrit}$$

$$(1) \qquad C_1 - \lambda C_2 - \mu C_3 = 0;$$

en sorte que l'équation ponctuelle de la conique constituée par l'ensemble de deux droites parallèles issues des points B et C sera, λ et μ vérifiant la relation précédente,

$$f(X, Y, Z) \equiv (Y + \lambda X)(Z + \mu X) = 0.$$

Les coordonnées triangulaires X_0, Y_0, Z_0 du point A étant 1, 0, 0, l'équation de sa polaire est

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial X} \equiv 2\lambda\mu X + \mu Y + \lambda Z = 0.$$

Les coordonnées triangulaires de cette droite sont $\dfrac{U}{2\lambda\mu} = \dfrac{V}{\mu} = \dfrac{W}{\lambda}$.

Tirant de là les valeurs de λ et μ et les portant dans la relation (1), nous obtenons, en coordonnées

triangulaires. l'équation tangentielle de l'enveloppe de la polaire de A

$$(3) \qquad 2C_1VW - C_2WU - C_3UV = 0.$$

Cette équation représente une conique inscrite dans le triangle de référence.

Si l'on y remplace U, V, W par les quantités proportionnelles connues

$$\frac{U}{A_1u + B_1v + C_1w} = \frac{V}{A_2u + B_2v + C_2w} = \frac{W}{A_3u + B_3v + C_3w},$$

on voit que le coefficient de w^2 est nul, ce qui est la caractéristique de l'équation tangentielle d'une parabole.

L'équation (3) représente donc une parabole inscrite dans le triangle ABC ; c'est la parabole P_A. Les paraboles P_B, P_C se déduisent de la précédente par permutation circulaire. Elles ont pour équations tangentielles

$$2C_2WU - C_3UV - C_1VW = 0, \qquad 2C_3UV - C_1VW - C_2WU = 0.$$

Elles sont également inscrites dans le triangle ABC.

2. Les trois paraboles étant inscrites dans le triangle ABC, nous en concluons immédiatement que les six points A, B, C, F_A, F_B, F_C sont sur un même cercle. On sait en effet que le cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes à une parabole passe par le foyer.

D'ailleurs nous pouvons vérifier analytiquement que le foyer F_A par exemple est un point du cercle mentionné. L'équation du dit cercle, circonscrit au triangle de référence, est de la forme

$$(4) \qquad pYZ + qZX + rXY = 0.$$

Désignons par α, β, γ ; α', β', γ' les coordonnées triangulaires des points cycliques.

Les deux tangentes isotropes à la parabole P_A sont données par l'équation (2) dans laquelle on remplace successivement λ et μ par $-\frac{\beta}{\alpha}$, $-\frac{\gamma}{\alpha}$ et $-\frac{\beta'}{\alpha'}$, $-\frac{\gamma'}{\alpha'}$.

Les coordonnées de F_A sont alors données par l'intersection des droites

$$2\beta\gamma X - \gamma\alpha Y - \alpha\beta Z = 0, \qquad 2\beta'\gamma' X - \gamma'\alpha' Y - \alpha'\beta' Z = 0$$

et sont proportionnelles aux quantités

$$\alpha\alpha'(\gamma\beta' - \beta\gamma'), \qquad \beta\beta'(\gamma\alpha' - \alpha\gamma'), \qquad \gamma\gamma'(\alpha\beta' - \beta\alpha').$$

S'il est possible que la conique représentée par l'équation (4), et qui ne dépend plus que de deux paramètres arbitraires passe par les deux points cycliques et le foyer F_A, le déterminant des coefficients de p, q, r, dans les trois équations homogènes et linéaires que l'on obtient en substituant dans l'équation (4) les coordonnées des points sus-mentionnés, doit être nul, et réciproquement ce déterminant étant nul le cercle circonscrit à ABC passera par F_A. Ce déterminant

$$\begin{vmatrix} 2\beta\beta'\gamma\gamma'(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')(\alpha\beta' - \beta\alpha') & \gamma\gamma'\alpha\alpha'(\alpha\beta' - \beta\alpha')(\gamma\beta' - \beta\gamma') & \alpha\alpha'\beta\beta'(\beta\gamma' - \beta'\gamma)(\gamma\alpha' - \alpha\gamma') \\ \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \\ \beta'\gamma' & \gamma'\alpha' & \alpha'\beta' \end{vmatrix}$$

développé par rapport aux éléments de la première ligne, s'écrit

$$\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'[2(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')(\alpha\beta' - \beta\alpha')(\gamma\beta' - \beta\gamma') - (\alpha\beta - \beta\alpha)(\beta'\gamma' - \beta'\gamma)(\gamma\alpha' - \alpha\gamma) + (\gamma\beta' - \beta\gamma)(\gamma'\alpha' - \alpha'\gamma)(\alpha\beta' - \beta\alpha)].$$

On aperçoit tout de suite que le crochet est nul, les termes se détruisant deux à deux. Le cercle circonscrit au triangle ABC passe par les trois foyers des trois paraboles P_A, P_B, P_C.

3. Soit Γ une conique inscrite dans le triangle ABC. Si elle est tangente à une parabole P, elle ne pourra toucher celle-ci qu'en un de ses points de contact avec les côtés du triangle. S'il en était autrement, elle aurait avec elle cinq tangentes communes, deux infiniment voisines au point de contact, et en

outre les trois côtés du triangle. Les deux coniques seraient confondues. Or l'équation de la conique Γ est de la forme

$$\alpha_1 VW + \alpha_2 WU + \alpha_3 UV = 0.$$

Pour exprimer que cette conique est tangente à la parabole P_A, il nous suffira d'exprimer que son point de contact avec l'un des côtés du triangle ABC coïncide avec le point de contact de P_A avec ce même côté.

Le côté $BC(V = 0,\ W = 0)$ touche Γ au point dont l'équation tangentielle est $\alpha_2 W + \alpha_3 V = 0$ et la parabole P_A au point $C_2 W + C_3 V = 0$.

Le côté $CA(W = 0,\ U = 0)$ touche Γ au point $\alpha_1 W + \alpha_3 U = 0$ et P_A au point

$$2C_1 W - C_3 U = 0.$$

Le côté $AB(U = 0,\ V = 0)$ touche Γ au point $\alpha_1 V + \alpha_2 U = 0$ et P_A au point

$$2C_1 V - C_2 U = 0.$$

Donc pour que la conique Γ soit tangente à la parabole P_A, il faut et il suffit que ses paramètres b, b', b'' vérifient l'une des relations

$$\frac{\alpha_1}{2C_1} = \frac{\alpha_2}{-C_2}, \qquad \frac{\alpha_1}{2C_1} = \frac{\alpha_3}{-C_3}, \qquad \frac{\alpha_2}{C_2} = \frac{\alpha_3}{C_3}.$$

Par suite, la conique Γ sera tangente à chacune des trois paraboles P_A, P_B, P_C, à la condition que α_1, α_2, α_3 vérifient l'une des égalités de chacun des trois groupes :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\alpha_2}{C_2} = \dfrac{\alpha_3}{C_3}, \\ \dfrac{\alpha_1}{2C_1} = \dfrac{\alpha_3}{-C_3}, \\ \dfrac{\alpha_1}{2C_1} = \dfrac{\alpha_2}{-C_2}; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\alpha_3}{C_3} = \dfrac{\alpha_1}{C_1}, \\ \dfrac{\alpha_2}{2C_2} = \dfrac{\alpha_1}{-C_1}, \\ \dfrac{\alpha_2}{2C_2} = \dfrac{\alpha_3}{-C_3}; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\alpha_1}{C_1} = \dfrac{\alpha_2}{C_2}, \\ \dfrac{\alpha_3}{2C_3} = \dfrac{\alpha_2}{-C_2}, \\ \dfrac{\alpha_3}{2C_3} = \dfrac{\alpha_1}{-C_1}. \end{array}\right.$$

les deux derniers groupes étant déduits du premier par permutation circulaire. Il est alors aisé de voir que les seuls cas possibles sont

$$\frac{\alpha_1}{C_1} = \frac{\alpha_2}{C_2} = \frac{\alpha_3}{C_3}, \qquad \frac{\alpha_1}{2C_1} = \frac{\alpha_2}{2C_2} = \frac{\alpha_3}{-C_3}, \qquad \frac{\alpha_1}{2C_1} = \frac{\alpha_2}{-C_2} = \frac{\alpha_3}{2C_3}, \qquad \frac{\alpha_1}{-C_1} = \frac{\alpha_2}{2C_2} = \frac{\alpha_3}{2C_3},$$

ce qui donne lieu aux quatre coniques représentées par les équations tangentielles :

$$C_1 VW + C_2 WU + C_3 UV = 0, \tag{6}$$

$$2C_1 VW + 2C_2 WU - C_3 UV = 0, \tag{7}$$

$$2C_1 VW - C_2 WU + 2C_3 UV = 0, \tag{8}$$

$$-C_1 VW + 2C_2 WU + 2C_3 UV = 0. \tag{9}$$

Partant de l'équation tangentielle homogène $f(u, v, w)$ d'une courbe, on sait que l'on en obtient l'équation ponctuelle en substituant dans l'équation de la droite la plus générale du plan,

$$ux + vy + wz = 0,$$

les valeurs de u, v, w tirées, en fonction de x, y, z du système d'équations

$$f_u = x, \qquad f_v = y, \qquad f_w = z.$$

Appliquons ce procédé ici. Pour la première conique par exemple, nous avons le système d'équations

$$C_3 v + C_2 w = x, \qquad C_3 u + C_1 w = y, \qquad C_2 u + C_1 v = z,$$

d'où nous tirons, comme quantités proportionnelles à u, v, w,

$$C_1(C_2 y + C_3 z - C_1 x), \qquad C_2(C_3 z + C_1 x - C_2 y), \qquad C_3(C_1 x + C_2 y - C_3 z).$$

L'équation ponctuelle de la conique est alors, toutes réductions effectuées,

(6 *bis*) $$C_1^2X^2 + C_2^2Y^2 + C_3^2Z^2 - 2C_2C_3YZ - 2C_3C_1ZX - 2C_1C_2XY = 0.$$

Pour les trois autres coniques, on trouve, par le même procédé, les équations

(7 *bis*) $$4C_1^2X^2 + 4C_2^2Y^2 + C_3^2Z^2 + 4C_2C_3YZ + 4C_3C_1ZX - 8C_1C_2XY = 0,$$

(8 *bis*) $$4C_3^2Z^2 + 4C_1^2X^2 + C_2^2Y^2 + 4C_1C_2XY + 4C_2C_3YZ - 8C_3C_1ZX = 0,$$

(9 *bis*) $$4C_2^2Y^2 + 4C_3^2Z^2 + C_1^2X^2 + 4C_3C_1ZX + 4C_1C_2XY - 8C_2C_3YZ = 0.$$

Pour reconnaître le genre de ces coniques, coupons-les par la droite de l'infini dont l'équation est

$$Dz \equiv C_1X + C_2Y + C_3Z = 0.$$

En faisant par exemple $X = -\dfrac{C_2Y + C_3Z}{C_1}$ dans les équations ponctuelles précédentes, on reconnaît sans peine que l'équation (6 *bis*) représente une ellipse, et les trois autres des hyperboles.

Nous savons, d'autre part, que l'équation tangentielle du centre d'une conique $f(U, V, W) = 0$ est $\dfrac{\partial f}{\partial w} \equiv C_1\dfrac{\partial f}{\partial U} + C_2\dfrac{\partial f}{\partial V} + C_3\dfrac{\partial f}{\partial W} = 0$; cette équation se met sous la forme $\alpha U + \beta V + \gamma W = 0$ et les coordonnées triangulaires du centre sont proportionnelles à α, β, γ.

On trouve ainsi que l'équation tangentielle du centre de l'hyperbole (7) est

$$C_2C_3U + C_3C_1V + 4C_1C_2W = 0,$$

et on vérifie en substituant C_2C_3, C_3C_1, $4C_1C_2$ dans l'équation (6 *bis*) que ce point est sur l'ellipse. On ferait les mêmes calculs pour les autres hyperboles.

Remarquons que l'équation tangentielle du centre de l'ellipse est $C_2C_3U + C_3C_1V + C_1C_2W = 0$; ses coordonnées triangulaires sont donc $\dfrac{X}{C_2C_3} = \dfrac{Y}{C_3C_1} = \dfrac{Z}{C_1C_2}$.

4. L'équation ponctuelle de la parabole P_A est

$$\varphi(X, Y, Z) \equiv 4C_1^2X^2 + C_2^2Y^2 + C_3^2Z^2 - 2C_2C_3YZ + 4C_3C_1ZX + 4C_1C_2XY = 0.$$

Le diamètre conjugué de la direction BC est la polaire du point d'intersection de BC, $(X = 0)$, et de la droite de l'infini $(C_1X + C_2Y + C_3Z = 0)$, dont les coordonnées sont $0, C_3, -C_2$.

L'équation de ce diamètre est alors $C_3\dfrac{\partial\varphi}{\partial Y} - C_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial Z} = 0$, c'est-à-dire $C_2Y - C_3Z = 0$.

Nous reconnaissons l'équation de la médiane issue de A dans le triangle ABC. De plus on voit aisément que le point G, centre de l'ellipse, est sur cette droite. Donc les trois diamètres conjugués des directions BC, CA, AB dans les paraboles P_A, P_B, P_C sont les trois médianes du triangle ABC et concourent au centre G de l'ellipse confondu avec le centre de gravité du triangle ABC.

Une droite parallèle au côté BC aura pour équation $(C_1 + \lambda)X + C_2Y + C_3Z = 0$.

Si nous portons la valeur de X tirée de là dans l'équation de la parabole P_B,

$$4C_2^2Y^2 + C_3^2Z^2 + C_1^2X^2 - 2C_3C_1ZX + 4C_1C_2XY + 4C_2C_3YZ = 0,$$

nous obtiendrons l'équation quadratique des rayons projetant du point A les points d'intersection de la parabole et de la droite. On trouvera deux valeurs m et m' pour le rapport $\dfrac{C_2Y}{C_3Z}$ annulant cette équation.

Si on fait la même opération avec la parabole P_C, qui s'obtient à partir de P_B en échangeant C_2Y et C_3Z entre eux, $4C_3^2Z^2 + C_2^2Y^2 + C_1^2X^2 - 2C_1C_2XY + 4C_3C_1ZX + 4C_2C_3YZ = 0$, on trouvera les mêmes valeurs m et m' pour le rapport $\dfrac{C_3Z}{C_2Y}$, soit $\dfrac{1}{m}$ et $\dfrac{1}{m'}$ pour $\dfrac{C_2Y}{C_3Z}$.

Enfin les droites projetant de A les points de rencontre de la sécante parallèle à BC avec la droite de l'infini et avec le diamètre conjugué dont on a parlé sont

$$\frac{C_2Y}{C_3Z} = -1, \qquad \text{et} \qquad \frac{C_2Y}{C_3Z} = +1;$$

ces deux droites sont harmoniques par rapport au couple

$$\frac{C_2Y}{C_3Z} = m, \qquad \frac{C_2Y}{C_3Z} = \frac{1}{m} \qquad \text{et au couple} \qquad \frac{C_2Y}{C_3Z} = m', \qquad \frac{C_2Y}{C_3Z} = \frac{1}{m'}.$$

On voit donc que chaque point d'intersection de la parabole P_B avec la sécante peut être accouplé avec un point d'intersection de P_C et de la sécante, en sorte que l'on ait un segment de droite dont le milieu soit sur la droite $C_2Y - C_3Z = 0$.

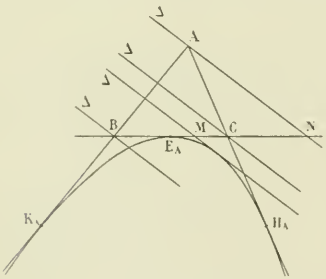
Ce diamètre de la parabole P_A est donc diamètre de la figure constituée par les deux autres paraboles

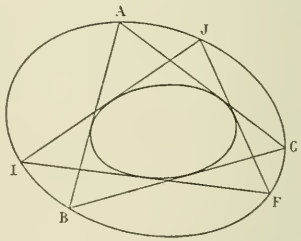
Étant encore diamètre du triangle ABC, en tant que médiane, relativement toujours à la direction BC, c'est en définitive un diamètre de la figure constituée par les six triangles curvilignes mentionnés dans l'énoncé. Il en est de même des autres médianes du triangle ABC, et le centre de gravité de cette figure est par suite au point de rencontre de ces trois médianes, c'est-à-dire au centre G de l'ellipse.

E. AUDIBERT, élève au lycée de Marseille, et Z.

Bonnes solutions, partiellement géométriques, de MM. P. Brizard ; G. et J., à Poitiers ; Simon, à Paris.

Solution géométrique. — 1° Par B et C nous menons deux droites parallèles entre elles, mais de direction variable BΔ, CΔ. Soit MΔ la polaire du point A par rapport à la conique constituée par ces deux premières droites, qui coupe BC en M, et soit N l'intersection de AΔ et BC. M étant donné, son conjugué harmonique N par rapport au couple BC est déterminé, par suite AΔ, et la direction Δ. Réciproquement, se donner cette direction revient à se donner N qui détermine M. Entre le point M sur BC et le point Δ sur la droite de l'infini existe une correspondance homographique. MΔ enveloppe une conique, une parabole tangente à BC. Quand la direction Δ est celle du côté AB, N et M sont confondus en B, et la droite MΔ est confondue avec le côté AB auquel la parabole est par suite tangente. La parabole P_A également tangente à AC est inscrite dans le triangle ABC. Il en est de même des paraboles P_B, P_C.

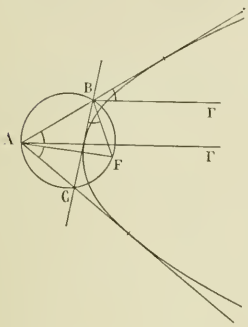




Le point de contact de P_A avec BC est à la limite du point M lorsque la direction Δ tend vers la direction BC. Dans ce cas N s'éloigne indéfiniment. Le point de contact est donc le milieu E_A du segment BC. Lorsque la direction Δ tend vers la direction AB, le rapport des distances infiniment petites de la droite BΔ aux droites AΔ et MΔ tend vers l'unité. On en déduit que le point de contact de P_A avec le côté AB est le symétrique de A par rapport à B. Le point de contact avec AC est déterminé de la même façon. Quand N vient en E_A, M s'éloigne indéfiniment. La direction asymptotique est la direction AE_A. Les paraboles P_B, P_C jouissent des propriétés correspondantes.

2. Il faut montrer simplement que le foyer F d'une parabole P inscrite dans un triangle ABC est sur le cercle circonscrit audit triangle. C'est un résultat connu, qu'on peut retrouver en remarquant que puisqu'il existe un premier triangle circonscrit à la parabole, inscrit au cercle il en existe une infinité, et qu'on peut prendre une tangente quelconque de la parabole comme côté d'un tel triangle. Soit par exemple la droite de l'infini qui coupe le cercle aux points isotropes I et J. D'après le théorème que nous venons de rappeler, les tangentes menées à la parabole par ces deux points se couperont en un point F du cercle. Ce point est le foyer. On peut aussi le voir par des propriétés élémentaires de la parabole. D'après le théorème de Poncelet, les deux angles

marqués en A sur la figure sont égaux entre eux, de même que les deux angles marqués en B. Les droites AΓ, BΓ sont des parallèles à l'axe. Mais un des angles en A est égal à un angle en B comme correspondants. Les deux autres angles CAF et CBF sont par suite égaux, et le quadrilatère ABCF est inscriptible.



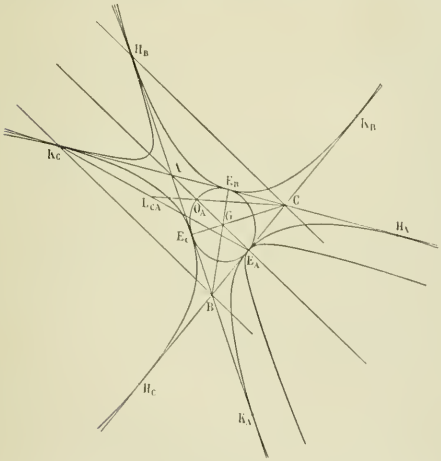
On peut encore démontrer cette partie du problème par ce fait que la tangente au sommet de la parabole P est une droite de Simson du triangle ABC.

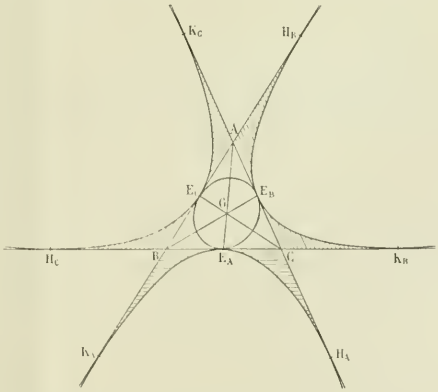
3. Dans la solution analytique publiée ci-dessus nous avons montré que les coniques que nous avons à trouver sont nécessairement tangentes à chacune des paraboles en des points de contact de celles-ci avec les côtés du triangle ABC. Appelons E_A, H_A, K_A les points de contact de la parabole P_A avec les côtés BC, CA et AB, E_B, H_B, K_B, E_C, H_C, K_C les points relatifs aux paraboles P_B, P_C, obtenus à partir des premiers par permutation circulaire.

Les groupes de trois points pris parmi les E, H ou K, tels que dans un même groupe il n'y ait pas deux points d'un même côté du triangle ABC ou d'une même parabole P sont :

E_A, E_B, E_C ; E_A, H_B, K_C ; E_B, H_C, K_A ; E_C, H_A, K_B ; H_A, H_B, H_C ; K_A, K_B, K_C.

Pour chacun des groupes nous avons à voir s'il existe une conique inscrite dans le triangle ABC dont les points de contact avec les côtés soient précisément les trois points du groupe. Notre critérium sera le suivant. Ce sera oui si les trois droites joignant chaque sommet au point du groupe porté par le côté opposé sont concourantes (cas particulier du théorème de Brianchon) ; ce sera non dans le cas contraire. Les droites AE_A, BE_B, CE_C sont concourantes au point G, centre de gravité du triangle ABC en tant que médianes dudit triangle. Il existe une conique correspondant au premier groupe. Les droites AE_A, BK_C, CH_B sont parallèles, et par suite concourantes. Il existe donc une conique correspondant au second groupe. Il en correspond alors une à chacun des deux groupes suivant. Pour les deux derniers groupes, il ne leur correspond aucune





solution. Les droites AH_C, BH_A, CH_B d'une part et les droites AK_B, BK_C, CK_A d'autre part ne sont pas concourantes.

La conique correspondant au groupe E_A, E_B, E_C est une ellipse admettant le point G comme centre. En effet le diamètre relatif à la direction BC doit passer en E_A et au milieu du segment E_BE_C. C'est donc AE_A. BE_B et CE_C sont de même diamètres, et G est centre. Par suite le milieu O_A de AG est sur la conique. Les points A et G ne sont pas par suite dans la même région du plan par rapport à ladite conique. De A on peut lui mener deux tangentes réelles. De G on ne le peut pas, et c'est alors une ellipse.

La conique correspondant au groupe E_A, H_B, K_C est une hyperbole admettant pour centre le point O_A. Il est d'abord immédiat que AE_A est le diamètre relatif à la direction BC.

Les deux tangentes issues de C sont CE_A et CK_C. La droite joignant C au milieu L_{CA} du segment E_AK_C est alors diamètre. Cette médiane du triangle CE_AK_C coupe la médiane E_AA à ses deux tiers, c'est-à-dire au point O_A défini comme il a été fait plus haut.

La conique a donc son centre sur l'ellipse déjà trouvée. Les points O_A et A sont dans la même région du plan par rapport à la conique. De A on mène deux tangentes réelles. On peut par suite le faire aussi du centre. C'est une hyperbole. Les coniques correspondant aux groupes de points $E_BH_CK_A$, $E_CH_AK_B$ sont également des hyperboles jouissant des propriétés correspondantes.

4. La médiane AE_A du triangle ABC est diamètre relatif à la direction BC dudit triangle, de la parabole P_A, et de la figure constituée par les parabole P_B, P_C. En effet, la figure obtenue par symétrie oblique par rapport à ladite droite et à ladite direction à partir de la parabole P_B par exemple est une parabole ayant en commun avec P_C les points E_C, H_C, K_C, et les tangentes en lesdits points; c'est donc la parabole P_C elle-même. En définitive, AE_A est diamètre de la figure constituée par les six triangles curvilignes mentionnés dans l'énoncé.

Il en est de même de BE_B et CE_C. Le point G est le centre de gravité de l'aire des six triangles envisagés simultanément. Z.

Solutions géométriques de MM. G. Pélissier, à Toulouse; G. Cotty, élève de l'Ecole Normale Supérieure; André Cotty, élève au lycée de Dijon; R. Auscher, soldat au 159e d'infanterie.

Assez bonnes solutions : MM. R. Palausi, lycée Henri IV; H. Masson, 4e génie, à Besançon; Jules Yernaux, étudiant, Ecole des Mines, Mons; Parrod.

CONCOURS DE 1907 (*Suite*)

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES

Mathématiques.

1627. — On considère, dans la parabole $y^2 - 2px = 0$, (axes rectangulaires) les cordes dont la longueur est $2p\sqrt{2}$.

1° Trouver le lieu de leurs milieux;

2° Calculer l'aire qui est comprise entre le lieu et la droite $x = p$, et qui est située du même côté de cette droite que l'origine;

3° Trouver et construire le lieu des points où deux des cordes considérées se croisent à angle droit.

Mécanique.

I. — **1628.** On donne une circonférence C et une droite D. La droite est oblique sur le plan de la circonférence et ne passe pas par le centre. Un point matériel P, mobile sans frottement sur la circonférence, est attiré vers la droite par une force perpendiculaire à celle-ci et proportionnelle à la distance du point à la droite. Trouver les positions d'équilibre de P. Examiner en particulier les deux cas suivants :

1° La droite D rencontre la droite Δ menée par le centre, perpendiculairement au plan de C;

2° Le plan de C contient la perpendiculaire commune à D et Δ.

II. — **1629.** Un point parcourt une développante de cercle, de telle façon que la tangente tourne avec une vitesse angulaire constante. Déterminer la vitesse et l'accélération totale de ce point. Construire l'hodographe du mouvement.

Physique.

I. — Comment détermine-t-on les éléments qui caractérisent la *direction* du champ magnétique terrestre en un lieu donné?

II. — **1630.** Du liquide glycérique de densité $\delta = 1,1$ s'élève à une hauteur moyenne h de 1^{cm} dans un tube de verre vertical dont le diamètre intérieur, $2r$, égale $0^{cm},1$.

a). Calculer en dyne : cm. la constante capillaire A de ce liquide en admettant qu'il mouille parfaitement le verre.

On emploie ce liquide pour souffler une bulle de 8^{cm} de diamètre.

b). Quelle est la différence de pression de l'air à l'intérieur et à l'extérieur de cette bulle lorsque son rayon R atteint la valeur 4^{cm}?

c) Quel travail total faut-il dépenser pour l'amener à cette dimension (R = 4) en supposant que la pression extérieure P demeure constante et égale à 1 atmosphère?

(On admettra que la section du tube employé pour gonfler la bulle a une surface absolument négligeable devant celle d'une sphère de 8^{cm} de diamètre).

Toute communication avec l'atmosphère étant supprimée, on électrise la bulle de manière à porter et à maintenir son potentiel U à 20 unités électrostatiques C. G. S; elle se dilate et prend un nouvel état d'équilibre.

d). Calculer la pression électrostatique ϖ qu'elle supporte et l'augmentation correspondante ΔR de son rayon.

QUESTION PROPOSÉE

1631. — Représenter le solide commun à un hyperboloïde et à un cône.

L'hyperboloïde a pour directrices :

1° la verticale A : $x = -4, \quad y = 8$;

2° la ligne de bout B' : $x = 0, \quad z = 12$;

3° la parallèle à la ligne de terre CC' : $y = 12, \quad z = 8$.

Le cône a son sommet sur l'hyperboloïde au point S, S' ($x = 2, \quad y = 11, \quad z = 10$).

Sa directrice se projette horizontalement suivant la circonférence Γ ayant pour centre ($x = 5, \quad y = 14$) et passant par S; verticalement suivant la circonférence Γ' ayant pour centre ($x = 5, \quad z = 7$) et passant par S'. (On choisira naturellement l'ellipse Γ, Γ' qui ne passe pas par le sommet du cône.)

On calculera en degrés ou grades, les angles des tangentes à la projection horizontale de la courbe en S avec la ligne de terre.

(Ecole normale supérieure et Bourses de Licence, 1907.)

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

1569. — 1° *Trouver les nombres p et q pour lesquels il existe une primitive* F(*x*) *de la fonction*

$$(x^2 + px + q)e^{-x},$$

qui soit nulle pour $x = +\infty$ *et qui admette le nombre* 1 *pour racine double.*

2° *Étudier les variations de* F(*x*), *et aussi la série dont le terme général est* $u_n = F(n)$.

3° *Étudier pour toutes les valeurs réelles de x la série dont le terme général est*

$$u_n = \frac{n^{2}}{x^n + \mathrm{L}n}.$$

1. En intégrant par parties, nous trouvons immédiatement

$$\int (x^2 + px + q)e^{-x}dx = -(x^2 + px + q)e^{-x} + \int (2x + p)e^{-x}dx,$$

puis,

$$\int (2x + p)e^{-x}dx = -(2x + p)e^{-x} + 2\int e^{-x}dx;$$

cette dernière intégrale est immédiate et l'on a finalement

$$\int (x^2 + px + q)e^{-x}dx = -[x^2 + (p + 2)x + q + p + 2]e^{-x} + A,$$

A étant une constante qui se détermine aisément par la condition que cette primitive soit nulle pour $x = +\infty$; on trouve ainsi $A = 0$.

Exprimons alors que le trinome $x^2 + (p + 2)x + p + q + 2$ est identique à $(x - 1)^2$; nous avons

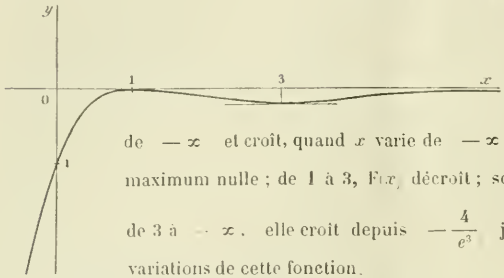
$$p + 2 = -2, \qquad p + q + 2 = 1;$$

d'où, nous déduisons

$$p = -4, \qquad q = 3.$$

La primitive cherchée $F(x)$ est donc $F(x) = -(x-1)^2 e^{-x}$,
et sa dérivée,

$$f(x) = (x^2 - 4x + 3)e^{-x}.$$



2. Les racines de la dérivée sont 1 et 3 ; elle est positive de $-\infty$ à 1 et de 3 à $+\infty$, et négative de 1 à 3. Les variations de $F(x)$ s'en suivent. Cette fonction est toujours négative ; elle part de $-\infty$ et croît, quand x varie de $-\infty$ à 1 ; pour $x = 1$, elle atteint une valeur maximum nulle ; de 1 à 3, $F(x)$ décroît ; son minimum $F(3)$ est égal à $-\frac{4}{e^3}$: enfin de 3 à $+\infty$, elle croît depuis $-\frac{4}{e^3}$ jusqu'à 0. La courbe ci-contre représente les variations de cette fonction.

La série $u_n = F(n)$ est une série négative. Le rapport d'un terme au précédent,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2 e^{-(n+1)}}{(n-1)^2 e^{-n}},$$

a pour limite e^{-1} ou $\frac{1}{e}$, pour $n = +\infty$. Donc la série est convergente.

3. Envisageons maintenant la série $u_n = \frac{n^{2x}}{x^n + \mathrm{L}n}$.

Si x est positif et plus petit que 1, x^n tend vers 0, et la série u_n est de même espèce que la série

$$v_n = \frac{n^{2x}}{\mathrm{L}n}.$$

Or v_n grandit indéfiniment avec n ; la série v est manifestement divergente. Pour $x = 1$, même raisonnement, même résultat.

Si x est positif et plus grand que 1, la série u_n est de même espèce que la série $v_n = \frac{n^{2x}}{x^n}$, et celle-ci est manifestement convergente, comme on le voit en formant le rapport d'un terme au précédent.

Supposons maintenant x négatif, et posons $x = -x'$; nous aurons

$$u_n = \frac{1}{n^{2x'}[(-x')^n + \mathrm{L}n]}.$$

Si x' est plus petit que 1, $(-x')^n$ ou $\pm x^n$ tend vers 0, la série est de même espèce que la série

$$v_n = \frac{1}{n^{2x'}\mathrm{L}n},$$

et celle-ci est convergente pour $x' > \frac{1}{2}$ et divergente pour $0 \leqslant x' \leqslant \frac{1}{2}$.

Enfin si $x' > 1$, la série est alternée, et, en ne considérant que les valeurs absolues, elle est de même espèce que

$$v_n = \frac{1}{n^{2x'} x'^n};$$

elle est convergente.

En résumé, pour $x > 1$, la série est convergente ; pour $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$, la série est divergente ; pour $x < -\frac{1}{2}$, la série est convergente.

Marius BOURSEYRE, au 54e de ligne à Compiègne.

Dans toutes les autres solutions, la troisième partie est fausse.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1560. — *On donne une ellipse* (E) *et deux points fixes du plan* P *et* P'. *On mène par* P *et* P' *deux cordes* AB, A'B' *parallèles et de direction variable.* 1° *Montrer que l'axe radical des cercles ayant pour diamètres* AB *et* A'B' *passe par un point* Q ; 2° *Si le point* P *reste fixe et si le point* P' *décrit une courbe, le lieu du point* Q *est une courbe de même degré.*

1. Soient $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes et (x_0, y_0), (x_1, y_1) les coordonnées des points P et P'.

Considérons une sécante quelconque passant par le point P

$$y - y_0 = m(x - x_0);$$

elle rencontre l'ellipse en deux points A et B, et l'on sait que si l'on désigne par (x', y') et (x'', y'') les coordonnées de ces deux points, l'équation du cercle décrit sur AB comme diamètre est

$$(x - x')(x - x'') + (y - y')(y - y'') = 0$$

ou

$$x^2 + y^2 - x(x' + x'') - y(y' + y'') + x'x'' + y'y'' = 0.$$

Or x' et x'' sont racines de l'équation obtenue en éliminant y entre les équations de l'ellipse et de la sécante

$$b^2x^2 + a^2(mx + y_0 - mx_0)^2 - a^2b^2 = 0,$$

ou

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2m(y_0 - mx_0)x + a^2(y_0 - mx_0)^2 - a^2b^2 = 0.$$

On en déduit

$$x' + x'' = -\frac{2a^2m(y_0 - mx_0)}{b^2 + a^2m^2}, \qquad x'x'' = a^2\frac{(y_0 - mx_0)^2 - b^2}{b^2 + a^2m^2}.$$

On pourrait calculer $y' + y''$ et $y'y''$ en formant l'équation aux y des points A et B; mais il est plus simple d'observer que $y' + y''$ et $y'y''$ se déduisent respectivement de $x' + x''$ et $x'x''$ en changeant a en b, b en a, x_0 en y_0, y_0 en x_0 et m en $\frac{1}{m}$. On a ainsi

$$y' + y'' = \frac{2b^2(y_0 - mx_0)}{b^2 + a^2m^2}, \qquad y'y'' = b^2\frac{(y_0 - mx_0)^2 - a^2m^2}{b^2 + a^2m^2}.$$

Il est alors facile d'écrire l'équation du cercle qui a pour diamètre le segment AB ; c'est

$$x^2 + y^2 + \frac{2a^2m(y_0 - mx_0)}{b^2 + a^2m^2}x - \frac{2b^2(y_0 - mx_0)}{b^2 + a^2m^2}y + \frac{(a^2 + b^2)(y_0 - mx_0)^2 - a^2b^2(m^2 + 1)}{b^2 + a^2m^2} = 0.$$

De même, l'équation du cercle décrit sur A'B' comme diamètre est

$$x^2 + y^2 + \frac{2a^2m(y_1 - mx_1)}{b^2 + a^2m^2}x - \frac{2b^2(y_1 - mx_1)}{b^2 + a^2m^2}y + \frac{(a^2 + b^2)(y_1 - mx_1)^2 - a^2b^2(m^2 + 1)}{b^2 + a^2m^2} = 0;$$

et en retranchant ces deux équations, nous obtenons l'équation de l'axe radical des deux cercles. On trouve ainsi, après avoir multiplié la différence par $b^2 + a^2m^2$ et l'avoir divisée par $y_0 - mx_0 - (y_1 - mx_1)$,

$$2a^2mx - 2b^2y + (a^2 + b^2)[y_0 - mx_0 + y_1 - mx_1] = 0,$$

ou

$$m[2a^2x - (a^2 + b^2)(x_0 + x_1)] - [2b^2y - (a^2 + b^2)(y_0 + y_1)] = 0,$$

et l'on voit immédiatement que cette droite passe par un point fixe Q, qui a pour coordonnées

$$x = \frac{(a^2 + b^2)(x_0 + x_1)}{2a^2}, \qquad y = \frac{(a^2 + b^2)(y_0 + y_1)}{2b^2}.$$

2. De ces équations on tire

$$x_1 = \frac{2a^2x - (a^2 + b^2)x_0}{a^2 + b^2}, \qquad y_1 = \frac{2b^2y - (a^2 + b^2)y_0}{a^2 + b^2}.$$

Supposons que le point P soit fixe et que le point P(x_1, y_1) décrive une courbe algébrique de degré

n ayant pour équation $f(x, y) = 0$. Nous avons alors $f(x_1, y_1) = 0$, ou en remplaçant x_1, y_1 par les valeurs ci-dessus

$$f\left(\frac{2a^2x - (a^2 + b^2)x_0}{a^2 + b^2}, \quad \frac{2b^2y - (a^2 + b^2)y_0}{a^2 + b^2}\right) = 0.$$

Ceci montre que le point $Q(x, y)$ décrit aussi une courbe de degré n.

Y. DUVAL, lycée Hoche (Versailles.)

Solutions analogues par MM. P. Brizard ; capitaine Cadé, à Bizerte ; G. Foucry, à Roanne ; André Gaunard, lycée de Reims ; H. Janois, à Nantes ; R. Manen, à Albi ; G. Pélissier, à Toulouse ; Rebouillat, conducteur des ponts et chaussées, à Langres : L. Simon, instituteur à Doudeville (Seine-Inférieure).

1568. — *Les pieds des normales à une parabole* $y^2 - 2px = 0$, *abaissées d'un point* M *du plan ont pour ordonnées* y_1, y_2, y_3. *Montrer que la somme des six rapports de ces ordonnées est indépendante de la position du point* M *et du paramètre de la parabole.*

Les pieds des normales menées par le point (α, β) à la parabole $y^2 - 2px = 0$ sont définis par les deux équations

$$(\alpha - x)y + p(\beta - y) = 0, \qquad y^2 - 2px = 0.$$

Si nous éliminons x entre ces deux équations, nous obtenons l'équation

$$y^3 - 2p(\alpha - p)y - 2p^2\beta = 0,$$

qui admet comme racines y_1, y_2, y_3, et nous voyons aussitôt que

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

Or la somme des rapports de ces ordonnées peut s'écrire

$$S = \frac{y_2 + y_3}{y_1} + \frac{y_3 + y_1}{y_2} + \frac{y_1 + y_2}{y_3},$$

ou, en remplaçant $y_2 + y_3$ par $-y_1$, $y_3 + y_1$ par $-y_2$ et $y_1 + y_2$ par $-y_3$,

$$S = -1 - 1 - 1 = -3.$$

G. FOUCRY, lycée de Roanne.

Bonnes solutions par MM. P. Albertini, lycée de Nice ; Amblard, conducteur des Ponts et Chaussées, à Ruines ; Marius Rajma, lycée de Nice ; Béteille, à Parizot (Tarn-et-Garonne ; Marius Bourseyre, 54e de ligne, Compiègne ; P. Brizard ; Darmon, étudiant à la Sorbonne ; H. Janois, à Nantes ; Lafosse, lycée Janson ; Liang-Tu, école des Mines, à Mons ; A. Malplat, 140e d'infanterie ; Mamo Frédéric, lycée de Nice ; Rebouillat, à Langres, Paul Sarközy, à Pannonhalma (Hongrie) ; L. Simon, à Doudeville ; J. Soudet, lycée de Rouen ; François de Trouilhoud, école des Anglais, à Lyon.

QUESTIONS PROPOSÉES

1632. — Sachant que

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{m} = \frac{am^{p-1} + bm^{p-2} + \cdots}{a'm^p + b'm^{p-1} + \cdots},$$

trouver la limite de α lorsque m croît indéfiniment.

P. Tribier.

1633. — Trouver la limite de

$$\left(1 + \frac{am^{p-1} + bm^{p-2} + \cdots}{a'm^p + b'm^{p-1} + \cdots}\right)^m,$$

quand m augmente indéfiniment.

P. Tribier.

1634. — On donne un cercle et un diamètre fixe AB de ce cercle, et on considère un point M variable sur ce cercle. Trouver et construire la courbe lieu des pieds des bissectrices de l'angle B du triangle MAB.

E.-N. Barisien.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

QA
1
R486
année 17

Revue de mathématiques
spéciales

Physical &
Applied Sci.
~~Serials~~

Math.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKE

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY